# 幼児・児童における数概念の発達に関する研究展望
## ―計数と加法の発達を中心に―

王　　暁　曦

## 1．目的

本稿の目的は，主に就学前の幼児から小学校低学年の児童を対象とする計数と加法をめぐる日本と欧米の先行研究を展望することによって，幼児・児童の加法の特性の発達と理解及び応用における研究の今後の課題を明らかにすることである。2節では子どもの数唱と計数の発達に関する従来の研究を，3節では加法の発達と加法交換法則の発達に関する研究と論争を，4節では「数感覚」に関する研究を，5節では算数思考発達の一般モデルに関する研究を展望し，6節において先行研究のまとめと今後の課題を考察する。

幼児がどのように数を認識しているかは精神発達の基本問題の1つと言えよう。1970年代より，認知心理学的な観点からの数に関する研究が盛んに行われるようになり，児童の数概念の発達が，解明されつつある。例えば，Groen & Parkman（1972）によって始まった心的たし算（mental arithmetic）の研究では，Gelman & Gallistel（1978）によって，子どもの計数における5つの原理が明らかにされた。これまで行われてきた他の研究から，数の理解の多様な側面が示唆されおり，数が持つさまざまな領域には，子どもの日常生活でのさまざまな体験から，獲得されることが分かってきたのである。つまり数概念は学校教育によって始めて獲得されるものではなく，日常生活の中での経験を通して獲得されるのである。

就学以前から，子どもたちは，数唱を用いた簡単な加法を経験する。従って，子どもの数の理解を明らかにするには，加法の発達の研究が重要不可欠となる。さらに，多くの子どもにとって，数唱による計算の経験は，加法の交換法則の構造を理解するのに，重要な役割を果たしている（Baroody, 1987c）。そのため，数唱や計数を含む幼児の数概念の発達を把握する必要がある。

子どもは，学校の内外における多様な活動を通して，数の理解を深めている。平成10年の小学校学習指導要領の算数では，第1学年から，「数についての感覚を豊かにする」，「図形についての感覚を豊かにする」，「量の大きさについての感覚を豊かにする」といった3つの「数感覚」に関連した目標が提唱された。子どもが数を理解する際に，「数感覚」が数の理解の基礎を構成する重要な概念であることが，指摘されるようになってきたのである（多鹿，2000）。また，能田（1992）は，算数・数学教育において必要とされる基礎学力の一つとして「数感覚」をあげている。

## 2. 子どもの数唱と計数

ここでは，幼児の数理解において，基礎となる数唱や計数に関する文献を展望して行く。算数の発達では，“数えること”（counting）が重要な意味を持つ。具体的には，カウンティングは，数詞をイチ，ニ　と唱える数唱と物の個数を数える計数の2つのスキルを指す（栗山，1995）。

### 2.1 数唱

日本では，数唱と計数は家庭で最も重視されている数行動である。吉田（1995）は，3歳ごろまでには，20以下の数，4歳くらいまでには20以上の数，8歳では100以上の数唱が可能になると指摘している。また，幼児が数唱の中の規則性を理解しており，数唱の発達が簡単な足し算や引き算の基礎になっていることが，近年明らかにされている。数唱についての発達モデルを提案したのはFusonら（1982）であった。彼らは数唱の発達段階を糸状段階，分割できない段階，分割できる段階，数量化段階，2方向段階の5つにと区分した。各段階は次の通りである。

① 糸状段階とは，個々の数詞が区分されていない状態（例，イチニサンシゴロク）。この段階では，ある数は1多いとか1少ないということは全く理解できていない。

② 分割できない段階とは，個々の数詞は区分されているが，序列を分割しているとはいえない状態（例，1から3まで唱えた後に4を引き出すことはできるが，3の次はいくつと聞かれても，4と答えられない）。また，この段階では，基数と序数の原理は理解しており，数唱を用いて簡単な足し算や引き算が可能になる。このとき用いられる方略は，counting-allと呼ばれるものである。

③ 分割できる段階とは，ある数Aから数えはじめる，あるいは，ある数Aから別の数Bまで上昇方向に数えたり，下降方向に数えたりすることができる段階である。この段階では，作動記憶の容量が必要になってくる。そのため，この数唱は幼児にとってはかなり難しいスキルである。しかし，この段階になると，子どもは，counting-allより効率的，かつ誤りが少ないcounting-on方略を使用することができる。

④ 数量化段階とは，ある数AからN個だけ上昇方向に数えたり，下降方向に数えたりすることができる状態。また，AからBまで数えていく間に数が何個あったかもわかるようになる。このような数唱は，年長児から小学1年生の子どもにおいて可能になる。

⑤ 2方向段階とは，どの数からでも自由自在に上昇方向でも下方方向でも容易に数唱が可能な状態。また数詞の分割も自由にできるようになる。たとえは，$7 + 6 = 12(6 + 6) + 1 = 13$といった足し算も可能になっている。こうした段階は，就学後に見られる。

Piaget（1952）は，子どもは数を数えることができても，数を理解しているとはいえないと主張している。しかし，数えるという最も基礎的な能力は，単純なように見えて，実はそうではない。その背後にはいろいろな子どもの数に対する知識が反映されていることが，近年多くの研究によって明らかにされてきている。たとえば，数唱は子どもの理解できる範囲内で，抽象的な数と単純な計算を表

象する（Baroody, 1987），物の数を数える単純な計数にも，様々な子どもの数理解が反映されている（Gelman & Gallistel, 1978）といった主張である。つまり，幼児の数理解を研究するには，幼児数唱の発達段階を把握し，研究テーマとの関連性を検討する必要があると考えられる。

### 2.2 計数

Resnick（1989）は，計数は厳密な量的判断をする上で最初のステップであるとし，計数によって量の原概念スキーマ（protoquantitative schemas）の部分—全体と増加—減少のスキーマとが統合されるとした。一方，Chi&Klahr（1975）は，カウンティングにはサビタイジング（subitizing）（3までの小さい数に適用可能な見てわかる過程）と呼ばれる知覚過程，と，一つずつ数える計数過程の2つの過程があると主張した。

#### 2.2.1 幼児の subitizing

Chi & Klahr（1975）は，5歳児にランダムに置かれたいくつかのドットを見せ，そのドットの個数か何個あるかを言わせ，その反応時間を測定した。その結果，3個までの個数の判断時間と4から7までの個数の判断時間を比較し，3個までは計数を行わずに判断しているとした。この結果から，幼児が，小さい数については数唱によらない知覚的な行為によって個数を理解していることを示した。

また，subitizing 能力と計数能力はどちらが先に発達するかについても，論争が行われている。例えば，Klar & Wallace（1973, 1976）は，subitizing は計数より先に発達すると主張した。一方 Gelman & Gallistel（1978）は，小さい数の理解には，計数が subitizing より先に発達するとし，計数の基礎は2歳頃出現するとした。さらに重要なのは子どもの算数的推理は，計数により得られる“数の多さ”に関する表象と密接に関係していると主張したことである。

#### 2.2.2 幼児の計数

ここでは，Gelman の計数5原理とそれに対する指摘を展望する。

Gelman & Gallistel（1978）によると，正しく計数ができるためには，①1対1対応，②安定した順序，③基数性，④順序無関連，⑤抽象性の5つの原理が必要である。①1対1対応とは，数える対象物1つにつき1つの数詞を当てることである。1対1対応は数理解の最も基礎的な原理であり，それが理解できなければ，数の保存も獲得できない。②安定した順序とは，計数に用いられる数詞の配列が常に同じだということである。③基数性とは，対象物を数えていったときに，最後の数がその集合の大きさを示すということである。④順序無関係とは，集合のどこからどのような順で数えてもよく，同じ物を2回数えたり，数えないで飛ばしたりといった誤りがなければよいということである。⑤抽象性とは，対象物の色や形によらず，正しく数えられるということである。

Gelman & Gallistel（1978）は，この5つの原理が，どんなカウンティングシステムにおいても不可欠であり，子どもはこの5つの原理をよく理解しなければ，完全に数を理解しているとはいえないと主張している。しかし，子どもの計数に必要な能力に関して，Bryant & Nunes（2002）は Gelman の5つの原理の必要性を認めると同時に，その不完全さについても指摘している。例えば，Gelman の5の原理の中で述べられた基数性では，1つの集合についてしか見ていないが，基数性質では，集合

間の関連性をみる必要があるとした。また安定した順序原理が理解できても，子どもは，1より2，2より3のほうが大きいという連続の数は量の上昇を示すことが理解できているとはいえないという理由から，Gelmanらの安定した順序の実験は，序数的関連性が見落とされていると指摘している。

Piaget（1952）は，数唱や計数は現象的なもので，真の概念とは無縁の物であると主張している。しかし，上述の研究より，数唱や計数がより高次な集合数の多少判断に積極的価値を持つことは明らかである。そのため，高次な算数の能力について研究する際には，幼児の数唱や計数の発達に基づいて検討することが重要である。

## 3. 加法

幼児は日常生活の中で，自分なりのいろいろな方略を用いている。Baroody（1987），Starkey & Gelman（1982）によれば，幼児は「より多い」，「より少ない」という用語を適切に使うことができ，小さな数の足し算や引き算を理解することができる。そして，就学以前から，子どもは具体物に関する簡単な足し算や引き算を行うことができる（Hughes, 1981, 1986）。Resnick（1989）は，子どもの数概念の発達の本質を確立する一つの方法として，算数の方略を調べた。その結果，多くの子どもは答えを出すために計数の知識を使用することが明らかになった。以上のことから，足し算や引き算のような小学校に入学してから学習する計算も，幼児が，自分なりの方法で計算している可能性が十分に考えられる（吉田，1995）。

従って，ここでは，学校の指導を受ける前の幼児期における加法の発達モデルと加法の基礎特性である交換法則の発達に関する研究を展望する。

### 3.1 Fuson（1992）の加法発達モデル

子どもはまず全ての数を指で示した後に数えだす方略で加法を行うようになる。その後，加数だけ指で示した後に，その次の数からはじめて被加数を数えるようになり，最後に指に頼らず，抽象的な数のみで，計算を行うようになる。Fuson（1992）は，このような幼児の加法を次の4段階にまとめている。

第一段階は，被加数・加数の双方を指で示した後に，示した指の数を1から数え，答えを出す。この段階では，子どもは，counting-all方略を使用する。この最も基本的な段階は，数唱発達段階のモデル（Fuson, 1982）でいえば，第2段階の「分割できない数列系列」にあたる。

第二段階は，被加数・加数の双方を指で示した後に，加数の分だけ数え，答えを出す。この段階では，子どもは，counting-on方略を使用する。この方略は，counting-all方略よりかなり効率的な方略である。この段階は，Fuson（1982）の第3段階「分割できる数詞の系列」および第4段階「数量化」の段階にあたる。

第三段階は，第二段階のように，全ての数を示すことがなく，加数からすぐに被加数の数を一つずつ数えて答えを出す方略を用いられる。第二段階よりかなり進んだ方略とはいえる。

第四段階は，数の合成・分解を用いた足し算が可能になる段階である。

吉田（1995）は，このモデルでは，それぞれのレベルの年齢が明確でない点が問題であるが，こうした発達レベルを知っておくことは足し算の指導においても重要なことであると述べている。

### 3.2 Min モデル

Groen & Parkman（1972）は，子どもは2つの数の足し算において大きい方を最初に選び，小さい方の数を後から加えるというミンモデルを提案した。たとえは，2 + 6の足し算では，最初に大きな数である6を選び，それから2つ数えて「7，8」と答えをだす方略である。このミンモデルは，counting-on 方略を用いる前に，2つの数のどちらが大きい数であるかを判断するものであり，counting-on 方略とは区別される。一方，Groen & Resnick（1977）は，幼児もミンモデルを用いることを見出している。Resnick らは，Min モデルを CAL と COL の2種類を分類した。CAL とは大きい加数からすべての数を数える方略であり，COL とは，大きい数をベースとして，小さい数のみを数えだす方略である。Resnick らが提唱している COL 方略は Min モデルと同じ定義である。そして，Resnick（1992）は，交換法則の証拠として，幼児の方略が足し算順序を無視している点に注目している。

以上の研究より，加法において，幼児は，効率がよい方略を用いる傾向が見られる。従って，加法の方略，特に counting-on 方略の発達と加法交換法則との関連性を検討する必要がある。

### 3.3 加法の基本特性－交換法則の発達モデル

Ginsburg（1977）の研究以来，数多くの子どもの加法交換法則理解に関する研究が発表されている。加法の交換法則とは，加数の位置を被加数の位置と交換しても和が変わらないという概念である。ここでは，代表的な二つの交換法則の発達レベルに関する研究を展望する。

#### 3.3.1 Resnick の交換法則の発達レベル

Resnick（1992）によると，加法交換法則の根源は原始量レベルまで遡られ，部分—全体スキーマのような加法概念に対する一般的理解に由来する。また，Resnick は，加法交換法則を4レベルに区分している（表1）

**表1** Resnick の交換法則の発達レベル（1992）

| 交換法則の発達レベル | 例 |
|---|---|
| 原初的量概念レベル（数以前） | りんご＋オレンジ＝オレンジ＋りんご |
| 量レベル（具体物における特定の数） | りんご3つ＋りんご5つ＝りんご5つ＋りんご3つ |
| 数字レベル（抽象物における特定の数） | 3 + 5 = 5 + 3 |
| 演算子レベル（一般化された算数原理） | A + B = B + A |

原初的量概念レベル（Protoquantitative）：このレベルでは，子どもたちは，全体の量は，2つ，また2つ以上に分けられること，部分は全体を作るために再合成できること，最初の量（original amount）の再構成には，部分の順番はあまり重要ではないことを知っている。

量レベル（Quantitative）：このレベルでは，量を判断する場面では，子どもは数唱スキルを適用し，部分－全体スキーマで量を表す。

数字レベル（Numerical）：具体的な指示物が必要でなくなり，子どもは，数と数の間の交換法則に関する知識を体系化することができる。

演算子レベル（Operator）：このレベルでは，子どもは特定の数だけでなく，より一般的な数の関係にまで注意を切りかえることができる。このレベルの子どもは，交換法則を加法の一般的な特性として理解している。

Resnick（1992）によると，インフォーマル方略を用いる以前の初期段階である原初的量概念レベルの段階（5節参照）では，交換法則の知識を構成されている。すなわち，幼児は，計算を把握する前に，既に素朴な交換法則を理解していると考えられる。もしそうであれば，原初の量概念レベルの時期にいる幼児が交換法則を理解する際に，必要とする要素を検討する必要がある。

### 3.3.2 Baroody の交換法則の発達レベル

幼児の交換法則を調査する際に，主に物語問題が使われている。その物語問題の提示法として，2つのパターンがある。Change-add-to 問題と Part-part-whole 問題である。Weaver（1982）によると，Change-add-to 問題は，単項演算（binary operation），Part-part-whole 問題は，二項演算（unary operation）である。単項演算とは，被作用子が1つだけあるような演算である。（例，A さんはあめを3つ持っています。お母さんは A さんにあめを2つあげました。A さんはあめをいくつ持っていますか）。二項演算とは，2つの要素から3番目の要素をもたらす演算である。（例，B さんはりんごを3つとみかんを2つ持っています。B さんは果物を全部いくつ持っていますか。）

従来の早期加法概念では，子どもは二項演算より，単項演算のほうが早く発達するとされる（Brush, 1978; Gelman & Gallistel, 1978）。しかし Resnick は，幼児の思考には，加法の一次元概念（unary conception of addition）と二次元概念（binary conception of addition）が含まれるという仮説を立てている。さらに，原初の量概念レベルにおいて既に子どもの加法の一次元概念と二次元概念は同時に存在しているという仮説を立てている。この Resnick の仮説から考えると，問題のタイプによる交換法則に関する理解の差は生じないはずである。しかし，いくつもの研究結果から，子どもは，Change-add-to 問題と比べ，Part-part-whole 問題においてより速く解答するという報告がされている。そこで，Baroody ら（2001）は，加法の一次元概念と二次概念と結びつけて，加法の交換法則の発達レベルを新たに提唱した（表2）。

レベル0では，子どもは加法の一次元概念を持つため，彼らは，2 + 4と4 + 2は異なる計算として認識する。レベル1では，概念的な抑制がないため，子どもはより速く計算するために，式の順番を無視することができる。レベル2では，4 + 2と2 + 4は順番が違っても，その結果は同じであることを認識している。レベル3では，子どもは加法の二次元的な視点を獲得しており，それによって，真の交換法則を理解することができる。

表２　Broody らの交換法則の発達レベル　Baroody & Tiilikainen（2001）

| | 交換法則の発達レベル | 例 |
|---|---|---|
| レベル０ | 加法の一次元的概念＋交換法則と無関連 | ４＋２は４より２個多い，２＋４は２より４個多いとしてみなしている。そして，４＋２と２＋４を別の計算として認識している。 |
| レベル１ | 加法の一次元的概念＋原初的交換法則 | ２＋４は，２より４個多いとしてみなしているが，計算の効率を良くするために，４より２個多いとして扱う。しかし，４＋２と２＋４は同じ和であることを正確に認識できない。 |
| レベル２ | 加法の一次元的概念＋仮の交換法則 | ２＋４は，２より４個多いとしてみなしているが，４＋２と同じ和を持つが，４＋２と持つ意味が異なると認識している。 |
| レベル３ | 加法の二次的概念＋真の交換法則 | ２＋４と４＋２は，どちらも基数２と基数４に結合して，基数6を形成するとしてみなしている（2＋4＝4＋2＝6）と認識している。 |

## 4. 数感覚

近年，欧米では，「数感覚」に関する研究が数多く存在している。子どもが数を理解する場合に，「数感覚」が数の理解の基礎を構成する重要な概念であることが，指摘されるようになってきた（多鹿，2000）。

「数感覚」即ち「Number Sense」という言葉は，1954年に，Dantzigによって提唱された。「数感覚」について，Dantzigは，「数の比較的小さい集合において，その集合からものが取り除かれたり，加えられたりした場合に，直接その数がわからなくても，何かが変わったということを認識できる能力」と定義した。「数感覚」が提唱されてから，現在まで半世紀が経った。この半世紀の間に，認知学研究者や数学研究者は，異なった方面から，「数感覚」を定義したため，「数感覚」の定義も多様化してきた。例えば，Gersten & Chard（1999）は，「数感覚」は，子どもの数に対する流動性や柔軟性や，数字が表す意味に関する感覚，暗算をしたり，現実の世界を観察と比較したりするための能力と関係すると指摘している。またBerch（2005）は，様々な「数感覚」に関する文献を基に，「数感覚」が意識，直観，気づき，知識，スキル，能力，願い，感覚，予測，プロセス，概念的な構造や，心的数直線から構成されていると主張している。

「数感覚」は数理解において重要な領域である。日本では「数感覚」を利用して子どもを指導する論文が数多く存在しており，平成10年の学習指導要領の中で，「数感覚」について述べられている。しかし，幼児の「数感覚」の発達や「数感覚」と他の算数領域との関連に関する論文は少ないのが現状である。

## 5. Resnickの算数の思考発達における一般モデル

Resnick（1992）は加算の交換法則の発達を用いて，算数思考の発達における一般モデルを検証し

ている。Resnick は特定領域における数学的な発達には，性質の異なる4つのタイプの算数思考が含まれると提唱した。すなわち，原初の量概念としての算数（Mathematics of Protoquantities），量としての算数（Mathematics of Quantities），数としての算数（Mathematics of Numbers），演算子としての算数（Mathematics of Operators）である。

**レベル1：原初の量概念としての算数**　このレベルでは，子どもは特定の"数の多さ"（numerosity）と関係なく，具体物について判断することができる。その際，質的推理は，答えの方向性を予測するのに対し，量的な推理は，正確な答えを決定する。この方法を用いて，子どもは，ある集合にものを加えるという働きは，その集合のサイズが増えることであり，ある集合からものを取り除くという働きは，その集合のサイズが減少することであると認識するのである。この方法は，Dantzig（1954）が提唱した「数感覚」（Number Sense）に似ている。Dantzig は，「数の比較的小さい集合において，その集合からものが取り除かれたり，加えられたりした場合に，直接その数がわからなくても，何かが変わったということを認識できる能力」と定義した。

**レベル2：量としての算数**　このレベルでは，子どもは，特定的かつ意味のある文脈に関係のある数について判断することができる。例えば，彼らはクッキー3つにクッキー2つを加えると，クッキーは5つになるということを予測，判断できる。逆に，5つのクッキーから，加えられた2つのクッキーを取り除くと，元の3つのクッキーになることも認識できる。

**レベル3：数字としての算数**　このレベルでは，子どもは，抽象的な数について判断することができる。例えば，具体的な指示物なしで，3と2の加法に関する論理的な結論を得ることができる。あるいは，個別の計算，または記憶からの捜査がなくても，彼らは3＋2－2の結果は3になることを認識することができる。従って，2を引くことで足した2を取り消すと理解している可能性がある。

**レベル4：演算子としての算数**　このレベルでは，子どもは，一般的な算数原理を構成する。彼らは，抽象的な概念上の実体として，数字における演算ができる。例えば，子どもは，どんな数でも加えた後に，その数を引くことによって式の結果は元に戻るといった一般的な逆数原理（general inverse principle）を認識することができる。

## 6. まとめと今後の課題

2節から5節にかけて，「数唱と計数」，「加法」，「数感覚」，「算数の思考発達の一般モデル」に関する先行研究を展望してきた。その結果，以下のことが分かってきた。①学校教育を受ける前に，日常生活における数唱や計数の経験を通して，子どもはインフォーマルの方略を用いて，簡単な加法を行う。②子どもはより効率的な方略を選択するという特性から，計算はより効率的かつ正確に行う。③加法の基礎特性である加法の交換法則は，子どもの計算の発達に重要な役割を果たしている。④他の数概念と比べて，比較的新しい概念である「数感覚」は，子どもの数理解や数量判断に重要な役割を果たしている。⑤子どもの算数的思考は具体物から抽象的な数や演算まで発達していく。

以上の展望結果をもとに，今後の課題をまとめると次のようになる。

第一，幼児の数概念の基礎となる数唱と計数と数理解の関連性

Piagetは，数詞の意味を把握するために，子どもは，必ず数の基数と序数原理を理解しなければならないと主張している。したがって，幼児によって唱えられる数詞は必ずしも数的な系列とはいえない。また，数唱と計数は練習により上達して行くと推測できる。しかし，数唱と計数ができるからといって，数が応用できるかどうか，数に示された意味が理解できるかどうかについては，今後検討する必要がある。

第二，幼児の算数教育に関する日米間の社会文化の差が，幼児の加法的発達に与える影響

幼児の数理解に関する国際比較研究から見ると，日本を含む東アジアの幼児の数的能力が欧米の同年齢の幼児に比べて優れているという結果が報告されている（Starkey, 2002, 2003）。欧米に幼児の加法の交換法則に関する研究は数多く存在しているのに対して，日本を含む東アジアの幼児の加法交換法則に関する研究は少ない。東アジアの幼児が真に優れた数的能力を持つか否かについては，交換法則に対する影響があるかどうかを検討する必要がある。

第三，数唱・計数と加算のほか，加法交換法則の発達に関係する要素

ResnickとBaroodyは数唱・計数と加算の発達の側面から，加法交換法則を検討している。しかし，数能力には数唱・計数以外に，他の要素も含まれている。例えば，榊原（2006）はStarkey（2002）により作成されたCMA（Child Math Assessment）を参考にし，日本版のCMAを作成した。その中の数課題には，物の計数，数詞系列の知識，順序数，数量比較用語，等しい集合の構成が含まれている。また，幼児の「数感覚」をアセスメントする研究においては，数唱以外の数的能力についても言及されている。数の知識（Number Knowledge），数の変換（Number Transformation），見積もり（Estimation），数パターン（Number Patterns）である（Jordan, 2006）。以上のことから，加法交換法則の発達を研究する際には，数唱・計数と加算の能力以外に，数的能力との関連性を検討する必要がある。

第四，加法交換法則に対する半具体物の影響

Resnick（1992）の算数思考の発達における一般モデルから見ると，子どもの算数思考は具体物から，抽象的な数へと発達していく。交換法則についての実験では，具体物による物語問題と数字による計算問題が主流であった。しかし，算数教育を考えてみると，おはじき，ドットとタイルのような半具体物を用いて，指導を行う例が多く存在している。そのため，半具体物が幼児の加法交換法則に与える影響を検討する必要がある。

以上のことから，今後の研究では，半具体物の課題を取り入れ，数唱以外の数的能力の要素と加法交換法則の発達との関連性について検討して行く必要がある。

## 文献

Baroody, A. J, Berent, R & Packman, D（1982）The use of mathematical structure by inner city children. Focus on

Learning Problem in Mathematics, 4 (2), 5-13

Baroody, A. J & Ginsburg, H. P. (1986) The relationship between initial meamingful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. (pp. 75-112). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Berch, Daniel B. (2005) Making Sense of Number Sense: Implications for Children With Mathematical Disabilities. Journal of Learning Disabilities, 38 (4), 333-339..

Brush, Lorelei R. (1978) preschool Children's Knowledge of Addition and Subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 9, (1), 44-54.

Bryant, P & Nunes, T (2002) Children's understanding of mathematics. In Usha, Goswami (Ed), Blackwell handbook of childhood cognitive development. (pp. 412-439). Malden, MA : Blackwell Pub.

Chi, M. T. H. & Klahr, D. (1975) Span and Rate of Apprehension in Children and Adults. Journal of Experimental Child Psychology, 19, (3), 434-439.

Dantzig, T. (1954) Number: The language of science. New York: MacMillan.

Fuson, K. C. Richards, J. & Briars, D. J. (1982) The acquisition and elaboration of the number word sequence. In C, Brainerd (Ed) Children' logical and mathematical cognition: Progress in cognitive development research. New York: Springer-Verlag. pp. 33-92

Fuson, K. C (1992) Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. In G. Leinhardt, R. Patnam, & R, Ahattrup (Eds). Analysis of arithmetic for mathematics teaching. Hillsdale, NJ: Erllbaum

Gelman, R. & Gallistel, C. R (1978) The child understanding of number. Cambridge, M. A: Harvard University Press.

Gersten, R & Chard, D (1999) Number Sense: Rethinking Arithmetic Instruction for Students with Mathematical Disabilities. Journal of Special Education, 33 (1), 18-28.

Ginsburg, H. P (1977) Children' arithmetic: Te learning process. New York: Van Npstrand.

Groen, G. J. & Parkman, J. M. (1972) A Chronometric Analysis of Simple Addition. Psychological Review, 79, (4), 329-43.

Groen, G. J. & Resnick, L. B. (1977) Can Preschool Children Invent Addition Algorithms. Journal of Educational Psychology, 69, (6), 645-52.

Hughes, M. (1981) Can preschool children add and subtract? Educational Psychology, 3, 207-219

Hughes, M. (1986) Children and number. Oxford, UK: Blackwell.

Jordan, Nancy C.; Kaplan, David; Nabors Olah, Leslie; Locuniak, Maria N (2006) Number Sense Growth in Kindergarten: A Longitudinal Investigation of Children at Risk for Mathematics Difficulties. Child Development, 77 (1), 153-175.

Klar, D., & Wallace, J.G. (1973) The Role of Quantification Operators in the Development of Conservation of Quantity. Cognitive Psychology, 4, 301-27.

Klar, D., & Wallace, J.G. (1976) Cognitive development: An information processing view. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

栗山　和宏・吉田　甫 (1995) 心的加算における数の表象構造について　教育心理研究, 43, 402-410

Piaget, J. (1952) The child' conception of number. New York: Norton.

Resnick, L. B (1989) Developing mathematical knowledge. American Psychologist, 44 (2), 162-169.

Resnick, L. B (1992) From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. a. Hattrup (Eds). Analysis of arithmetic of mathematics teaching. pp. 372-425.

Starkey, P, Klein, A; & Wakeley, A (2004) Enhancing Young Children's Mathematical Knowledge through a Pre-Kindergarten Mathematics Intervention. Early Childhood Research Quarterly, 19 (1), 99-120.

榊原 知美 (2006) 幼児の数的発達に対する幼稚園教師の支援と役割：保育活動の自然観察に基づく検討　発達心

理学研究，17（1），50-61.

Strauss, M. S. & Curtis, L. E.（1981）Infant Perception of Numerosity. Child Development, 52（4），1146-1152.

多鹿秀継（2000）子どもの「数感覚」を育む―教育心理学と算数・数学教育の連携―．教育心理学年報，39，24-28.

Weaver, J, F（1982）Interpretations of number operation and symbolic representations of addition and subtraction: In T, P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg（Eds），Addition and subtraction: A cognitive perspective. pp. 60-66 Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wilkins, Jesse, L. M.; Baroody, Arthur, J.; Tiilikainen, Sirpa（2001）Kindergartners' Understanding of Additive commutativity within the Context of Word Problems. Journal of Experimental Child Psychology, 79（1），23-36.

吉田　甫（1995）数概念　吉田　甫・多鹿　秀継編著　認知心理学からみた数の理解　北大路書房，pp. 11-33.