早稲田大学教育学部　学術研究（数学編）第55号　15〜21ページ，2007年２月


# Dirichlet級数とHardy空間

田中　純一

## 1.　緒言

$\{a(n)\}$ を複素数列とするとき

$$f(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}\,, \qquad s \;=\; \sigma + it\,, \tag{1}$$

を Dirichlet 級数と呼ぶ．この形の関数項の級数は解析数論への応用から P.G.L. Dirichlet(1839) によって初めて導入された．Dirichlet 級数には収束座標 (abscissa of convergence) と呼ばれる値 $\sigma_c\,(-\infty \le \sigma_c \le \infty)$ が定まり，半平面 $\sigma \;>\; \sigma_c$ を収束領域とし，その上の解析的な関数となる．そして多くの場合この収束領域を超えて解析接続ができる．また整級数とは異なり絶対収束する領域や一様収束する領域は個々の級数に依存して定まる．とくに $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$ が発散するとき，収束座標 $\sigma_c$ は次の式で与えられる：

$$\sigma_c \;=\; \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\,|\,a(1)\,+\cdots+\,a(n)\,|}{\log n}\,. \tag{2}$$

次に実軸 $\mathbf{R}$ 上の Hardy 空間を定義しよう．$H^\infty(dt/\pi(1+t^2))$ で上半平面 $\mathbf{R}^2_+$ 上の有界な解析関数の境界関数の全体をあらわす．そして $1 \le q < \infty$ に対して $H^q(dt/\pi(1+t^2))$ を $H^\infty(dt/\pi(1+t^2))$ の $L^q(dt/\pi(1+t^2))$ における閉包とする．また $\mathbf{R}^2_+$ 上の Poisson 核 $P_z$ は

$$P_z(t) \;=\; \frac{1}{\pi}\frac{v}{(u-t)^2+v^2}\,, \qquad z \;=\; u+iv\,,$$

となる．このとき $f(t) \in H^q(dt/\pi(1+t^2))$ と $P_{iv}$ との合成積

$$f(z) \;=\; f * P_{iv}(u) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,P_z(t)\,dt$$

が $f(t)$ の Poisson 積分となり，その $\mathbf{R}^2_+$ 上への解析的な拡張を与える．Fatou の定理により $f(t)$ は $f(z)$ の境界関数になるから，これらを互いに同一視して，$H^q(dt/\pi(1+t^2))$ を適宜 $\mathbf{R}^2_+$ 上の解析関数の族とみなす．

通常 Hardy 空間の理論は単位円板 $D$ 上で展開される．$D$ 上の Hardy 空間 $H^q(D), 1 \le q < \infty$, はその上の解析的な関数 $f(z)$ で

$$\|f\|_q^q \;=\; \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q\,d\theta \;<\; \infty$$

をみたす全体，また $H^\infty(D)$ は $D$ 上の有界な解析関数の全体と定義される．これらの空間に関する理論の構成は歴史的に古く [1] など多くの成書に詳述されている．

上記の $H^q(dt/\pi(1+t^2))$ は $\mathbf{R}^2_+$ を $D$ に写す一次写像 $z = (w-i)/(w+i)$ との合成によって $H^q(D)$ の関数を $\mathbf{R}^2_+$ 上の解析関数に写した境界関数の作る部分空間に他ならない．このとき $t = i(1+e^{i\theta})/(1-e^{i\theta})$ から

$$\frac{1}{2\pi}d\theta \;=\; \frac{1}{\pi}\frac{dt}{1+t^2}$$

となる．また $\mathbf{R}$ 上の Fourier 変換に関係して頻繁に用いられる Hardy 空間 $H^q(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^2_+$ で解析的な関数 $g$ で

$$\sup_{v>0}\int_{-\infty}^{\infty} |g(t+iv)|^q\,dt \;<\; \infty$$

をみたす全体と定義される．このとき $f(t) \in H^q(dt/\pi(1+t^2))$ となる必要十分条件は $f(t)/(t+i)^{\frac{2}{q}} \in H^q(\mathbf{R})$ となることが示される．

## 2. 収束領域の確定条件

この節では $f(s)$ を (1) における Dirichlet 級数とする．$f(s)$ が半平面 $\sigma > u$ で解析的のとき，それを $(u,0)$ を中心に 90 度回転させた $\mathbf{R}$ 上の関数 $t \to f(u-it)$ は上半平面 $\mathbf{R}^2_+$ へ解析的に拡張できる．この $t$ の関数が属する Hardy 空間 $H^q(dt/\pi(1+t^2))$, $2 \le q < \infty$, とその収束座標 $\sigma_c$ との関係を調べるのが主な目的である．まず $\mathbf{R}$ 上の関数

$$F(\lambda) \;=\; \sum_{\log n \le \lambda} a(n)$$

とおく．いま $F(\log n) = O(n^u)\,, u > 0$, とすると，(2) より $f(s)$ は $\sigma > u$ で収束することがわかる．また $\sigma_0 > \sigma_c$ のときは，ある $0<\delta<1$ に対して， $\sigma > \sigma_0$ で一様に $f(s) = O(|t|^\delta)$ となる ( [8, 9.14, 9.33] 参照)．したがって関数 $t \to f(\sigma - it)$ は $H^1(dt/\pi(1+t^2))$ に属する．

**定理 1.** $f(s)$ を (1) における Dirichlet 級数で $\sigma_c < \infty$ とする．ある $\sigma_0$ および $r \ge 2$ に対して，$f(s)$ は $\sigma > \sigma_0$ において解析的で

$$t \to f(\sigma - it) \;\in\; H^r(dt/\pi(1+t^2))$$

をみたすならば $f(s)$ は $\sigma > \sigma_0 + 1/r$ において収束する．すなわち $\sigma_0 + 1/r \ge \sigma_c$ となる．

**証明.** 係数 $a(n)$ を $a(n)/n^{\sigma_0}$ と取り直すと $\sigma_0 = 0$ で $\sum_{n=1}^\infty a(n)$ が発散すると仮定できる．これより $\sigma > 0$ が $t \to f(\sigma - it) \in H^r(dt/\pi(1+t^2))$ をみたすとき，$\sigma + 1/r \ge \sigma_c$ を示せば十分である．

まず $2 < r$ の場合を考えよう．$2 \le q < r$ となる任意の $q$ を定め，$1/q + 1/p = 1$ とする．このとき

$$|\sigma + it|^p \;=\; |\sigma + it|^{\frac{2p}{r}} \cdot |\sigma + it|^{p\left(1-\frac{2}{r}\right)}$$

と $r/p > 1$ から，Hölder の不等式によって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(\sigma+it)}{\sigma+it}\right|^p dt \le \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\sigma+it)|^r}{|\sigma+it|^2}\,dt\right\}^{\frac{p}{r}} \cdot \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |\sigma+it|^{\frac{-p(r-2)}{r-p}}\,dt\right\}^{\frac{r-p}{r}}.$$

が成り立つ．一方 $r > q = p/(p-1)$ を，$pr - r > p = 2p - p$ と変形し，$p(r-2)/(r-p) > 1$ が示される．そして最後の積分は収束し，また仮定から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\sigma+it)|^r}{|\sigma+it|^2}\,dt = \frac{\pi}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma-it)|^r\,P_{i\sigma}(t)\,dt < \infty$$

となることより，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(\sigma+it)}{\sigma+it}\right|^p dt < \infty \tag{3}$$

となる．一方 $t \to f(\sigma-it) \in H^2(dt/\pi(1+t^2))$ となるから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(\sigma-it)}{\sigma-it}\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(\sigma+it)}{\sigma+it}\right|^2 dt < \infty$$

となり，Paley-Wiener の定理を適用すると，ある $L^2(0,\infty)$ の関数 $G(\lambda)e^{-\lambda\sigma}$ に対して

$$\frac{f(\sigma-it)}{\sigma-it} = \int_0^{\infty} G(\lambda)e^{-\lambda(\sigma-it)}\,d\lambda$$

と表せる ([1, 11.5] 参照)．一方 Dirichlet 級数の一般論より $f(s)$ は $\sigma > \sigma_c + 1$ で絶対収束して ([8, 9.13] 参照)，このときの $\lambda \to e^{-\lambda\sigma}F(\lambda)$ の Fourier 変換は $f(\sigma+it)/(\sigma+it)$ となることがわかる．したがって $F(\lambda) = G(\lambda)$ となる．そこで (3) より Young-Hausdorff の定理を適用すると，次の式が成立する:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\sigma q}\,|F(\lambda)|^q\,d\lambda < \infty.$$

とくに $F(\lambda)$ は区間 $(\log n, \log(n+1))$ 上で定数だから，この式を変形して

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sigma q\log(n+1)}\,|F(\log n)|^q\,\{\log(n+1) - \log n\} < \infty$$

を得る．収束する級数の項は 0 に収束することから，簡単な計算で

$$F(\log n) = o(n^{\sigma+1/q}) \tag{4}$$

となる．したがって $q$ の任意性から $f(s)$ は $\sigma > 1/r$ で収束する．

また $r=2$ のときは，Plancherel の定理を利用すると (4) が $q=2$ として成り立つことが同様に示される．そして $f(s)$ は $\sigma > 1/2$ で収束することがわかる．　（証明終）

Dirichlet 級数の中で最も重要な例は $a(n)$ をすべて 1 として得られる Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \qquad \sigma > 1,$$

であろう．ここで $p$ は素数全体を動くとする．素因数分解の一意性から得られる上式の無限乗積を Euler 積と呼ぶ．$\zeta(s)$ は $s = 1$ を除いて全平面に解析接続され，また $s = 1$ で留数 1 の極を持つ．そして帯状領域 $0 < \sigma < 1$ にある $\zeta(s)$ の零点はすべて $\sigma = 1/2$ という直線上にあるというのが有名な Riemann 仮説である．また関数 $\zeta^{-1}(s)$ も Euler 積をもつ Dirichlet 級数で

$$\zeta^{-1}(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \;=\; \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \qquad \sigma > 1,$$

と表示される．ただし $\mu(n)$ は Möbius 関数 と呼ばれ，次のように定義される：

$$\mu(n) \;=\; \begin{cases} (-1)^k, & (n \text{ が相異なる } k \text{ 個の素数の積のとき}), \\ 1, & (n = 1 \text{ のとき}), \\ 0, & (\text{その他}). \end{cases}$$

とりわけ $\mu(n)$ の持つ性質 $|\mu(n)| \le 1$ および $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$ は特徴的である．

**定理 2.** $\sigma_0 \ge 1/2$ とするとき，下記の (a) ～ (c) は互いに同値である．

(a) Dirichlet 級数 $\zeta^{-1}(\sigma + it)$ は $\sigma > \sigma_0$ で収束する．

(b) $\sigma > \sigma_0$ のとき，$t \to \zeta^{-1}(\sigma - it) \in H^1(dt/\pi(1+t^2))$ となる．

(c) $\zeta(s)$ は $\sigma > \sigma_0$ で零点を持たない．

**証明.** (a) が成り立つとき $\zeta^{-1}(\sigma + it)$ は $\sigma > \sigma_0$ で解析的となる．いま $\sigma_1 > \sigma_0$ とすると任意の $\epsilon > 0$ に対して，一様に

$$\zeta^{-1}(s) \;=\; 0(|t|^{1-(\sigma_1-\sigma_0)+\epsilon}), \qquad \sigma \ge \sigma_1,$$

が示される ([8, 9.33] 参照)．したがって

$$\sup_{\sigma \ge \sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta^{-1}(\sigma - it)| \frac{1}{1+t^2}\, dt \;<\; \infty$$

となり (b) が成立する．

(b) を仮定すれば $t \to \zeta^{-1}(\sigma - it)$ は $\mathbf{R}^2_+$ 上で解析的となり極を持ち得ない．この性質を言い換えて (c) を得る．

(c) が成立すると Borel-Carathéodory の定理と Hadamard の 3 円定理の応用から，適当な $0 < a < 1$ および $0 < A < \infty$ に対して，一様に

$$|\log \zeta(s)| \;\le\; A(\log|t|)^{1-a}, \quad \sigma \ge \sigma_1 (> \sigma_0)$$

となることが示される．そして簡単な計算で $|\zeta^{-1}(\sigma - it)| \leq |t|^{\epsilon}$ が $\sigma \geq \sigma_1$ で一様に成り立つ．これより $t \to \zeta^{-1}(\sigma - it) \in H^r(dt/\pi(1+t^2))$ がすべての $2 < r < \infty$ に対して成り立ち，定理 1 を適用して (a) を得る．　（証明終）

(a) と (c) の $\sigma_0 = 1/2$ のときの同値性は Littlewood による Riemann 仮説の言い換えである．かつて興味を持ったのはこの結果と L. Carleson による「$L^2-$ 関数の Fourier 級数は概収束する」という定理との類似性だった ($n^{-it} = e^{-it\log n}$ を $e^{-itn}$ と置きかえてみよ）．そんな問題を取り止めもなく考えていたのは十数年前のことだったろうか．時間の経過とともにノートも散逸し，無益に試みた方法もあらかたは忘れてしまったが，最近同氏の Abel 賞受賞の報に接し，当時のそんな着想を懐かしく思い出した．多分このたぐいの収束問題にはとてつもなく難しい背景があり，たまたま円周上の Fourier 級数の場合は解けるが Dirichlet 級数ではまず不可能だということなのだろう．ちなみに Carleson 氏の Abel 賞受賞の解説と業績紹介は

http://www.abelprisen.no/en/

にある．もちろん上述の Lusin 予想の解決 (1966) がその受賞の主要理由である．

## 3. 独立な確率変数列の応用

以下では Rademacher 関数を利用して得られる Euler 積をもつ Dirichlet 級数のクラスを調べる．そして定理 1 を利用して Wintner [10] の主要結果を導いてみよう．

Rademacher 関数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ は $[0,1]$ 上の関数で

$$\varphi_n(x) = \mathrm{sgn}(\sin(2^n \pi x)), \quad x \in [0,1],$$

で与えられる．いま $\mathfrak{R}$ を $[0,1]$ における 2 進有理数 (すなわち $k/2^{\ell}$ の形の有理数）全体とする．このとき $x \in [0,1] \setminus \mathfrak{R}$ を 2 進展開すると

$$x = 0.\theta_1 \theta_2 \theta_3 \cdots \theta_n \cdots, \qquad \theta_n \in \{0,1\},$$

と一意的に表せる．さらに $x \in \mathfrak{R}$ での 2 進展開も，この表示である番号から先はすべて 0 となる表記に統一する．とくに $\mathrm{sgn}(0) = 0$ と定めると，$x \in [0,1]$ に対して $\varphi_n(x) = 1 - 2\theta_n$ がわかる．また $m$ を単位区間 $[0,1]$ 上の Lebesgue 測度とするとき，$\{\varphi_n(x)\}$ は確率空間 $([0,1], m)$ 上の独立な確率変数列となる．なお Rademacher 関数の基本的な性質は [1, Appendix 1] が簡便である．以後の議論でもその中のいくつかの定理を引用する．

いま $\{p(n)\}$ を素数全体の作る増加列とし

$$\epsilon_p = \epsilon_{p(n)}(x) = \varphi_n(x)$$

とする．このとき すべての $x \in [0,1]$ に対して $\{\epsilon_p(n)\}$ が一意的に決まる．それに対応する Euler 積をもつ Dirichlet 級数

$$\zeta_x^{-1}(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_x(n)}{n^s} \;=\; \prod_p \left(1 + \frac{\epsilon_p}{p^s}\right) \tag{5}$$

を考える．係数 $\mu_x(n)$ は Möbius 関数と類似の特徴を持ち，この Dirichlet 級数は領域 $\sigma > 1$ で収束するが，加えて次の結果が成り立つ．

**定理 3.** $m - a.e.\, x \in [0,1]$ に対して，Dirichlet 級数 (5) は $\sigma > 1/2$ で収束する．またその Euler 積も収束し $\sigma > 1/2$ で零点を持たない．

**証明.** いま $u > 1/2$ を固定する．$\log(1+z)$ の $|z| < 1$ での Taylor 展開を考えると

$$\left| \log\left(1 + \frac{\epsilon_p}{p^s}\right) - \frac{\epsilon_p}{p^s} \right| \;\le\; \frac{3}{p^{2\sigma}}\,, \qquad \sigma \;>\; 1/2\,,$$

がわかる．したがって

$$\prod_p \left(1 + \frac{\epsilon_p}{p^s}\right) \;=\; \exp\left\{ \sum_p \log\left(1 + \frac{\epsilon_p}{p^s}\right) \right\}$$

より，ある絶対収束する Dirichlet 級数 $H_x(s)$ が定まって

$$\zeta_x^{-1}(s) \;=\; \exp\left\{ \sum_p \frac{\epsilon_p}{p^s} \right\} \cdot \exp\, H_x(s) \tag{6}$$

と表せる．また $t \to H_x(\sigma - it) \in H^\infty(dt/\pi(1+t^2))$ となる．そして

$$F_u(x,t) \;=\; \sum_p \frac{\epsilon_p}{p^{u-it}}\,, \qquad (x,t) \in [0,1] \times \mathbf{R}\,,$$

と置き [1, Theorem A.1] を適用すると，各 $t \in \mathbf{R}$ に対して級数 $F_u(x,t)$ は $m - a.e.\, x \in [0,1]$ で収束する．これより Dirichlet 級数

$$\sum_p \frac{\epsilon_p}{p^s} \;+\; H_x(s) \qquad \sigma \;>\; u$$

が収束するから，$\sigma > 1/2$ で (5) の Euler 積は収束し零点を持たないことがわかる．

さらに Khinchin の不等式 [1, Theorem A.2] より

$$\int_0^1 |F_u(x,t)|^k \, dm(x) \;\le\; \left(\frac{k}{2} + 1\right)^{\frac{k}{2}} A(u)^k\,, \qquad k = 1, 2, \cdots\,,$$

が成り立つ．ここで

$$A(u) \;=\; \left( \sum_p \frac{1}{p^{2u}} \right)^{\frac{1}{2}} \;<\; \infty$$

とする．いま実数 $\lambda$ を定めると

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{i\sigma}(t)\, dt \int_0^1 |\exp\{\lambda F_u(x,t)\}|\, dm(x) \quad \le \quad \int_{-\infty}^{\infty} P_{i\sigma}(t)\, dt \int_0^1 \exp\{|\lambda F_u(x,t)|\}\, dm(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} P_{i\sigma}(t)\,dt \int_0^1 |F_u(x,t)|^k\,dm(x) \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{k!} \left(\frac{k}{2}+1\right)^{\frac{k}{2}} A(u)^k \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

となる．Fubini の定理から，$m-a.e.\, x \in [0,1]$ を定めれば，$t$ の関数

$$
\exp\{\lambda F_u(x,t)\} = \exp\left\{\lambda \sum_p \frac{\epsilon_p}{p^u} e^{it\log n}\right\}
$$

は すべての $\lambda$ にたいして $H^1(dt/\pi(1+t^2))$ に属することがわかる．とくに $q = \lambda \ge 1$ と置いて $t \to \exp\{F_u(x,t)\} \in H^q(dt/\pi(1+t^2))$ を得る．したがって (6) より $t \to \zeta_x^{-1}(u-it) \in H^q(dt/\pi(1+t^2))$ となり定理 1 から Dirichlet 級数 (5) は $\sigma > 1/2$ で収束する．　（証明終）

通常は解析学や確率論では測度零をなす例外点は考察の対象にはしない．しかし定理 3 の主張が測度零の集合 $\mathfrak{R}$ の点でも成り立つか否かが，$\zeta^{-1}(s)$ が $\sigma > 1/2$ で収束するかどうかの判定そのものである．そしてこれは Riemann 仮説の証明と同値だった.「この命題はほとんどすべての点で成立する」と「命題は与えられたこの点で成立する」という 2 つの主張には著しい隔たりがある好例であろう．そして捨てさられる測度零の集合の中に埋没してしまう重要な主張は存外に多いのではなかろうか.

上記と類似の方法でゼータ関数を無限次元トーラス上へ拡張できる．[7] では Haar 測度をゼータ関数の無限遠点近くでの挙動を測る一つの尺度として利用し，位相群上の調和解析を用いて平均値定理と Lindelöf 仮説を考察している．とくにその仮説と同値な命題の弱い意味での証明を与えている．

## 参考文献


[1] P. Duren, *Theory of $H^p$ spaces,* Academic Press, New York and London, 1970.
[2] H. Helson, *Convergent Dirichlet series,* Ark. För Mat. 4, (1962), 501-510.
[3] H. Helson, *Compact groups and Dirichlet series,* Ark. För Mat. 8, (1969), 139-143.
[4] J.-P. Kahane, *Sur les sèries de Dirichlet* $\sum_1^\infty \pm n^{-s}$ , C. R. Acad. Sc. Paris 276, (1973), 739-742.
[5] 鹿野　健　他, リーマン予想, 日本評論社, 1991.
[6] J. Tanaka, *Extensin of almost periodic functions and analyticity on flows,* Amer. Math. Soc. Transl., (2), 204, (2001), 63-80.
[7] J. Tanaka, *Dirichlet series induced by the Riemann zeta-function,* pre-print.
[8] E.C. Titchmarsh, *The theory of functions,* 2nd ed. Oxford University Press, New York, 1939.
[9] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function,* (revised by D. R. Heath-Brown), Oxford University Press, New York, 1988.
[10] A. Wintner, *Random factorizations and Riemann hypothesis,* Duke Math J. 11 (1944), 267-275.


(2006 年 8 月 28 日提出)