多重円板環と流れ

（ **Helson** 教授を悼む ）

田　中　純　一

1．序

今年（2010 年）初め恩師であり親しい友人でもあった Henry Helson 氏（U.C. Berkeley) を亡くした．30 年以上も解析学の共通の分野を開拓してきた同志だった．そして 6 月末に知人の D. Sarason 氏を通じ AMS Notices の Henry への追悼文を依頼された．膨大な量の Henry からの手紙とメールを繰りながらの作業は痛ましくもあり辛かった．そして昨年秋の彼との最後のやり取りを思い出し，その追悼文をこんな段落で結んだ：

> Although I had no chance to visit Berkeley again after that, we became close friends, keeping in touch until his death. Henry was a good correspondent and a masterly writer. After discussing mathematical ideas, he usually wrote about the recent situation of him and his family. I remember how he was delighted when his tender for a fine old Italian instrument was accepted (he was a well-known violinist) and how he was happy when his elder son David got married to an English lady in London. He also reported his regrets when it became too hard to continue making wine by himself.
>
> Last autumn, in connection with Rudin's autobiography [10], we corresponded about polydisc algebras. The closed subalgebra of $H^\infty(\mathbf{R})$ obtained by restricting $A(\mathbf{T}^2)$ to one orbit is the simplest one for which the corona theorem fails. A cocycle argument provides easily the fact that an entire inner function in $A(\mathbf{T}^n)$ is a monomial (the theorem of Bojanic and Stoll), since it gives rise to a cocycle of the form $\exp(i\lambda t)$, a weight at infinity.
>
> At the end of last year, I sent seasons greeting as usual, together with my new idea to attack the corona problem on polydiscs, depending on tensor products. However, I had no answer from him, and his poor health lay heavily on my mind.
>
> Then, early in the new year, I received the sad news from Hasumi and Nadkarni one after another.

I feel so lucky to have met such a first-rate mind at an early stage of my career and to have received his affectionate interest in my research. He will be greatly missed by everyone who has known him.

以下ではここで触れた多重円板環 (polydisc algebra) $A(\mathbf{T}^n)$ に関する 2 つの命題を解説したい．数学についての Henry との最後の通信の記録である．

2. 準備とある同型表現

集合 U および $\mathbf{T}$ をおのおの複素平面 $\mathbf{C}$ における単位開円板 $U = \{z; |z| < 1\}$ と単位円周 $\mathbf{T} = \{z; |z| = 1\}$ とする．自然数 n に対し，単位多重円板と輪環面を U^n および $\mathbf{T}^n$ と書く．多重円板環 (polydisc algebra) $A(U^n)$ は U^n の閉包 $\overline{U}^n$ で連続で U^n で解析的な函数全体の作る函数環と定義する．特に $A(U) = A(U^1)$ は円板環（disc algebra) と呼ばれ函数環論における基本的な実例の一つである．全ての多変数解析函数はその定義域の各点において適当な変数変更をすれば $A(U^n)$ の元とみなせる．したがってそれらの局所的な性質を調べるとき $A(U^n)$ は基本的な役割を果たす．Poisson 積分表示と最大値の原理から $A(U^n)$ はその $\mathbf{T}^n$ への制限 $A(\mathbf{T}^n)$ と同一視される．同様に $H^\infty(U^n)$ で U^n 上で有界な解析函数の全体とする．このとき Fatou の定理により函数環 $H^\infty(U^n)$ はその境界値函数全体が作る函数環 $H^\infty(\mathbf{T}^n)$ と同一視できる；すなわち

$$\|f\|_\infty \;=\; \sup_{z\in U^n} |f(z)| \;=\; \text{ess.}\sup_{w\in \mathbf{T}^n} |f(w)|, \quad f \in H^\infty(U^n),$$

が成立する．

単位元を持つ可換 Banach 環 B 上の複素準同型の全体 $\mathfrak{M}(B)$ は B の双対空間の単位球に含まれ弱$-*$位相でコンパクトとなる．各複素準同型にはある極大イデアルが対応することから $\mathfrak{M}(B)$ は極大イデアル空間と呼ばれる．

いま $U^n \ni z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ に対して，

$$\phi_z(f) \;=\; f(z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad f \in H^\infty(U^n),$$

とすると ϕ_z は $H^\infty(U^n)$ 上の複素準同型となり，U^n は極大イデアル空間 $\mathfrak{M}\left(H^\infty(U^n)\right)$ の（開）部分集合とみなせる．コロナ問題は U^n は $\mathfrak{M}\left(H^\infty(U^n)\right)$ で稠密か否かの判定をを問う．この問題は 1941 年に $n = 1$ の場合に角谷静夫によって提示され 1962 年に L. Carleson よって肯定的に解決された．単位円板 U を太陽にその縁 (fringe) を日食時のコロナに見立てた命名であろう．そして $n \geq 2$ のときのコロナ問題は多変数解析函数論における著名な未解決問題の一つである（かつてドイツの著名な学術誌にこの問題の誤った証明が掲載された．それにまつわる面白い逸話が [10, Chapter 23] にある）．

$\mathbf{T}^n$ はよく知られたコンパクトな可換アーベル群で，その双対群は整数群 $\mathbf{Z}$ の積集合 $\mathbf{Z}^n$ となる．以下ではこれらの性質を用い $\mathbf{T}^n$ 上にエルゴード的な流れを定義する．そしてその軌道上に $A(\mathbf{T}^n)$ を制

限して得られる実軸 $\mathbf{R}$ 上の函数環について考察する．いま $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ を一次独立な 正数の集合とする, すなわち, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{Z}$ に対して

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_n\alpha_n \;=\; 0$$

は $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 0$ のときに限るとする．$\mathbf{T}^n \ni w = (e^{\theta_1}, \ldots, e^{\theta_n})$ に対して，

$$T_t w \;=\; (e^{(\theta_1+\alpha_1 t)}, \ldots, e^{(\theta_n+\alpha_n t)}) \;=\; (\theta_1+\alpha_1 t, \ldots, (\theta_n+\alpha_n t)) \quad (\mathrm{mod.}\ 2\pi)$$

で位相同型の 1 − 係数群を定義すると $(\mathbf{T}^n, \{T_t\}_{t\in\mathbf{R}})$ は強エルゴード的な流れ (strictly ergodic flow) となる．このとき $\mathbf{T}^n$ 上の正規 Lebesgue 測度,

$$dm_n \;=\; \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n d\theta_1, \ldots, d\theta_n\,,$$

が唯一の不変測度となる．いま $\mathbf{T}^n$ の元 e_t を $e_t = (e^{i\alpha_1 t}, \ldots, e^{i\alpha_n t})$ と置くと $t \to e_t$ は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{T}^n$ の中への同型写像となる．そして

$$T_t w \;=\; w + e_t\,, \qquad w \in \mathbf{T}^n$$

と書ける．このとき $1 = (1, \ldots, 1)$ の 軌道 $\mathcal{O}(1) = \{e_t; t \in \mathbf{R}\}$ は $\mathbf{T}^n$ で稠密な部分群となる．したがって他の軌道 $\mathcal{O}(w)$ はこの群による剰余元とみなせる．また $H^\infty(\mathbf{R}^2_+)$ で上半平面 $\mathbf{R}^2_+ = \{u+iv; v>0\}$ で有界な正則関数の全体とし，その境界関数の全体を $H^\infty(\mathbf{R})$ と書く．このとき $H^\infty(\mathbf{U})$ の関数は一次関数

$$z \;=\; \frac{w-i}{w+i}\,, \qquad w \in \mathbf{R}^2_+ \tag{1}$$

との合成によって $H^\infty(\mathbf{R}^2_+)$ の関数へ転換される．したがって $H^\infty(\mathbf{T})$ と $H^\infty(\mathbf{R})$ は互いに同型となる．軌道 $\mathcal{O}(1)$ 上に $A(\mathbf{T}^n)$ を制限して得られる実軸 $\mathbf{R}$ 上の函数環を B_n とする．すなわち

$$B_n \;=\; \{t \to f(e_t)\,;\ f \in A(\mathbf{T}^n)\}$$

とする．このとき $f \in A(\mathbf{T}^n)$ の Taylor 展開を考えると

$$F(u+iv) \;=\; \sum a(k_1, \ldots, k_n) e^{i\alpha_1(u+iv)} \cdots e^{i\alpha_n(u+iv)}$$

は $\mathbf{R}^2_+$ 上で有界な正則関数となり B_n は $H^\infty(\mathbf{R})$ の部分環となる．

補題. $H^\infty(\mathbf{R})$ の部分環 B_n は閉部分環となり $A(\mathbf{T}^n)$ と同型となる．

証明. 軌道 $\mathcal{O}(1)$ は $\mathbf{T}^n$ で稠密だから，$f \in A(\mathbf{T}^n)$ に対して t の函数 $F(t) = f(e_t)$ を考えると

$$\|f\|_\infty \;=\; \max_{w\in\mathbf{T}^n} |f(w)| \;=\; \sup_{t\in\mathbf{R}} |F(t)|$$

を満たす．したがって $f \to F$ は $A(\mathbf{T}^n)$ から B_n 上への等距離同型を与える． **(証明終)**

いくつかの注意を与えよう．上記の補題は $H^\infty(\mathbf{T}^n)$ についても同様に成立する．実際 $\mathbf{R}^2_+$ 上の Poisson 核, $P_{ir}(t) = r/\pi(t^2+r^2)$, $r>0$, に対して $f\in H^\infty(\mathbf{T}^n)$ との合成積（Poisson 積分），

$$f * P_{ir}(w+e_s) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(w+e_t)P_{ir}(s-t)\,dt\,,\quad w\in\mathbf{T}^n\,,$$

を考える．このとき $f*P_{ir}\in A(\mathbf{T}^n)$ となることから Fatou の定理を用いて境界函数の存在が示される．そして軌道 $\mathcal{O}(1)$ 上に $H^\infty(\mathbf{T}^n)$ を制限すると $H^\infty(\mathbf{R})$ の部分環となる．しかしこの函数環の極大イデアル空間の構造は非常に難しい．また $H^\infty(\mathbf{T})$ と $H^\infty(\mathbf{R})$ は互いに同型だから $H^\infty(\mathbf{T}^n)$ は $H^\infty(\mathbf{T})$ のある部分環とみなせる．このように多変数解析函数を特殊な一変数函数と考える視点は有用ではなかろうか.

3. コロナ定理が成立しない例

Fatou の定理より $H^\infty(\mathbf{R})$ は $H^\infty(\mathbf{R}^2_+)$ と同一視できる．したがって Carleson のコロナ定理は $H^\infty(\mathbf{R})$ の極大イデアル空間の中で上半平面 $\mathbf{R}^2_+$ が稠密であることを示す．それでは $H^\infty(\mathbf{R})$ のすべての部分環 B に対してコロナ定理は成立するであろうか．答えは否定的であり，成立しない具体例の構成がこの節の目的である．$\mathfrak{M}(B)$ における弱−* 位相の定義からコロナ問題は次のように言い換えができる．いま $f_1, f_2, \ldots, f_k\in B$ が，ある正数 $\delta>0$ に対して

$$|f_1(z)|+|f_2(z)|+\cdots+|f_k(z)| \;\geq\; \delta\,,\quad z\in\mathbf{R}^2_+\,,$$

を満たすもの (Corona deta) とする．このとき

$$f_1g_1+f_2g_2+\cdots+f_kg_k \;=\; 1\,. \tag{2}$$

となる $g_1, g_2, \ldots, g_k\in B$ (Corona solution) が存在するであろうか．たとえば円板環 $A(\mathbf{T})$ を (1) と合成して得られる $H^\infty(\mathbf{R})$ の部分環

$$A(\mathbf{R}) \;=\; \left\{t\to f\left(\frac{t-i}{t+i}\right); f\in A(\mathbf{T})\right\} \tag{3}$$

はコロナ定理を満たす．そして奇妙なことに成立しない例が多数存在すことはあまり知られてこなかった（[12] 参照）．多分次の定理の $n=2$ の場合がもっとも簡単な例であろう.

定理 1．B_n, $n\geq 2$, を前節で定義された $H^\infty(\mathbf{R})$ の部分環とする．このとき B_n はコロナ定理を満たさない．すなわち $\mathbf{R}^2_+$ は B_n の極大イデアル空間 $\mathfrak{M}(B_n)$ において稠密ではない.

証明. 写像 $t\to e_t$ を用いて，$\mathbf{R}$ と $\mathcal{O}(1)$ および $\mathbf{R}^2_+$ と $\mathcal{O}(1)\times(0,\infty)$ を同一視する．即ち $\mathbf{R}^2_+$ を U^n の部分集合

$$\mathcal{O}(1)\times(0,\infty) \;=\; \left\{(e^{i\alpha_1(u+iv)},\ldots,e^{i\alpha_n(u+iv)})\,; u+iv\in\mathbf{R}^2_+\right\}$$

とみなす．極大イデアル空間 $\mathfrak{M}(A(\mathbf{T}^n))$ は $\overline{U}^n$ と同一視できるから，前節の補題より $f \in A(\mathbf{T}^n)$ に対して $F(t) = f(e_t)$ と置くとき

$$\phi_{(u+iv)}(F) \ = \ F(u+iv) \ = \ f(e^{i\alpha_1(u+iv)}, \ldots, e^{i\alpha_n(u+iv)}), \quad F \in B_n\,,$$

となる．また $z_j \ = \ e^{i\alpha_j(u+iv)}$, $j = 1, 2,$ とおくと

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \ = \ e^{(-\alpha_1+\alpha_2)v}$$

となる．この性質から，ある $w \in U^n$ とその近傍 $V(w)$ を適当に選び

$$\mathcal{O}(1) \times (0, \infty) \cap V(w) \ = \ \emptyset$$

とできる．いま $\mathcal{O}(1) \times (0, \infty)$ の $\overline{U}^n$ での閉包を K とすると w は K に属さない．K はコンパクトだから，適当な $f_1, f_2, \ldots, f_k \in A(U^n)$ を選ぶと $f_1(w) = f_2(w) = \cdots = f_k(w) = 0$ であり，ある $\delta > 0$ に対し

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| + \cdots + |f_k(z)| \ \geq \ \delta\,, \quad z \in K\,,$$

とできる．全ての $f_1, f_2, \ldots, f_k$ は w で定まる極大イデアル $J_w = \{f \in A(U^n)\,;\, f(w) = 0\}$ に含まれて (2) を満たす $g_1, g_2, \ldots, g_k \in A(U^n)$ は存在しない．これを補題を用いて言い換えると $\mathfrak{M}(B_n)$ で $\mathbf{R}^2_+$ が稠密では無いことがわかる．　(証明終)

上記証明において K を $\mathcal{O}(1) \times (0, \infty)$ の $\mathfrak{M}(H^\infty(\mathbf{T}^n))$ における閉包とすると，軌道 $\mathcal{O}(1)$ 上に $H^\infty(\mathbf{T}^n)$ を制限して得られる $H^\infty(\mathbf{R})$ の部分環に対しても定理が成り立つことがわかる．また (3) による $A(\mathbf{R})$ は B_n に含まれないが，これら $A(\mathbf{R})$ と B_n から生成される函数環も全てコロナ定理を満たさない．したがって一次函数 (1) の逆函数を合成して単位円周上へ引き戻すと次の系を得る．

系. 円板環 $A(\mathbf{T})$ を含む $H^\infty(\mathbf{T})$ の部分環でコロナ定理を満たさないものが存在する．

4.　整函数となる内部函数

函数 $q \in H^\infty(\mathbf{T}^n)$ がユニタリー，すなわち $|q(w)| = 1$ *a.e.*, を満たすとき内部函数 (inner function) とよぶ．これらの函数は単位円周 $\mathbf{T}$ における不変部分空間論で重要な役割を担う．内部函数は 2 種類の特殊な内部函数の積として表せる．一つは Blaschke 積と呼ばれる q の U 内の零点 $\{a_n\}$ によって定まる函数；

$$B(z) \ = \ z^p \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{a}_n}{|a_n|}\frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}\right]^{p_n},$$

であり，他の一つは $\mathbf{T}$ 上の特異な正値測度 μ に対し，

$$S(z) \ = \ \exp\left[-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\mu(\theta)\right],$$

で定義される特異内部函数である．複素平面 $\mathbf{C}$ への解析接続を考えると $B(z)$ は $\{1/\bar{a}_n\}$ で $S(z)$ は μ の台の各点で特異点を持つ．したがって整函数となる内部函数は $e^{i\alpha}z^m$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, の形に限定される．奇妙なことに $n \geq 2$ ときの類似の結果が示されたのは近年のことである．

定理 1（[1], [2]）. 整函数（$\mathbf{C}^n$ での）となる内部函数 $q \in H^\infty(\mathbf{T}^n)$ は単項式となる. すなわちある正整数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ および $0 \leq \alpha < 2\pi$ が存在して

$$q(z_1, z_2, \cdots, z_n) \;=\; e^{i\alpha} \cdot z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot \cdots \cdot z_n^{m_n}$$

と書ける.

証明に入る前にいくつかの準備をしよう．前節の記号を用い $\mathbf{A}$ を $\mathbf{T}^n$ 上の連続函数 f で

$$f(w_1, w_2, \ldots, w_n) \sim \sum_{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_n\alpha_n \geq 0} a(m_1, m_2, \ldots m_n) \;\; w_1^{m_1} \cdot w_2^{m_2} \cdots w_n^{m_n} \tag{4}$$

と表せるものの全体とする．このとき $\mathbf{A}$ は Dirichlet 環ととなり函数環の一般論が広範に適用できる（[3], [8] を参照）．Hardy 空間 $\mathbf{H}^p$, $1 \leq p < \infty$, は $\mathbf{A}$ の $L^p(m_n)$ における閉包とし，また $\mathbf{H}^\infty$ は $\mathbf{A}$ の $L^\infty(m_n)$ における弱-* 位相での閉包とする．そして $\mathbf{H}^2$ の部分空間 $\mathbf{M}$ が不変 (invariant) とは $\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}$ が $\mathbf{M}$ に含まれることである．単位円周 $\mathbf{T}$ 上 (すなわち $n = 1$) では，各不変部分空間 $\mathbf{M}$ にある内部函数 q が対応して，

$$\mathbf{M} \;=\; q\mathbf{H}^2$$

と表現される．Helson-Lowdenslager による一連の結果はこれらを双対群が順序を持つコンパクトな可換アーベル群へ拡張することであった（[3], [5] などを参照）．

いま $\mathbf{M}$ を $\mathbf{H}^2$ における（正規化された）不変部分空間とする（[5, §3.2] 参照）．このとき $\mathbf{T}^n \times \mathbf{R}$ 上のユニタリー函数 $A(w, t)$ で関係式

$$A(w, t+s) \;=\; A(w, t) \cdot A(w + e_t, s)\,, \qquad (w, s, t) \in \mathbf{T}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}\,.$$

を満たすものが $\mathbf{M}$ に対応する. 実際 $H^p(dt/\pi(1+t^2)), 1 \leq p < \infty,$ を $H^\infty(\mathbf{R})$ の $L^p(dt/\pi(1+t^2))$ での閉包とすれば，$f \in \mathbf{M}$ となる必要十分条件は

$$t \to \overline{A(w, t)} f(w + e_t) \in H^2(dt/\pi(1+t^2))\,, \qquad m_n - a.e.\; w \in \mathbf{T}^n$$

が成立することである．言い換えると $\mathbf{M}$ の各軌道 $\mathcal{O}(w)$ への制限の閉包が $A(w, t)H^2(dt/\pi(1+t^2))$ となる．このとき $A(w, t)$ を $\mathbf{M}$ に対応するコサイクル (cocycle) と呼ばれる．さて $t \to A(w, t) \in H^2(dt/\pi(1+t^2))$ は内部函数となることから $\mathbf{R}^2_+$ に関する Blaschke 積 $B(w, t)$ と特異内部函数 $S(w, t)$ が定まって

$$A(w, t) \;=\; B(w, t) \cdot S(w, t)$$

と表せる（より強く $B(w,t)$ と $S(w,t)$ をコサイクルへ構成できる）．これらの性質から $\mathbf{H}^2$ における函数はかなり緻密な議論ができる．古典的な観点からは解析的な概周期函数の詳細な検証ということになろうか．ちなみに $\mathbf{H}^\infty$ を軌道 $\mathcal{O}(w)$ への制限して得られる $H^\infty(\mathbf{R})$ の函数環はコロナ定理を満たすことが示される（[13] 参照).

以上の準備の下に，定理の証明をあたえる：

定理 2 の証明. 与えられた内部函数を q とする．$A(w,t) = \overline{q(w)} \cdot q(w+e_t)$ は不変部分空間 $q\mathbf{H}^2$ に対応するコサイクルとなる．また仮定より $t \to A(w,t)$ は $\mathbf{C}$ への解析接続できる．したがって正値可測函数 $\lambda(w)$ が存在し $A(w,t) = e^{i\lambda(w)t}$ と書ける．簡単な考察から $\lambda(w)$ は不変函数となること，すなわち $\lambda(w+e_t) = \lambda(w)$ を満たすことが分かる．したがって $(\mathbf{T}^n, \{T_t\}_{t\in\mathbf{R}})$ のエルゴード性より定数 λ となる．このような性質を持つ $\mathbf{T}^n$ 上の函数は指標の定数倍となり，ある $(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbf{Z}^n$ で $m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_n\alpha_n \geq 0$ を満たすものと $0 \leq \alpha < 2\pi$ が定まり，

$$q(z_1, z_2, \cdots, z_n) \ = \ e^{i\alpha} \cdot z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot \cdots \cdot z_n^{m_n} \, ,$$

と書ける．このとき

$$\lambda \ = \ m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_n\alpha_n$$

であり，また q は $\mathbf{C}^n$ での整函数だから, $m_k \ \geq \ 0, \ k = 1, 2, \ldots, n$, となる． (証明終)

これらの考察に対する Henry のコメントを引用しよう：

> I agree that the result of Bochner (etc.) is easy when looked at from our modern point of view. The most striking example of such a result, I think, is the convolution theorem of Titchmarsh. Perhaps there is an idea that a graduate student could use with profit. I think it comes down to the fact that the geometry of Hilbert space can find application in function theory. We know that about `H^2` and here are two more examples of a different sort. Is there some connection to be made ?

Titchmarsh の定理は Volterra 作用素の不変部分空間の研究に古くから用いられて来た．主にソ連の研究者達によって進められてきたそれらの研究との関係を調べると面白いかもしれない.

5. 終わりに

Henry の特異な経歴の印象を少し書いてみたい気がした．19 歳で Harvard 大学を卒業し（しかもその直前の 13ヶ月間は軍務で学外だった），数年後に仕上げた学位論文を携えフランスへ渡る．そして設立直前の Bourbaki 集団に加わり，あの A. Grothendieck を：I met Grothendieck, still a student, and a bit jealous of my thesis resuts. と書く傲岸不遜，しかし両親には全く頭があがらず L. Schwartz の

CNRS（フランス国立科学研究センター）への再三の招聘をあきらめ，父親（著名な心理学者）の言いなりに 23 歳で Yale 大学の助教授となる．でもやはり「学術研究」には素人の早期教育談義は馴染むまい．彼の 2 編の随想 [6] と [7] を紹介するにとどめよう．

参考文献

[1] S. Bochner, *Entire functions in several variables with constant absolute values on a circular uniqueness set,* Proc. Amer. Math. Soc. 13, 1962, 117-120.

[2] R. Bojanic and E. Stall, *A characterization of monomials,* Proc. Amer. Math. Soc. 13, 1962, 115-116.

[3] T. Gamelin, *Uniform algebras,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

[4] J. Garnett, *Bounded analytic functions,* Academic Press, New York, 1981.

[5] H. Helson, *Analyticity on compact abelian groups,* in *Algebras in Analysis,* Academic Press, London, 1975, 1–62.

[6] H. Helson, *Mathematics in Poland after War,* Notices of Amer. Math. Soc., 44, 1997, 209-212.

[7] H. Helson, *Publishing report,* Mathematical Intelligencer, 24, 3, 2002, 5-7.

[8] K. Hoffman, *Banach space of analytic functions,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

[9] W. Rudin, *Function theory in polydiscs*, Benjamin, New York, 1969.

[10] W. Rudin, *The way I remember it,* Amer. Math. Soc., 1997.

[11] D. Sarason, *A tribute to Henry Helson*, Notices of Amer. Math. Soc., 58, 2011, 274–288.

[12] S. Scheinberg, *Cluster sets and Corona theorems,* in *Banach spaces of analytic functions,* Lecture Notes in Mathematics, 604, Springer, 1977, 103–106.

[13] J. Tanaka, *Corona problem and flows,* J. Funct. Anal., 102, 1991, 360–378.

（2010 年 10 月 22 日提出）