von Staudt-Clausen の定理の q 類似について

鎌野　健

1.　はじめに

本稿では, Tsumura [8] によって実数体上定義された q-Bernoulli 数を, p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の完備化である $\mathbb{C}_p$ 上で考え, von Staudt-Clausen の定理の q 類似を与える．古典的な Bernoulli 数 B_n $(n \geq 0)$ は

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \tag{1.1}$$

で定義される有理数である．Bernoulli 数 B_n の分母を完全に決定する次の定理が知られている．

von Staudt-Clausen の定理.　2 以上の偶数 n に対して,

$$B_n + \sum_{\substack{p:\text{素数} \\ (p-1)|n}} \frac{1}{p} \tag{1.2}$$

は整数である．

B_n は有理数なので, 式 (1.2) が整数であることは，全ての素数 p に対して

$$\begin{aligned} &(p-1) \nmid n \text{ のとき } \ |B_n|_p \leq 1, \\ &(p-1) | n \text{ のとき } \ \left| B_n + \frac{1}{p} \right|_p \leq 1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

が成り立つことと同値である．ただし, $|\cdot|_p$ は $|p|_p = p^{-1}$ となるような p 進絶対値を表す.

$\mathbb{Q}$ 上の p 進絶対値 $|\cdot|_p$ は $\mathbb{C}_p$ まで自然に延長される．ここではそれも同じ記号を使って表すことにする. $q \in \mathbb{C}_p$ が $0 < |q-1|_p < p^{-1/(p-1)}$ を満たすとき, 整数 $n \geq 0$ に対して p 進 q-Bernoulli 数 $\bar{B}_n(q) \in \mathbb{C}_p$ を次のように定義する (§2 参照).

$$\bar{B}_n(q) = \frac{1}{(1-q)^{n-1}} \left(-\frac{1}{\log q} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{j}{1-q^j} \right). \tag{1.4}$$

このとき, $\lim_{q \to 1} \bar{B}_n(q) = B_n$ となることが知られている.

この $\bar{B}_n(q)$ について, von Staudt-Clausen の定理の類似である次の定理を示すことが本稿の目的である．この定理は (1.3) 式の類似になっており, $\lim_{q \to 1} \bar{B}_n(q) = B_n$ なので, q を 1 に近づけることにより, 古典的な von Staudt-Clausen の定理が得られる.

主定理. p を素数とする. $q \in \mathbb{C}_p$, $0 < |q-1|_p < p^{-1/(p-1)}$ に対して, 次の不等式が成立する.

(i) $p \neq 2$ に対して,

$$(p-1) \nmid n \text{ のとき } \left|\bar{B}_n(q)\right|_p \leq \max\{p|q-1|_p,\, 1\},$$
$$(p-1)|n \text{ のとき } \left|\bar{B}_n(q) + \frac{q-1}{\log q} \cdot \frac{1}{p}\right|_p \leq \max\{p|q-1|_p,\, 1\}.$$

(ii) $p = 2$ に対して,

$$n \text{ が偶数のとき } \left|\bar{B}_n(q) + \frac{q-1}{\log q} \cdot \frac{1}{2}\right|_2 \leq 1,$$
$$n \text{ が奇数のとき } \left|\bar{B}_n(q)\right|_2 \leq 2.$$

特に, 主定理で q の範囲を制限すると, 次の系を得る.

系. p を素数とする. $q \in \mathbb{C}_p$ に対して, 次の不等式が成立する.

(i) $p \neq 2$, $0 < |q-1|_p \leq p^{-1}$ に対して,

$$(p-1) \nmid n \text{ のとき } \left|\bar{B}_n(q)\right|_p \leq 1,$$
$$(p-1)|n \text{ のとき } \left|\bar{B}_n(q) + \frac{1}{p}\right|_p \leq 1.$$

(ii) $p = 2$, $0 < |q-1|_2 \leq 1/4$ に対して,

$$n \text{ が偶数のとき } \left|\bar{B}_n(q) + \frac{1}{2}\right|_2 \leq 1,$$
$$n \text{ が奇数のとき } \left|\bar{B}_n(q)\right|_2 \leq 2.$$

$0 < q < 1$ なる実数値 q に対して, Tsumura [8] が定義した q-Bernoulli 数 $B_n(q)$ は (1.4) と同じ式で与えられる:

$$B_n(q) = \frac{1}{(1-q)^{n-1}} \left(-\frac{1}{\log q} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{j}{1-q^j} \right). \tag{1.5}$$

この q-Bernoulli 数は, 代数体に付随したある種の Dirichlet 級数の q 類似を考えるために導入されたもので, Carlitz [1] が定義した q-Bernoulli 数を修正したものである.

一方, 古典的な Bernoulli 数は, リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の負の整数点での値に現れていた:

$$\zeta(1-n) = (-1)^{n+1} \frac{B_n}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.6}$$

Kaneko-Kurokawa-Wakayama [3] は, $0 < q < 1$ なる実数に対し, $\zeta(s)$ の q 類似である $\zeta_q(s)$ を

$$\zeta_q(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n(s-1)}}{[n]_q^s}\qquad (s\in\mathbb{C},\ \Re(s)>1,\ 0<q<1). \tag{1.7}$$

で導入した．ここで, $[n]_q$ は $(1-q^n)/(1-q)$ を表す．関数 $\zeta_q(s)$ は全 s 平面に有理型関数として解析接続され, 負の整数点では

$$\zeta_q(1-n)=(-1)^{n+1}\frac{B_n(q)}{n}\qquad (n=1,2,\ldots) \tag{1.8}$$

となることが知られている．式 (1.8) は式 (1.6) の類似であり, この意味でも $B_n(q)$ や $\bar{B}_n(q)$ は古典的な Bernoulli 数のよい q 類似とみなせる．

2. q-Bernoulli 数の p 進積分表示

この節では, q-Bernoulli 数 $\bar{B}_n(q)$ を定義し, その p 進積分表示を与える．素数 p に対して $\mathbb{Z}_p$ で p 進整数環を表し, $\mathbb{C}_p$ 上の対数関数 log, 指数関数 exp を収束級数

$$\log(1-z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\qquad (|z|_p<1)$$

$$\exp z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}\qquad (|z|_p<p^{-1/(p-1)})$$

で定義する．$|z|_p<p^{-1/(p-1)}$ のとき, $|\log(1-z)|_p=|z|_p$, $|\exp z-1|_p=|z|_p$ が知られている．しばらくの間 $q\in\mathbb{C}_p$ は $0<|q-1|_p<p^{-1/(p-1)}$ を満たすと仮定し, このとき p 進 q-Bernoulli 数を次のように定義する:

$$\bar{B}_0(q)=\frac{q-1}{\log q},\quad \bar{B}_n(q)=\frac{1}{(1-q)^{n-1}}\left(-\frac{1}{\log q}+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{j}{1-q^j}\right)\quad (n\geq 1). \tag{2.1}$$

このとき, $\lim_{q\to 1}\bar{B}_n(q)=B_n$ が知られている．

また $x\in\mathbb{Z}_p$ に対して $q^x=\exp(x\log q)$ とおき, 記号

$$[x]_q=\frac{q^x-1}{q-1} \tag{2.2}$$

を用いる．定義から $\lim_{q\to1}[x]_q=x$ が確かめられる．また $\left|[x]_q\right|_p=|x|_p$ である．なぜなら,

$$\left|[x]_q\right|_p=\frac{|q^x-1|_p}{|q-1|_p}=\frac{|x\log q|_p}{|q-1|_p}=\frac{|x|_p|q-1|_p}{|q-1|_p}=|x|_p$$

だからである．関数 $f:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{C}_p$ が strictly differentiable であるとは, 任意の $a\in\mathbb{Z}_p$ に対して

$$\Phi f(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\qquad (x,y\in\mathbb{Z}_p,\ x\neq y)$$

が (x,y) が (a,a) に近づくときの極限値を持つことをいう (cf. [6, p.218])．関数 f が strictly differentiable のとき, f の p 進積分 (Volkenborn 積分) を

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(z)dz = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{p^N} \sum_{a=0}^{p^N-1} f(a) \tag{2.3}$$

と定義する (e.g. [6, p.264]). この積分について, 次の補題が知られている ([2][4]).

補題 2.1. $q \in \mathbb{C}_p$, $0 < |q-1|_p < p^{-1/(p-1)}$ とする. 全ての整数 $n \geq 0$ について,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} [z]_q^n dz = \frac{\log q}{q-1} \cdot \bar{B}_n(q) \tag{2.4}$$

が成立する.

注意 2.2. 補題 2.1 で q を 1 に近づけることにより, 知られている等式 (e.g. [6, p.270])

$$\int_{\mathbb{Z}_p} z^n dz = B_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

が得られる.

3. 主定理の証明

この節では, 主定理の証明を行う. 証明は, [7, Theorem 56.2] と同じ手法でなされるが, そのために次の補題を示すことから始める.

補題 3.1. p を奇素数, $q \in \mathbb{C}_p$ は $0 < |q-1|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$ を満たすとする. このとき, $\left|\sum_{j=0}^{p-1} [j]_q\right|_p \leq \max\{|q-1|_p, p^{-1}\}$ が成立する.

証明. まず, $[0]_q = 0$, $[1]_q = 1$ である. 2 以上の整数 j に対しては

$$\begin{aligned}
[j]_q - j &= \frac{(q-1+1)^j - 1}{q-1} - j \\
&= \frac{1}{q-1}\left(\sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} (q-1)^l - 1 - j(q-1)\right) \\
&= \sum_{l=2}^{j} \binom{j}{l} (q-1)^{l-1}
\end{aligned}$$

となるので, 0 以上の整数 j に対して

$$|[j]_q - j|_p \leq |q-1|_p \tag{3.1}$$

が成り立つ. 今, $p \neq 2$ であるから,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=0}^{p-1} [j]_q\right|_p &= \left|\sum_{j=0}^{p-1} ([j]_q - j) + \frac{p(p-1)}{2}\right|_p \\
&\leq \max\{|q-1|_p, p^{-1}\}
\end{aligned}$$

となり, 補題が示された. □

命題 3.2. $q \in \mathbb{C}_p$, $0 < |q-1| < p^{-\frac{1}{p-1}}$ と整数 $n \geq 1$ に対して, 次の不等式が成立する.

$$\left| \frac{\log q}{q-1} \bar{B}_n(q) - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p-1} [i]_q^n \right|_p \leq \begin{cases} 1 & (p \neq 2 \text{ または } p = 2 \text{ で } n \text{ が偶数}) \\ 2 & (p = 2 \text{ で } n \text{ が奇数}) \end{cases} \tag{3.2}$$

証明. 整数 $k \geq 1$ に対して,

$$R_n(k) = \frac{1}{p^k}([0]_q^n + [1]_q^n + \cdots + [p^k - 1]_q^n) \tag{3.3}$$

とおく. 補題 2.1 より, $\lim_{k\to\infty} R_n(k) = \frac{\log q}{q-1} \cdot \bar{B}_n(q)$ が成り立つ. このとき

$$\begin{aligned} R_n(k+1) =& p^{-(k+1)}([0]_q^n + [1]_q^n + \cdots + [p^{k+1} - 1]_q^n) \\ =& p^{-(k+1)} \sum_{i=0}^{p^k-1} \sum_{j=0}^{p-1} [i + jp^k]_q^n \\ =& p^{-(k+1)} \sum_{i=0}^{p^k-1} \sum_{j=0}^{p-1} ([i]_q + q^i [jp^k]_q)^n \\ =& p^{-(k+1)} \sum_{i=0}^{p^k-1} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} [i]_q^{n-l} q^{il} [jp^k]_q^l \\ =& R_n(k) + p^{-(k+1)} \sum_{i=0}^{p^k-1} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} [i]_q^{n-l} q^{il} [p^k]_q^l [j]_{q^{p^k}}^l \end{aligned}$$

である. $|[x]_q|_p = |x|_p$ であるから, $l \geq 2$ に対して

$$\left| p^{-(k+1)} \sum_{j=0}^{p-1} [p^k]_q^l [j]_{q^{p^k}}^l \right|_p \leq 1 \tag{3.4}$$

となる. まず $p \neq 2$ に対して, 不等式 (3.4) は $l = 1$ でも成り立つ. 実際, $|q^p - 1|_p \leq p^{-1}$ なので, 補題 3.1 から従う. よって, $p \neq 2$ に対して $|R_n(k+1) - R_n(k)|_p \leq 1$ である. 次に, $p = 2$ のときを考える. n が偶数のとき, $\left|\binom{n}{1}\right|_2 = |n|_2 \leq 1/2$ であるから

$$\left| \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{i=0}^{2^k-1} \sum_{j=0}^{1} \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} [i]_q^{n-l} q^{il} [2^k]_q^l [j]_{q^{2^k}}^l \right|_2 \leq \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数}) \\ 2 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

である. よって

$$|R_n(k+1) - R_n(k)|_2 \leq \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数}) \\ 2 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

となる. 従って, $k \geq 1$ に対して

$$|R_n(k)-R_n(1)|_p \leq \begin{cases} 1 & (p \neq 2 \text{ または } p=2 \text{ で } n \text{ が偶数}) \\ 2 & (p=2 \text{ で } n \text{ が奇数}) \end{cases} \tag{3.5}$$

が成り立つ. k を無限大にする極限をとることにより, 命題の主張を得る. □

さて, 主定理の証明に移る.

主定理の証明. (i) $\theta \in \mathbb{Z}_p$ を 1 の原始 $(p-1)$ 乗根とする. 集合 $\{\theta^i \pmod p\}_{1\leq i\leq p-1}$ は, $\{1,2,\dots,p-1 \pmod p\}$ と一致するので, (3.1) 式より

$$\left|([1]_q^n+[2]_q^n+\cdots+[p-1]_q^n)-(\theta^n+\theta^{2n}+\cdots+\theta^{(p-1)n})\right|_p \leq \max\{|q-1|_p,\, p^{-1}\}$$

となる. $\sum_{i=1}^{p-1}\theta^{ni}$ は, $(p-1)\nmid n$ のとき 0, $(p-1)|n$ のとき $p-1$ なので,

$$\begin{cases} (p-1)\nmid n \text{ のとき} & \left|[1]_q^n+[2]_q^n+\cdots+[p-1]_q^n\right|_p \leq \max\{|q-1|_p,\, p^{-1}\} \\ (p-1)|n \text{ のとき} & \left|([1]_q^n+[2]_q^n+\cdots+[p-1]_q^n)-(p-1)\right|_p \leq \max\{|q-1|_p,\, p^{-1}\} \end{cases} \tag{3.6}$$

を得る. さらに $|(q-1)/\log q|_p=1$ なので,

$$\begin{cases} (p-1)\nmid n \text{ のとき} & \left|\frac{q-1}{\log q}\cdot\frac{1}{p}([1]_q^n+[2]_q^n+\cdots+[p-1]_q^n)\right|_p \leq \max\{p|q-1|_p,\, 1,\} \\ (p-1)|n \text{ のとき} & \left|\frac{q-1}{\log q}\cdot\frac{1}{p}([1]_q^n+[2]_q^n+\cdots+[p-1]_q^n)+\frac{q-1}{\log q}\cdot\frac{1}{p}\right|_p \leq \max\{p|q-1|_p,\, 1,\} \end{cases}$$

となる. よって命題 3.2 より,

$$\begin{cases} (p-1)\nmid n \text{ のとき} & \left|\bar{B}_n(q)\right|_p \leq \max\{p|q-1|_p,\, 1,\} \\ (p-1)|n \text{ のとき} & \left|\bar{B}_n(q)+\frac{q-1}{\log q}\cdot\frac{1}{p}\right|_p \leq \max\{p|q-1|_p,\, 1,\} \end{cases}$$

を得る. 以上より主張 (i) は証明された.

(ii) 命題 3.2 より

$$\left|\frac{\log q}{q-1}\bar{B}_n(q)-\frac{1}{2}\right|_2 \leq \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数}) \\ 2 & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \tag{3.7}$$

であるから

$$\left|\bar{B}_n(q)+\frac{q-1}{\log q}\cdot\frac{1}{2}\right|_2 = \left|\frac{q-1}{\log q}\right|_2 \left|\left(\frac{\log q}{q-1}\bar{B}_n(q)-\frac{1}{2}\right)+1\right|_2 \leq \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数}) \\ 2 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

である. $\left|\bar{B}_n(q)+\frac{q-1}{\log q}\cdot\frac{1}{2}\right|_2 \leq 2$ ならば $|\bar{B}_n(q)|_2 \leq 2$ なので, 主張 (ii) も証明された. □

系の証明. 系の条件のとき, $\max\{p|q-1|_p, 1\} = 1$ なので, $p \neq 2$ かつ $(p-1)|n$ の場合と $p = 2$ かつ n が偶数の場合のみ考えればよい. このときすべての素数 p について

$$\left|1 - \frac{q-1}{\log q}\right|_p \leq p^{-1} \tag{3.8}$$

が成立する. $p \neq 2$ かつ $(p-1)|n$ のとき, 主定理 (i) と (3.8) より

$$\begin{aligned}\left|\bar{B}_n(q) + \frac{1}{p}\right|_p &= \left|\left(\bar{B}_n(q) + \frac{q-1}{\log q}\cdot\frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{q-1}{\log q}\right)\right|_p \\ &\leq \max\{p|q-1|_p, 1\} = 1\end{aligned}$$

であるので, 系 (i) が成立する. $p = 2$ かつ n が偶数の場合も, 主定理 (ii) と (3.8) より,

$$\left|\bar{B}_n(q) + \frac{1}{2}\right|_2 = \left|\left(\bar{B}_n(q) + \frac{q-1}{\log q}\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q-1}{\log q}\right)\right|_2 \leq 1.$$

よって系 (ii) も示された. □

謝辞. セミナーにて熱心に話を聞いて頂いた広中由美子先生と遠藤幹彦先生, 助言と激励の言葉を頂いた星明考氏, そして研究生活を支えて下さった教育学部数学教室の皆様に心より感謝致します.

参考文献

[1] L. Carlitz : *q-Bernoulli numbers and polynomials*, Duke Math. J. **15** (1948), 987–1000.
[2] K. Kamano : *A q-analogue of the von Staudt-Clausen theorem*, preprint.
[3] M. Kaneko, N. Kurokawa and M. Wakayama : *A variation of Euler's approach to values of the Riemann's zeta function*, Kyushu J. Math. **57** (2003), 175–192.
[4] T. Kim : *On explicit formulas of p-adic q-L-functions*, Kyushu J. Math. **48** (1994), 73–86.
[5] T. Kim : *On a q-analogue of the p-adic log gamma functions and related integrals*, J. Number Theory **76** (1999), 320–329.
[6] Alain M. Robert : A couse in p-adic analysis, GTM **198**, 2000.
[7] W. H. Schikhof : Ultrametric calculus, Cambridge University Press, 1984.
[8] H. Tsumura : *A note on q-analogues of the Dirichlet series and q-Bernoulli numbers*, J. Number Theory **39** (1991), 251–256.