有限群の部分群に関するゼータ関数について

広中由美子

§1

部分群の個数という観点から群を見て，数論的色彩を施すとどのようになるかという覚え書きである．観点を変えることで多少面白い知見も得られることを報告したい．

群 G の部分群の全体のなす集合を $\mathcal{S}(G)$ とおき，部分群の個数の母関数としてのゼータ関数を，次のように $s \in \mathbb{C}$ について右辺の和が収束する範囲で定義する：

$$\zeta_G(s) = \sum_{H \in \mathcal{S}(G), |H| < \infty} \frac{1}{|H|^s}, \tag{1.1}$$

$$\zeta_G^*(s) = \sum_{H \in \mathcal{S}(G), (G:H) < \infty} \frac{1}{(G:H)^s}. \tag{1.2}$$

唐突な定義に見えるかもしれないが，$G = \mathbb{Z}$ の場合 (1.2) の右辺は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束し，Riemann zeta 関数 $\zeta(s)$ に他ならない．一般に，G が有限生成 lattice Λ の場合，$\zeta_\Lambda^*(s)$ は，いわゆる Solomon's zeta 関数と呼ばれる古典的なものになる．多元環のゼータ関数や，行列環のゼータもこの仲間ととらえることができる．代数体 K の Dedekind zeta 関数は，整数環 $\mathcal{O}_K$ のイデアルに和を制限したものだから (1.2) 型の類似と考えることもできる．
数の乗法群や加法群について “遊んで” みると次のようになる：

$$\begin{aligned}
&\zeta_{\mathbb{Z}}^*(s) = \zeta_{\mathbb{C}^\times}(s) = \zeta(s) \text{ (Riemann zeta 関数)},\\
&\zeta_{\mathbb{Q}^\times}(s) = \zeta_{\mathbb{R}^\times}(s) = 1 + \frac{1}{2^s},\\
&\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \zeta_{\mathbb{C}}(s) = 1.
\end{aligned}$$

代数体 K の Dedekind zeta 関数について，ゼータ関数が等しければ体は同型になるだろうかという問題は，K の adéle 環の同型問題と関わり，1970 年代に小松啓一らによって研究されていて系統的な反例が与えられている ([Km]).

$\zeta_G^*(s)$ の方が通常のゼータ関数の拡張のように見られ，興味深そうであるが，有限群に限ると，両者は

$$\zeta_G(s) = \frac{1}{|G|^s} \cdot \zeta_G^*(-s) \tag{1.3}$$

というきわめて簡単な関係で結ばれていて，どちらで考えても本質的に変わらない．以下では有限群に限定してゼータ関数 $\zeta_G(s)$ を扱う．

有限群のゼータ関数について，ゼータ関数が等しければ群は同型だろうかという素朴な疑問が湧いてくる．非アーベル群まで考えると，従って冪零群まで許すと，群は非同型だがゼータ関数が等しい例が系統的に作れる (命題 2.5, 命題 2.6，定理 2.7) が，アーベル群に限定するとゼータ関数が群を規定するだろうと予想されるものの，ほとんど分かっていない状況である (命題 2.8)．最後に関連する研究について付言した．

§2

$\mathbb{P}$ を素数全体のなす集合とする．$\zeta_G(s)$ は整数係数の p^{-s}, $(p \in \mathbb{P})$ たちの多項式とみなせる．次は明らか．

命題 2.1 有限群 G, G' について，
(1) $\zeta_G(s) = \zeta_{G'}(s)$ ならば $|G| = |G'|$ である，
(2) $|G|$ と $|G'|$ が互いに素であれば，$\zeta_{G\times G'}(s) = \zeta_G(s) \times \zeta_{G'}(s)$ である．

有限群が巡回群になるための必要十分条件をゼータ関数の言葉で書くと次のようになる．

命題 2.2 有限群 G について以下は同値である：
(i) $\zeta_G(s)$ の係数に 1 しか現れない，
(ii) ある $n \in \mathbb{N}$ について $\zeta_G(s) = \sum_{d|n} d^{-s}$,
(iii) G は有限巡回群である．

Dedekind zeta 関数のオイラー積に倣って，$\zeta_G(s)$ が p^{-s}, $p \in \mathbb{P}$ の多項式の積になるとき，$\zeta_G(s)$ は**オイラー積をもつ** ということにする．

命題 2.3 $\zeta_G(s)$ がオイラー積をもつことと G が冪零群であることは同値である．

証明：有限群については，冪零群であることと，p-シロー部分群の直積になることは同値であった．従って，G が冪零群であれば，オイラー積を持つ (cf. 命題 2.1)．逆に $\zeta_G(s)$ がオイラー積を持つと仮定する．もともと $\zeta_G(s)$ は自然数係数のモニック多項式であるか

ら，そのオイラー因子をモニックにすることができ，そのときには，オイラー因子自体が自然数係数のモニック多項式となる．特に $|G|$ の 素因子 p について p-シロー部分群が一つしかなく，従って正規部分群となり，G は冪零群となる． ∎

上の命題から，$\zeta_G(s)$ が G の同型類を定めるかという問題は，まず p 群について考察するのが順当であろう．

冪零群でなければ，オイラー積をもたないのであるが，例えば 二面体群

$$D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau^{-1} \rangle$$

のゼータ関数は，n が奇数と仮定すると

$$\begin{aligned}\zeta_{D_n}(s) &= 1 + n \cdot 2^{-s} + \sum_{d|n, d\neq 1} (d^{-s} + (2d)^{-s}) \\ &= 1 + n \cdot 2^{-s} + (1 + 2^{-s}) \prod_{p|n} f_p(p^{-s}), \\ &\quad \left(f_p(X) = X^{m_p} + X^{m_p - 1} + \cdots + X + 1, \text{ for } p^{m_p} \| n\right).\end{aligned}$$

ところで，有限アーベル群については，$G \cong \mathfrak{X}(G)$(指標群) であり，$H \in \mathcal{S}(G)$ に対して $\mathfrak{X}(G/H)$ を $\mathfrak{X}(G)$ の部分群とみなして対応させることで $\mathcal{S}(G)$ と $\mathcal{S}(\mathfrak{X}(G))$ が一対一対応する．特に任意の d について，位数 d の部分群の個数と指数 d の部分群の個数が一致する．これをゼータ関数の言葉で書くと次の命題となる．

命題 2.4 有限アーベル群 G について，$\zeta_G(s) = \zeta_G^*(s)$ であり，次の関数等式をみたす：

$$\zeta_G(s) = \frac{1}{|G|^s} \cdot \zeta_G(-s). \tag{2.1}$$

「関数等式を持つ」というより「ゼータ関数 $\zeta_G(s)$ は対称である」という言い方のほうが $\zeta_G(s)$ の形を表していて適切かもしれない．

アーベル p 群と非アーベル p 群でゼータ関数が等しくなる例を構成する．自然数 n について，位数 n の巡回群を C_n と表すことにする．

奇素数 p と自然数 m について 位数 p^{m+2} の群 $G_p(m)$ を

$$G_p(m) = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^{p^{m+1}} = \tau^p = 1,\ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{p^m+1} \rangle, \tag{2.2}$$

と定める[*1]．位数 p^{m+1} の巡回群を正規部分群としてもつ位数 p^{m+2} の群は，$G_p(m)$ または $C_{p^{m+1}} \times C_p$ に同型で，$G_p(m)$ は非アーベル群である．

[*1] $G_3(1)$ と $C_9 \times C_3$ の部分群の個数が一致することを星明考氏が GAP を用いて調べてくれた．ここに記して感謝する．

命題 2.5 p を奇素数とする．
(1) $m \geq 1$ について，非アーベル群 $G_p(m)$ と アーベル群 $C_{p^{m+1}} \times C_p$ のゼータ関数は一致し，関数等式 *(2.1)* をみたす．
(2) 位数 p^2 以下の p 群はゼータ関数で決定される．

証明：(1) $G_p(m)$ の任意の元は $\sigma^i \tau^j$ の形にかけて

$$(\sigma^i \tau^j)^k = \sigma^{i(k+\frac{k(k-1)}{2}jp^m)}\tau^{jk}, \quad (\sigma^i \tau^j)^p = \sigma^{ip}$$

であり，生成関係から σ^p は中心にはいる．従って，$G_p(m)$ の位数 p^{m+1} の元はちょうど $p^{m+1}(p-1)$ 個存在する．$G_p(m)$ の真部分群 H が位数 p^{m+1} の元を含めば $H \cong C_{p^{m+1}}$ となり，そのような部分群は 1 つにつき位数 p^{m+1} の元を $p^m(p-1)$ 個持つ．従って位数 p^{m+1} の元を含む真部分群は全部で p 個存在する．もし H が位数 p^{m+1} の元を含まなければ，H は $\langle \sigma^p, \tau \rangle \cong C_{p^m} \times C_p$ の部分群となる．
一方，$G' = \langle a, b \mid a^{p^{m+1}} = b^p = 1,\ ab = ba \rangle \cong C_{p^{m+1}} \times C_p$ について，G' の $C_{p^{m+1}}$ と同型な部分群は p 個で，それら以外の部分群は，すべて $G'' = \langle a^p, b \rangle \cong C_{p^m} \times C_p \cong \langle \sigma^p, \tau \rangle$ に含まれる．従って，任意の p^d について 位数 p^d の $G_p(m)$ の部分群の個数と位数 p^d の G' の部分群の個数は一致し，両者のゼータ関数は一致する．G' がアーベル群であるから，関数等式 (2.1) が成立する．
(2) 位数 p^2 以下の p-群は C_{p^2}, $C_p \times C_p$, C_p のいずれかに同型で，これらのゼータ関数は

$$\zeta_{C_{p^2}}(s) = 1 + p^{-s} + p^{-2s}, \quad \zeta_{C_p \times C_p}(s) = 1 + (p+1)p^{-s} + p^{-2s}, \quad \zeta_{C_p}(s) = 1 + p^{-s}.$$

∎

次に 2 群の例を考える．自然数 m について 位数 2^{m+3} の非アーベル群 G_m を

$$G_m = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^{2^{m+1}} = \tau^4 = 1,\ \tau\sigma\tau = \sigma^{1+2^m} \rangle, \tag{2.3}$$

と定める．

命題 2.6 (1) 任意の自然数 m について，位数 2^{m+3} の非アーベル群 G_m とアーベル群 $C_{2^{m+1}} \times C_4$ のゼータ関数は一致し，関数等式 *(2.1)* をみたす．
(2) 位数 8 以下の 2 群は，ゼータ関数で決定される．

証明： (1) G_m の位数 2^{m+1} の元は $\{\sigma^i \tau^j \mid 2 \nmid i,\ 0 \leq j \leq 3\}$ の 2^{m+2} 個で，位数 2^{m+1} の巡回群は $\langle \sigma \rangle$, $\langle \sigma\tau^2 \rangle$, $\langle \sigma\tau \rangle$, $\langle \sigma^3\tau \rangle$ の 4 つ．それぞれを含む位数 2^{m+2} の部分群は，それぞれ一つずつだが，初めの 2 つは $\langle \sigma, \tau^2 \rangle$, 後ろの 2 つは $\langle \sigma\tau, \tau^2 \rangle$ に含まれる．これらが，位数 2^{m+1} の元を含む真部分群のすべてである．この状況は アーベル群 $C_{2^{m+2}} \times C_4$ の場合と一致している．位数 2^{m+1} 以下の元からなる部分群は $\langle \sigma^2, \tau \rangle \cong C_{2^m} \times C_4$ に含まれ

る．以上より G_m と $C_{2^{m+1}} \times C_4$ のゼータ関数は一致し，後者の関数等式から前者の関数等式がもたらされる．

(2) 群の位数ごとに考えれば十分 (cf. 命題 2.1) で，位数 4 以下については 命題 2.5-(2) のゼータ関数で $p=2$ とすればよい．位数 8 のアーベル群は C_8, $C_4 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2$ のいずれかに同型で，位数 8 の非アーベル群は二面体群 D_4 または 四元数群 $Q_2 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = 1,\ \sigma^2 = \tau^2,\ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle$ に同型である．ゼータ関数を計算すると以下のようになる：

$$\begin{aligned}
&\zeta_{C_8}(s) = 1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + 2^{-3s},\\
&\zeta_{C_4\times C_2} = 1 + 3\cdot 2^{-s} + 3\cdot 2^{-2s} + 2^{-3s},\\
&\zeta_{C_2\times C_2\times C_2}(s) = 1 + 7\cdot 2^{-s} + 7\cdot 2^{-2s} + 2^{-3s},\\
&\zeta_{D_4}(s) = 1 + 5\cdot 2^{-s} + 3\cdot 2^{-2s} + 2^{-3s},\\
&\zeta_{Q_2}(s) = 1 + 2^{-s} + 3\cdot 2^{-2s} + 2^{-3s}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

∎

自然数 n と素数 p について $v_p(n)$ で n を割り切る p の最大べき指数を表す．
命題 2.3，命題 2.5， 命題 2.6 をまとめると次の定理を得る．(1) の後半は，(2.4) も併せてみればよい．

定理 2.7 (1) 自然数 n が「奇素数 p について $v_p(n) \le 2$ かつ $v_2(n) \le 3$」をみたすと仮定する．このとき，位数 n の冪零群は，ゼータ関数が等しければ同型であり，ゼータ関数が関数等式をもつ（すなわち対称である）こととアーベル群であることは同値である．
(2) 自然数 n が「ある奇素数 p について $v_p(n) \ge 3$ または $v_2(n) \ge 4$」をみたすとき，位数 n のアーベル群 G と非アーベル冪零群 G' で $\zeta_G(s) = \zeta_{G'}(s)$ の例が存在する．

非アーベル群も含めると，たとえ p 群に限っても，非同型な群でゼータ関数の等しい例が系統的に出てくることが分かった．また，関数等式，すなわち $\zeta_G(s)$ の対称性は，アーベル群に特有ではないことも分かった．「関数等式をもつ」というより，「$\zeta_G(s) = \zeta^*_G(s)$ である」あるいは「$\zeta_G(s)$ の係数が対称である」と表現するほうが適切であろう．そもそもの問題意識も，部分群の位数ごとの個数が分かったら群は決定できるのかという群論的な問題意識であった．

それではアーベル p 群に限定すると，ゼータ関数は群を決定するのであろうか？ 以下はアーベル p 群に限定してもう少し話を進める．

有限生成アーベル群の基本定理から，アーベル p 群は，ある λ について次のような G_λ に一意的に同型となる．

$$G_\lambda = C_{p^{\lambda_1}} \times \cdots \times C_{p^{\lambda_r}}, \quad (\lambda \in \Lambda_r), \tag{2.5}$$

$$\Lambda = \bigcup_{r\ge 1} \Lambda_r, \quad \Lambda_r = \left\{ \lambda \in \mathbb{Z}^r \mid \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_r > 0 \right\}.$$

$\lambda \in \Lambda$ が $\lambda \in \Lambda_r$ のときに $\mathrm{rank}(\lambda) = r$ と定め，$|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ と定める．$\mathrm{rank}(\lambda)$ は 対応するアーベル p 群の直積因子の個数であり，$p^{|\lambda|}$ が群の位数となる．

命題 2.8 $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $\zeta_{G_\lambda}(s) = \zeta_{G_\mu}(s)$ と仮定すると次が成立する．
(1) $|\lambda| = |\mu|$ かつ $\mathrm{rank}(\lambda) = \mathrm{rank}(\mu)$.
(2) $\mathrm{rank}(\lambda) \leq 3$ ならば $\lambda = \mu$.

証明：(1) G_λ の位数 p の部分群の個数は $\mathrm{rank}(\lambda) = r$ とすると $\dfrac{p^r - 1}{p - 1}$ 個であるから，ゼータ関数が等しければ rank も一致する．
(2) は小川雄広の修士論文の結果である ([Og])．部分群の個数を λ を用いて表示する公式 (cf. [St]-§5.1) を用いて計算した．双対性から，位数のべき指数が $|\lambda|/2$ までを考えればよい．∎

最後に． この覚え書きでは，素朴な観察に終始したが，実は，アーベル p 群の部分群の数え上げの問題は，そう易しい問題ではなく，まともな研究対象になっている ([Bi], [Bu1], [Bu2])．$\lambda \in \Lambda$ の言葉で記述できるはずであろうが，未知のことも多い．$\zeta_{G_\lambda}(s)$ は $\mathrm{rank}(\lambda)$ によらず λ を定めると予想するが未解決である．一般の $\mathrm{rank}(\lambda)$ については素朴な計算だけではすまないと思われる．
また，アーベル p 群のゼータ関数は，その積分表示を通じて，GL_n の Eisenstein 級数の Fourier 係数の主要部分の p-part（正方行列の Siegel 特異級数) やある種の正方行列の局所密度に現れる ([St])．こちらの問題としても，ゼータ関数が群 (今の場合 $\lambda \in \Lambda$) を決定するかどうかは興味がある．

［参考文献］

[Km] K. Komatsu: On the adele rings and zeta-functions of algebraic number fields, *Kodai Math. J.* **1** (1978), 394–400.

[Bi] G. Birkhoff: Subgroups of abelian groups, *Proc. London. Math. Soc.* **38** (1934-5), 385–401.

[Bu1] L. M. Butler: A unimodality result in the enumeration of subgroups of a finite abelian group, *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), 771–775.

[Bu2] L. M. Butler: Subgroup lattices and symmetric functions, *Mem. Amer. Math. Soc.* **539** (1994).

[Og] T. Ogawa: 有限群のゼータ関数，早稲田大学教育学研究科修士論文（2013.7.）

[St] F. Sato: Fourier coefficients of Eisenstein series of GL_n, local densities of square matrices and subgroups of finite abelian groups, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **55** (2006), 77–95.