

# ADF-GLS 検定について

坂 野 慎 哉

## 1. はじめに

ある時系列データ  $y_1, \dots, y_T$  が、次のような 2 つの式で示されるデータ生成過程 (data generating process: 以下 DGP と略す) から発生していると考えられているとする。

$$y_t = d_t + u_t, \quad u_t = \alpha u_{t-1} + v_t \quad (t = 1, \dots, T) \quad (1)$$

ここで、 $\{d_t\}$  は確定的 (すなわち確率変数でない) 要素であり、例えば定数項や、トレンド変数と呼ばれる時間とともに 1 ずつ増大していく変数とその係数からなる項がそれにあたる。 $\{v_t\}$  は、平均 0 で定常な観測されない過程とする。(1) における  $\alpha$  が 1 に等しいという帰無仮説を、1 より小さいという対立仮説に対して検定する検定手法は単位根検定と呼ばれ、帰無仮説が棄却されると、検定の対象となる系列は「単位根を含まない過程」と判断される。帰無仮説が棄却されなければ、その系列が単位根を含まない過程と判断することはできない。今日では時系列データを用いて回帰分析などを行うとき、分析に先立ち、データに単位根検定を行うことが多い。単位根を含む時系列データを用いて回帰分析を行った場合、その結果が意味を持たない場合があるからである。単位根についての詳しい説明は、入門レベルよりは上級の計量経済学のテキストなら取り上げられていると思われるので、そちらに

譲ることとしたい。

単位根検定の手法として代表的なものに、Fuller (1976) および Dickey and Fuller (1979) によって与えられた、Dickey-Fuller 検定（以下 DF 検定と略す）や、その拡張である、Augmented Dickey-Fuller 検定（以下 ADF 検定と略す）がある。これらの検定は広く使われているものの、その検出力、すなわち対立仮説のもとで帰無仮説を棄却する確率が、低いことが知られている。もちろん、対立仮説が正しければ帰無仮説は誤りであり、帰無仮説が誤っているときに帰無仮説を棄却できないのでは、その検定結果は誤判断となるから、検定にとって検出力が低いことは望ましくない性質である。小生も拙稿 (2006) にて、シュミレーションを用いた例証により、ADF 検定の検出力の低さについて論及した。

このような DF（もしくは ADF）検定の欠点を改善した検定手法がいくつか考案されているが、Elliott, Rothenberg, and Stock (1996)（以下、ERS と略す）による ADF-GLS 検定（ERS 自身は DF-GLS 検定と名付けている）はその一つである。

しかしながら、この ADF-GLS 検定が我が国の実証分析の報告や論文において適用されているのを見る機会は、ADF 検定に比べるとかなり少ないように思われる。せっかく ADF 検定の改良版として考案されたのに、使われないのはもったいない。ADF-GLS 検定があまり使われない理由は、それがわが国の計量経済学初学者に理解しやすいレベルで紹介されていないからではないか、と小生は考える。例えば、Davidson and MacKinnon (2004), Greene (2003), Hayashi (2000) といった、わが国で広く使われている大学院レベルの計量経済学のテキストでは、ADF-GLS 検定も取り上げられているものの、それは ADF 検定の解説が一通り終わった後での「改良版としてこのようなものもある」といった程度の取り上げ方である。特に前者 2 点においては、非常にコンパクトにまとめているため、割かれているスペースは 1

ページにも満たない。このレベルのテキストなら仕方のない面もあるが、コンパクトな説明は初学者には理解が難しい。ADF-GLS 検定について比較的記述の詳しい Hayashi (2000) でも、具体的手法は本文ではなく練習問題で解説されている。さらに、日本語で書かれたテキストで、ADF-GLS 検定について解説しているものは、今のところまだ無いようである。

そこで小稿では、時系列分析の初歩も含めた計量経済学の入門を学び終えた学部上級生や、計量経済学の方法論を専門としない大学院初年級の学生を対象に、ADF-GLS 検定について解説し、ADF-GLS 検定がわが国における実証分析においてもっと広く利用されるようになるための、きっかけを提供したい。

以下、小稿の構成を述べる。2 節では、小稿の理解に最低限必要な ADF 検定の概要について説明する。3 節では、ADF-GLS 検定の手法について具体的に説明する。4 節では、ADF-GLS 検定を我が国のマクロ経済データに適用した例を示し、同じデータ系列を ADF 検定に適用した結果と比較する。5 節では、小稿の内容をまとめる。

## 2. ADF 検定の概要

本節では、ADF-GLS 検定の理解のために、ADF 検定の概要について必要最小限の説明を行う。ADF 検定についてより詳しいことは、例えば森棟 (1999) などを参照していただきたい。

ある時系列データ  $y_1, \dots, y_T$  が、小稿 1 節の (1) において確定的要素  $\{d_t\}$  をより具体的に示した、次のような 2 つの式で示される DGP から発生していると考えられているとする。

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t, \quad u_t = \alpha u_{t-1} + v_t \quad (2)$$

ここで、 $\beta_0$ ,  $\beta_1$  は未知パラメータであり、 $t$  はトレンド変数である。 $\beta_1 t$  は

線形トレンド項と呼ばれる。 $\{v_t\}$ については、独立で同一の分布をする平均 0、分散一定の観測されない過程であると仮定する。これは、(1)におけるよりも強い仮定である。1節で述べたように、帰無仮説  $H_0: \alpha = 1$  を、対立仮説  $H_1: \alpha < 1$  に対して検定するのが、単位根検定である。

いま (2) について、その右側の式の両辺から  $\{u_{t-1}\}$  を引き、次のように書き換える。

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t, \quad \Delta u_t = a_0 u_{t-1} + v_t \quad (3)$$

ここで、 $\Delta u_t \equiv u_t - u_{t-1}$ 、 $a_0 \equiv \alpha - 1$  である。こうすると、 $\alpha = 1$  ならば  $a_0 = 0$  であり、帰無仮説  $H_0: a_0 = 0$  を、対立仮説  $H_1: a_0 < 0$  に対して検定する検定が、(3) における単位根検定となる。したがって、もし (3) における  $\{u_t\}$  が観測可能な系列であるならば、(3) の右側の式を、右辺の  $\{v_t\}$  が誤差項である単純回帰モデルと考えれば、 $a_0$  を  $t$  検定することによって、この単位根検定を行うことができそうである。その場合、対立仮説の不等号の向きから、検定は左片側検定になる。

実際には、(3) の左側の式の  $\beta_0$ 、 $\beta_1$  が未知パラメータであることにより、 $\{u_t\}$  は観測可能な系列ではない。よって、 $\{u_t\}$  に代わる観測可能な系列が必要になる。そのために、(3) の左側の式に通常の最小二乗法 (Ordinary Least Squares Method: 以下 OLS と略す) を適用し、 $\beta_0$ 、 $\beta_1$  の OLS 推定量  $\tilde{\beta}_0$ 、 $\tilde{\beta}_1$  をそれぞれ求め、それらから OLS 残差の系列  $\{\tilde{u}_t\}$  を求める。ただし、

$$\tilde{u}_t \equiv y_t - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 t \quad (4)$$

である。この  $\{\tilde{u}_t\}$  は OLS 残差であるから観測可能である。そして、(3) の右側の式の  $\{u_t\}$  を、(4) で定義される  $\{\tilde{u}_t\}$  で置き換えた式

$$\Delta \tilde{u}_t = a_0 \tilde{u}_{t-1} + error \quad (5)$$

を考える。ただし、(5) 右辺の「error」は適当な誤差項を表すものとする。

もし  $\{\tilde{u}_t\}$  の値が  $\{u_t\}$  の実現値に十分に近い値をとるならば、単位根検定は、直観的に (5) における  $a_0$  の  $t$  検定によって行えそうである。

実際、この  $t$  検定こそが DF 検定である。ただし、このときの  $a_0$  の  $t$  統計量 (DF 検定を提案した Dickey and Fuller (1979) はこの  $t$  統計量を  $\hat{\tau}_\tau$  と記したので、小稿でも以下この記法を用いる) は、帰無仮説  $H_0 : a_0 = 0$  のもとで通常の  $t$  分布に従わず、それよりも密度関数のグラフが負の方向にずれた、ある特殊な分布をする。そのため、この DF 検定においては、与えられた有意水準に対応した検定の臨界値を求めるためには、そのための特別な分布表が必要となる。それは Fuller (1976) によって与えられたが、その後 Fuller (1996) によって若干修正されている。

以上で説明した検定の方法は、時系列データ  $y_1, \dots, y_T$  の DGP が (2)、あるいは同じことだが (3) のように、定数項と線形トレンド項の両方を含んでいると想定されている場合のものである。 $y_1, \dots, y_T$  の DGP に線形トレンド項が無いと想定できる場合、すなわち、

$$y_t = \beta_0 + u_t, \quad u_t = \alpha u_{t-1} + v_t \quad (6)$$

もしくは (3) と同様に  $\Delta u_t \equiv u_t - u_{t-1}$ ,  $a_0 \equiv \alpha - 1$  として

$$y_t = \beta_0 + u_t, \quad \Delta u_t = a_0 u_{t-1} + v_t \quad (7)$$

と想定できる場合にも、検定の手続きは同様である。具体的には、(6) もしくは (7) の左側の式を OLS 推定し、 $\beta_0$  の OLS 推定量  $\tilde{\beta}_0$  を用いて

$$\tilde{u}_t \equiv y_t - \tilde{\beta}_0 \quad (8)$$

から得られる残差の系列  $\{\tilde{u}_t\}$  を用いて (5) と同じ式を考え、そこにおける  $a_0$  の  $t$  検定を行うのである。DGP に線形トレンド項が含まれている上述の場合との違いは、 $a_0$  の  $t$  統計量の分布である。Dickey and Fuller (1979) はこの

$t$  統計量を  $\hat{\tau}_\mu$  と記したので、小稿でも以下この記法を用いるが、この  $\hat{\tau}_\mu$  の  $H_0 : a_0 = 0$  のもとでの分布は、通常の  $t$  分布とも、上述の  $\hat{\tau}_\tau$  の分布とも異なる。そのため、検定の臨界値を求めるためには、やはりこの場合のための特別な分布表が必要となる。それも Fuller (1996) が与えている。この検定も DF 検定と呼ばれる。

さらに、 $y_1, \dots, y_T$  の DGP に線形トレンド項だけでなく定数項も無いと想定できる場合、すなわち  $y_t = \alpha y_{t-1} + v_t$  である場合、もしくは  $\Delta y_t \equiv y_t - y_{t-1}$ ,  $a_0 \equiv \alpha - 1$  として

$$\Delta y_t = a_0 y_{t-1} + v_t \quad (9)$$

と想定できる場合も、DF 検定は行える。この場合には、(9) を直接 OLS 推定し、そこにおける  $a_0$  の  $t$  検定を行うのである。Dickey and Fuller (1979) はこの場合の  $t$  統計量を  $\hat{\tau}$  と記したので、小稿でも以下この記法を用いるが、この  $\hat{\tau}$  の  $H_0 : a_0 = 0$  のもとでの分布は、通常の  $t$  分布とも、上述の  $\hat{\tau}_\tau$  の分布とも  $\hat{\tau}_\mu$  の分布とも異なる。この場合の検定の臨界値を求めるための特別な分布表も、やはり Fuller (1996) が与えている。

これまでは、 $y_1, \dots, y_T$  の DGP における  $\{v_t\}$  が、独立で同一の分布をす平均 0、分散一定の観測されない過程であると仮定していた。次に、この仮定をゆるめ、 $\{v_t\}$  が次数  $p$  の定常な AR 過程であると想定できる場合を考える。すなわち、 $\{\eta_t\}$  がホワイト・ノイズ（平均 0、分散一定、自己共分散がすべて 0 の確率変数の系列）とするとき、

$$v_t = \phi_1 v_{t-1} + \phi_2 v_{t-2} + \dots + \phi_p v_{t-p} + \eta_t \quad (10)$$

となっていると想定できるとする。(10) は、ある実数  $k$  について  $L^k v_t \equiv v_{t-k}$  (ただし  $L^1 \equiv L$ ) という意味を持つラグ演算子  $L$  を含む多項式（ラグ多項式）を用い、

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) v_t = \eta_t \quad (11)$$

とも書ける。ただし、 $\{v_t\}$  が定常であるためには、 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  を係数に持つ多項式

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0 \quad (12)$$

は、すべての根が絶対値で 1 より大きくなくてはならないことが知られている。

$y_1, \dots, y_T$  の DGP において、 $\{v_t\}$  以外は (2) と同様に

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t, \quad u_t = \alpha u_{t-1} + v_t \quad (13)$$

となっているとすると、(13) の右側の式はラグ演算子を用いて  $(1 - \alpha L) u_t = v_t$  と書けるから、(11) は

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) (1 - \alpha L) u_t = \eta_t \quad (14)$$

のようにも書ける。そして (14) は、次のように書き直せる。

$$\Delta u_t = a_0 u_{t-1} + a_1 \Delta u_{t-1} + a_2 \Delta u_{t-2} + \dots + a_p \Delta u_{t-p} + \eta_t \quad (15)$$

ただしこの場合、 $a_0 = (\alpha - 1)(1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p)$  である。(14) から (15) への書き換えは複雑で技巧的であるので、その具体的方法の説明は小稿付録 A に譲ることとする。

さて、上述のように、 $\{v_t\}$  が定常と想定されている場合、多項式 (12) はすべての根が絶対値で 1 より大きいことから、(12) の左辺の  $z$  に 1 を代入した式は 0 とはならないはずである。すなわち、 $1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p \neq 0$  である。したがって、 $a_0$  が 0 となるのは  $\alpha = 1$  のとき以外あり得ず、よって、 $\{v_t\}$  の AR 次数  $p$  が既知であつてかつ  $\{u_t\}$  が可観測であるならば、この場合もこれまでと同様、DGP が単位根を含むかどうかの検定は、 $a_0$  について  $t$  検定を行えばよいように思えてくる。

実際には、やはりこれまでと同様、(15)における観測不能な  $\{u_t\}$  を (13) の左側の式を OLS 推定して得られる残差  $\{\tilde{u}_t\}$  に代えた、

$$\Delta \tilde{u}_t = a_0 \tilde{u}_{t-1} + a_1 \Delta \tilde{u}_{t-1} + a_2 \Delta \tilde{u}_{t-2} + \cdots + a_p \Delta \tilde{u}_{t-p} + error \quad (16)$$

における右辺第 1 項の係数  $a_0$  について t 検定を行うのであり、この t 検定こそが ADF 検定である。このときの  $a_0$  の t 統計量は、帰無仮説  $H_0 : a_0 = 0$  のもとでの極限分布が  $\hat{\tau}_\tau$  の極限分布と同じになるので、この検定において臨界値を求める際には  $\hat{\tau}_\tau$  の分布表が使える。

DF 検定には、 $y_1, \dots, y_T$  の DGP に線形トレンド項が含まれない場合の検定手法もあった。ADF 検定においても同様に、DGP に線形トレンド項が含まれない場合の検定手法があり、その手続きは、(5) の代わりに (16) を用いる点異なるほかは、DF 検定のときと同様である。このときの  $a_0$  の t 統計量は、帰無仮説  $H_0 : a_0 = 0$  のもとでの極限分布が  $\hat{\tau}_\mu$  の極限分布と同じになるので、この検定において臨界値を求める際には  $\hat{\tau}_\mu$  の分布表が使える。

ここまでの ADF 検定の説明では、 $\{v_t\}$  の AR 次数  $p$  が既知と仮定されていた。 $p$  は、ADF 検定を行う際に推定される回帰式 (16) における、右辺の階差をとったラグ項の最高ラグ次数でもあるので、これがわからなければ ADF 検定はできない。そしてこの  $p$  は、実際には未知であるので、何らかの方法で推定しなくてはならない。

$p$  を推定する手法の 1 つに、 $p$  の「仮の値」 $p^*$  を比較的大きめに取って回帰式 (16) をとりあえず推定し、ラグ次数が最高の項の係数に通常の t 検定を行う、という方法がある。係数が有意でなければ  $p^*$  を小さくして (16) を再推定し、再びラグ次数が最高の項の係数に通常の t 検定を行う。この手続きを、ラグ次数が最高の項の係数が有意になるまで繰り返し、有意になった時点での  $p^*$  を  $p$  とするのである。ついでながら、この方法を採用する場合、注意すべき事項が 2 つある。1 つ目は、最高次数は順に減らしていくという点であ



る。増やしていくのではない。2つ目は、個々の有意性検定の有意水準は、すべての係数の検定の有意水準を  $c$  (たとえば 0.05) とおく場合、 $c/p^*$  としなくてはならないということである。これは、検定を繰り返し行うことから生じることであるが、この理由について詳しくは森棟 (1999) を参照されたい。

$p$  を推定する手法として、赤池情報量基準 (Akaike Information Criterion: 以下 AIC と略す) や、バイズ情報量基準 (Bayesian Information Criterion: 以下 BIC と略す) を用いる方法もある。ADF 検定を実際のデータに適用してみる小稿 4 節では、こちらの方法を用いる。

ADF-GLS 検定の方法について解説することが目的の小稿においてはやや本題から外れるが、ADF 検定の説明を終えるにあたり、以下のことに言及しておきたい。ADF 検定は、DGP が定数項と線形トレンドの双方を含んだ場合ならば、上記 (16) における  $a_0$  の  $t$  検定ではなく、

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 t + a_0 y_{t-1} + a_1 \Delta y_{t-1} + a_2 \Delta y_{t-2} + \cdots + a_p \Delta y_{t-p} + error \quad (17)$$

における  $a_0$  の  $t$  検定によっても行えることが知られている。用いられる分布表も、やはり  $\hat{\tau}_\tau$  の分布表である。DGP が定数項のみを含んだ場合ならば、(17) から線形トレンド項を除いた式における  $a_0$  の  $t$  検定が、ADF 検定となる。この場合、分布表は  $\hat{\tau}_\mu$  の分布表である。(17) を使う場合、(16) を使うときのように、(13) の左側の式を OLS 推定して残差  $\{\hat{u}_t\}$  を得る必要がなく、手続きがより楽である。

### 3. ADF-GLS 検定の方法

本節では、いよいよ小稿の目的である、ADF-GLS 検定の方法の解説に入る。小稿 2 節と同様、ある時系列データ  $y_1, \dots, y_T$  が、次のような 2 つの式で示される DGP から発生していると考えられているとする。

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t, \quad u_t = \alpha u_{t-1} + v_t \quad (18)$$

ただし、 $\{v_t\}$  は、次数  $p$  の定常な AR 過程であるとする。これまでと同様、帰無仮説  $H_0: \alpha = 1$  を、対立仮説  $H_1: \alpha < 1$  に対して検定する検定を考えている。帰無仮説が棄却された場合、 $y_1, \dots, y_T$  は単位根を含まない過程であると判断される。

前節で説明したように、ADF 検定は、2 段階で行われる。第 1 段階で (13) の左側の式の OLS 残差を求め、第 2 段階ではその OLS 残差を用いて (16) を推定し、検定統計量を求める。ADF-GLS 検定も同様で、その手続きは 2 段階である。

(18) の左側の式は、もし  $\{u_t\}$  を誤差項と考えるならば、 $t$  を説明変数とし、 $\beta_0, \beta_1$  を係数とする単純回帰モデルとみなせる。このとき、 $\beta_0, \beta_1$  を係数として持ちながら、誤差項が  $\{u_t\}$  ではなく  $\{v_t\}$  になるようにモデルを書き換えてみる。その書き換えは、次のように行える。(18) の左側の式の両辺に  $\alpha$  をかけ、時間を 1 期前にずらすと、

$$\alpha y_{t-1} = \alpha \beta_0 + \alpha \beta_1 (t-1) + \alpha u_{t-1} \quad (19)$$

となる。そしてこの (19) を (18) の左側の式から引くと、(18) の右側の式より、

$$y_t - \alpha y_{t-1} = \beta_0(1 - \alpha) + \beta_1\{t - \alpha(t-1)\} + v_t \quad (20)$$

と書ける。 $\alpha$  は検定の対象でありもちろん未知であるが、いま既知であると仮定すると、(20) 左辺の  $y_t - \alpha y_{t-1}$ 、右辺の  $1 - \alpha$  と  $t - \alpha(t-1)$  はいずれも求めることができ、これらをそれぞれ 1 つの変数とみなすことにすれば、 $\{v_t\}$  が適当な性質を持つ誤差項と考えることができる場合、(20) を OLS 推定して  $\beta_0, \beta_1$  の推定値を求めることができる。

話が本題からそれるが、仮に  $\{u_t\}$  が (18) の左側の式の誤差項と見なすことができ、しかもそれが回帰モデルの誤差項の古典的仮定を満たしていると

すると、入門レベルの計量経済学の授業で教えられるように、この式を OLS 推定して得られる  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  の推定量の分散は、線形不偏推定量の分散の中で最も小さいものとなる。一方、(18) 右側の式の  $\{v_t\}$  が独立な平均 0、分散一定の正規確率変数の系列であるとき、誤差項  $\{u_t\}$  は AR(1) となるが、その場合には、(18) の左側の式を OLS 推定して得られる推定量の分散にはそのような性質を持つ保証がない。しかし、 $\alpha$  が既知の場合に、上述のように (18) の左側の式を (20) のように変換 (Cochrane-Orcutt 変換と呼ばれる) してから OLS 推定して求めた推定量の分散は、線形不偏推定量の分散の中で最も小さいものになる。この推定法は、一般化最小二乗法 (Generalized Least Squares Method : GLS と略される) と総称される推定手法の一種である。

話を ADF-GLS 検定に戻そう。 $y_1, \dots, y_T$  の DGP においては  $\{v_t\}$  は定常な AR(p) と想定されているので、(20) は上述の場合とは前提が異なるが、ADF-GLS 検定ではまず、形式的に GLS と同じ手続きを行って  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  を推定する。すなわち、(20) おける未知の  $\alpha$  を  $\bar{\alpha} \equiv 1 + \bar{c}/T$  で置き換え ( $\bar{c}$  はある定数)、さらに (20) の  $\{v_t\}$  を古典的な誤差項に代えた次の式に、OLS を適用するのである。

$$y_t - \bar{\alpha}y_{t-1} = \beta_0(1 - \bar{\alpha}) + \beta_1\{t - \bar{\alpha}(t-1)\} + error \quad (21)$$

(21) の「error」は誤差項を示す。OLS 推定に当たっては、 $y_t - \bar{\alpha}y_{t-1}$ ,  $1 - \bar{\alpha}$ ,  $t - \bar{\alpha}(t-1)$  は、それぞれ 1 つの変数とみなされる。ただし、1 期目のデータは、それぞれ  $y_1$ , 1,  $t$  (すなわち 1) とする。 $\bar{c}$  の値は、DGP が (18) の場合、-13.5 にする。

上記の方法で (21) を推定して得られる  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  の推定値を、それぞれ  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{\beta}_1$  とおく。これらの推定値を用いて、

$$y_t^d \equiv y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 t \quad (22)$$

なる式で系列  $\{y_t^d\}$  を求める。(22) の右辺は、通常の残差を求める式

$$y_t - \bar{\alpha}y_{t-1} - \hat{\beta}_0(1 - \bar{\alpha}) - \hat{\beta}_1\{t - \bar{\alpha}(t-1)\} \quad (23)$$

とは異なる。ここまでの ADF-GLS 検定の第 1 段階といえる部分である。

ADF 検定では第 2 段階において、第 1 段階で求めた OLS 残差からなる式 (16) を OLS 推定したが、同様に ADF-GLS 検定では、第 1 段階で求めた  $\{y_t^d\}$  からなる次の式を OLS 推定する。

$$\Delta y_t^d = a_0 y_{t-1}^d + a_1 \Delta y_{t-1}^d + a_2 \Delta y_{t-2}^d + \cdots + a_p \Delta y_{t-p}^d + error \quad (24)$$

ここで、 $p$  は  $\{v_t\}$  の AR 次数である。 $p$  は通常未知であるから、推定する必要がある。(24) の  $a_0$  が 0 かどうかを検定する  $t$  検定こそが、ADF-GLS 検定である。ただし、このときの  $t$  検定統計量は、ADF 検定の場合と同様に帰無仮説のもとで通常の  $t$  分布には従わず、ADF 検定の検定統計量  $\hat{\tau}_\tau$  の帰無仮説のもとでの分布とも異なる分布をする。そのため、ADF-GLS 検定の臨界値を求めるためには独自の分布表が必要になるが、それは ERS の「TABLE I」の「C」の部分にある。 $T$  が無限大の場合について一部引用しておく、左から 1%点 = -3.48, 2.5%点 = -3.15, 5%点 = -2.80, 10%点 = -2.57 である。

つぎに、 $y_1, \dots, y_T$  の DGP に線形トレンド項が含まれていない場合、すなわち DGP が

$$y_t = \beta_0 + u_t, \quad u_t = \alpha u_{t-1} + v_t \quad (25)$$

となっている場合の、ADF-GLS 検定の方法を紹介する。ここで、(25) の  $\{v_t\}$  は、やはり次数  $p$  の定常な AR 過程であるとする。

DGP に線形トレンド項が含まれる場合、第 1 段階では、DGP(18) に対応して (21) をたてて OLS 推定するということであつた。いまの場合の第 1 段階では、同様にして DGP(25) から対応する式

$$y_t - \bar{\alpha}y_{t-1} = \beta_0(1 - \bar{\alpha}) + error \quad (26)$$

をたてて、 $y_t - \bar{\alpha}y_{t-1}$ 、 $1 - \bar{\alpha}$ をそれぞれ1つの変数とみなして OLS 推定する。ここで、やはり  $\bar{\alpha} \equiv 1 + \bar{c}/T$  であるが、この場合  $\bar{c}$  は  $-13.5$  ではなく  $-7$  とする。(26) は、(21) から DGP における線形トレンド項を除いたものに対応している。(26) を推定して得られる  $\beta_0$ 、 $\beta_1$  の推定値を、それぞれ  $\hat{\beta}_0$ 、 $\hat{\beta}_1$  とおき、DGP に線形トレンド項が含まれる場合における (22) に対応する式、

$$y_t^d \equiv y_t - \hat{\beta}_0 \quad (27)$$

で系列  $\{y_t^d\}$  を求める。ここまでが第1段階である。

第2段階においては、線形トレンド項が含まれる場合における (24) と同じ式を、(27) から求めた  $\{y_t^d\}$  を用いてたて、OLS 推定する。このときの (24) の  $a_0$  が0かどうかを検定する t 検定こそが、DGP に線形トレンド項が含まれない場合の ADF-GLS 検定である。このときの t 検定統計量は、ADF 検定の時と同様に帰無仮説のもとで通常の t 分布には従わないが、線形トレンド項が含まれる場合の ADF-GLS 検定とは異なり、その極限分布は、DGP に線形トレンド項も定数項も含まれない場合の ADF 検定の検定統計量  $\hat{\tau}$  の帰無仮説のもとでの極限分布と同じになる。そのため、検定の臨界値を求めるにあたっては、この場合の ADF-GLS 検定のための独自の分布表はなく、Fuller (1976) が作成した  $\hat{\tau}$  の表を用いる。 $T$  が無限大の場合について一部引用しておく、左から1%点 =  $-2.58$ 、2.5%点 =  $-2.23$ 、5%点 =  $-1.95$ 、10%点 =  $-1.62$  である。

#### 4. 適用例

本節では、ADF-GLS 検定の適用例を示す。

例として取り上げる時系列データは、日本の1967年第1四半期から2001年第1四半期までの実質マネーサプライである。 $T$  は137である。M2+CD

(平均残高)をマネーサプライとするが、国民経済計算年報で報告されている M2+CD は名目値なので、これを 1990 年基準の GDP デフレータで割って実質化する。さらに検定を適用する前に、マクロ経済データの分散安定化のための常套手段として自然対数をとっておく。

比較のため、この対数をとった実質マネーサプライに、まずは ADF 検定を行ってみよう。

ADF 検定を実際に行うにあたり、まずやらなくてはならないことは、データのレベル (=階差をとらない状態) と、1 階の階差をとる、グラフにプロットしてみることである。「図 1」と「図 2」は、それぞれレベルと 1 階階差のグラフである。

図 1 をみると、この時系列にはトレンドが含まれているように見える。しかし、それは線形トレンドなのか、単位根なのか、あるいはその両方なのか、この図を見ただけでは判断がつかない。そこで図 2 が必要になる。

例えばいま、ある時系列データ  $y_1, \dots, y_T$  の DGP が小稿 2 節 (2) のようになっており、かつ帰無仮説  $H_0: \alpha = 1$  が正しいと仮定しよう。すると、(2) は次のようにも書ける。

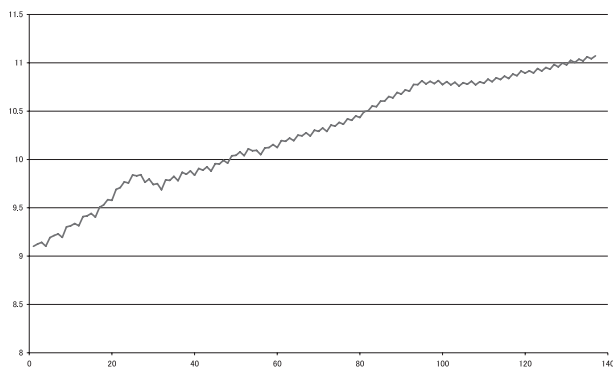


図 1

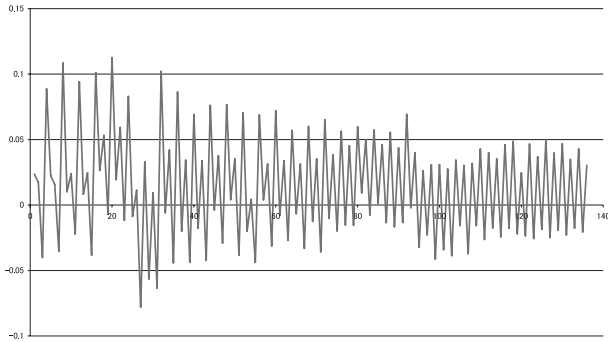


図 2

$$\Delta y_t = \beta_1 + v_t \quad (28)$$

(28) より，レベル系列では線形トレンドの係数であるパラメータが，1 階階差系列では定数項になることがわかる。このことから，図 2 のような 1 階階差系列をプロットしたグラフを眺め，プロットが横軸以外の見えない水平軸の上下を行き来しているように見えている，すなわち定数項の存在が見て取れるようであれば，レベルの系列には線形トレンドが含まれている可能性がある。実際に図 2 をみると，系列の振幅の中心が，わずかながら横軸より少し上にずれているように見える。そのことから，系列の DGP には線形トレンドが含まれていると想定することにする。

検定の対象となる系列の DGP に，定数項と線形トレンドが含まれると想定されることになったので，小稿 2 節 (13) の左側の式を OLS 推定し，OLS 残差を求め，さらにそれを用いて小稿 2 節 (16) を推定する。(16) の推定にあたり，右辺のラグ項の最高次数  $p$  を推定する必要がある。ERS では  $p$  の推定に BIC を用いているので，小稿でもそれにあわせ，BIC を使うことにする。小生が推定に用いた統計ソフトは TSP である。TSP (バージョン 5.0) では，BIC は次の式で計算されている。

$$BIC = \frac{1}{2} \left\{ T(1 + \log 2\pi) + T \log \left( \frac{SSR}{T} \right) + (p+1) \log T \right\} \quad (29)$$

ここで、対数は自然対数であり、 $SSR$  は (16) を OLS 推定した時の残差平方和である。一方、例えば Hayashi(2000) では、 $BIC$  の計算式について、(29) とは異なる次の式を紹介している。

$$BIC = \log \left( \frac{SSR}{T} \right) + (p+1) \frac{\log T}{T} \quad (30)$$

もちろん、(29) と (30) では求まる  $BIC$  の値は異なる。 $BIC$  は値の差のみに意味があり、値そのものには意味がないため、同一モデルの  $BIC$  でもソフトウェアによって出力される値が異なることがあるし、同一のソフトウェアでもバージョンによって  $BIC$  の値が異なっていることすらある。しかしそういう場合でも、例えば (29) で計算される  $BIC$  と (30) で計算される  $BIC$  の場合、後者を  $BIC^*$  と置くならば、

$$BIC = \frac{T}{2} \{ (1 + \log 2\pi) + BIC^* \} \quad (31)$$

となり、(31) 右辺の  $1 + \log 2\pi$  は定数なので、両者は比例関係にあることになり、どちらの計算式によってもモデルの  $BIC$  の間の大小関係が異なるということはなく、それゆえモデルの選択結果も用いられる  $BIC$  の計算式によって変わるということはない。要するに、異なる計算式で計算された  $BIC$  同士を比較しなければ問題は生じない。以上の注意点は、 $AIC$  についても同様である。

$BIC$  を比較しながら (16) を推定した結果、 $p = 5$  と判断した。そして推定結果は表 1 のようになった。ただし表 1 においては、 $\tilde{u}_{t-1}$  を「 $u(-1)$ 」、 $\Delta \tilde{u}_{t-1}$  を「 $\Delta u(-1)$ 」、 $\Delta \tilde{u}_{t-2}$  を「 $\Delta u(-2)$ 」、などと記している。小稿 2 節で解説したように、変数  $\tilde{u}_{t-1}$  の係数の  $t$  統計量が、この場合の ADF 検定の検定統計量  $\hat{\tau}_\tau$  であり、その値は  $-1.94$  であった。有意水準を 5% とすると臨



表 1

変数	$u(-1)$	$\Delta u(-1)$	$\Delta u(-2)$	$\Delta(-3)$	$\Delta(-4)$	$\Delta(-5)$
係数	-0.02	0.56	-0.01	-0.12	0.81	-0.62
$t$ 値	-1.94	8.56	-0.38	-3.39	21.86	-9.43

界値は Fuller (1976) の表から  $-3.41$  と求まるので、帰無仮説は棄却されず、対数をとった実質マネーサプライの系列に単位根が含まれていないとは判断できない。

しかし、小稿 1 節で述べたように、ADF 検定は検出力が低いことが知られている。すなわち、実是对立仮説が正しい、すなわち系列が単位根を含んでいなかったのだとしても、この検定がそれを「検出」できなかっただけかもしれないのである。このような背景から、ADF 検定より検出力の高い ADF-GLS 検定を行う動機が生まれる。

余談ながら、この場合のように、DGP に線形トレンドと定数項の両方が含まれていると考えることができる場合に ADF 検定を行う際、上記のように帰無仮説が棄却されないなら、ただちに  $\beta_1$  の有意性検定に入るのが常道である。その方法については、ADF-GLS 検定の解説を目的としている小稿の主題からは外れるので、ここでは詳しく示さないが、結果のみを示しておくと、 $\beta_1$  は有意水準 1% で有意となり、図 1 および図 2 から線形トレンド項が DGP に含まれているとした判断は支持されたことになった。この検定について詳しくは、森棟 (1999) を参照されたい。

それではいよいよ、対数をとった実質マネーサプライの系列に ADF-GLS 検定を適用してみよう。上述の分析を援用し、DGP には定数項も線形トレンド項も含まれていると想定する。その場合には、小稿 3 節で説明したように、 $\bar{c} = -13.5$  としたうえで  $y_t - \bar{\alpha}y_{t-1}$ ,  $1 - \bar{\alpha}$ ,  $t - \bar{\alpha}(t-1)$  をそれぞれ 1 つの変数として (ただし、1 期目のデータは、それぞれ  $y_1$ ,  $1$ ,  $1$  とする) (21) を推定し、その推定値を用いて (22) より系列  $\{y_t^d\}$  を求める。この  $\{y_t^d\}$  を使

表 2

変数	$y(-1)$	$\Delta y(-1)$	$\Delta y(-2)$	$\Delta y(-3)$	$\Delta y(-4)$	$\Delta y(-5)$
係数	2.20E-07	0.64	0.09	-0.04	0.9	-0.59
t 値	0.07	9.1	2.51	-1.23	25.5	-8.66

い (24) を推定するとき, (24) の  $a_0$  の t 統計量が ADF-GLS 検定の検定統計量となる。

ADF 検定の場合と同様, (24) の推定にあたっては, 未知である  $p$  の推定も同時に行う必要がある。BIC を比較しながら (24) を推定した結果,  $p = 5$  と判断した。そして推定結果は表 2 のようになった。ただし表 2 においては,  $y_{t-1}^d$  を「 $y(-1)$ 」,  $\Delta y_{t-1}^d$  を「 $\Delta y(-1)$ 」,  $\Delta y_{t-2}^d$  を「 $\Delta y(-2)$ 」, などと記している。変数  $y_{t-1}^d$  の係数の t 統計量が, この場合の検定統計量であり, その値は 0.07 であった。有意水準を 5% とすると臨界値は ERS の表から  $-2.89$  と求まるので, ADF 検定の場合と同様に, 帰無仮説は棄却されず, 対数をとった実質マネーサプライの系列に単位根が含まれていないとは判断できない。ADF 検定より検出力の高い ADF-GLS 検定を行っても ADF 検定と同じ結果が得られたわけで, 先の ADF 検定の結果は信用できるものであったことがわかった。

## 5. 結び

小生は, 代表的な単位根検定の手法である ADF 検定を, その検出力が高くなるように改良した検定手法である ADF-GLS 検定が, あまりわが国で利用されていないことに着目した。そして小稿では, その現状の改善を促すため, ADF-GLS 検定の方法を初学者でも理解できるようにできるだけ平易に紹介するよう努めてきたが, いかがなものであろうか。

小稿 2 節では, 小稿の理解に必要な最低限の ADF 検定の概要について説明した。もっとも, 小稿をできるだけ自己完結的にするために, やや長くなって

しまった。3 節では、ADF-GLS 検定の手法について、できるだけ具体的に説明した。4 節では、ADF-GLS 検定をわが国のマクロ経済データの一つである、実質マネーサプライに適用した例を示し、同じデータ系列を ADF 検定に適用した結果と比較した。

小稿が、時系列分析の初歩も含めた計量経済学の入門を学び終えた学部上級生や、計量経済学の方法論を専門としない大学院初年級の学生にとって、ADF-GLS 検定について理解し、ADF-GLS 検定を実証分析においてもっと利用できるようになるための、きっかけになれば幸いである。

## 付記

小生が小稿を脱稿する直前、一橋大学の黒住英司先生による展望論文「経済時系列分析と単位根検定：これまでの発展と今後の展望」(『日本統計学会誌』第 38 巻, シリーズ J, 第 1 号) が公刊された。同論文は小稿と違い、初学者に向けて書かれたものではないが、ADF-GLS 検定についても解説が与えられており、同論文の公刊により、小生が小稿第 1 節にて記した、わが国における ADF-GLS 検定の周知状況も変わったと思われる。ADF-GLS 検定についてより詳しく知りたい読者は、ERS に当たられる前に、同論文を読まれることをお勧めしたい。

## 付録

ここでは、小稿本文 2 節 (14) から (15) への書き換えについて説明する。

ラグ多項式は、ラグ演算子を数値を表わす変数と同じように扱うことができるので、(14) の左辺における、ラグ多項式の積の部分は次のようになる。

$$\begin{aligned} & (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p) (1 - \alpha L) \\ & = 1 - (\alpha + \phi_1) L - (\phi_2 - \alpha \phi_1) L^2 - (\phi_3 - \alpha \phi_2) L^3 - \cdots \end{aligned}$$

$$-(\phi_p - \alpha\phi_{p-1})L^p - (-\alpha\phi_p)L^{p+1} \quad (\text{A1})$$

と展開できる。(A1) の右辺の各項の小括弧の中身について、左から順に下のように定義する。

$$\psi_1 \equiv \alpha + \phi_1$$

$$\psi_2 \equiv \phi_2 - \alpha\phi_1$$

$$\psi_3 \equiv \phi_3 - \alpha\phi_2$$

$$\dots$$

$$\psi_p \equiv \phi_p - \alpha\phi_{p-1}$$

$$\psi_{p+1} \equiv -\alpha\phi_p$$

ここで定義された記号  $\psi_i$  ( $i = 1, \dots, p+1$ ) を用いて、(A1) の右辺を、やや技巧的ではあるがつぎのように書き換える。

$$\begin{aligned} & 1 - \psi_1 L - \psi_2 L^2 - \psi_3 L^3 - \dots - \psi_p L^p - \psi_{p+1} L^{p+1} \\ &= 1 - L - \{(-1 + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \dots + \psi_p + \psi_{p+1}) \\ &\quad - (\psi_2 + \psi_3 + \dots + \psi_p + \psi_{p+1})\} L - \{-(\psi_3 + \psi_4 + \dots + \psi_p + \psi_{p+1}) \\ &\quad + (\psi_2 + \psi_3 + \dots + \psi_p + \psi_{p+1})\} L^2 - \dots \\ &\quad - \{-(\psi_{p+1}) + (\psi_p + \psi_{p+1})\} L^p - (\psi_{p+1}) L^{p+1} \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

そしてさらに、(A2) の右辺の各小括弧の中身について、以下のように定義する。

$$a_0 \equiv -1 + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \dots + \psi_p + \psi_{p+1}$$

$$-a_1 \equiv \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \dots + \psi_p + \psi_{p+1}$$

$$-a_2 \equiv \psi_3 + \psi_4 + \dots + \psi_p + \psi_{p+1}$$

...

$$-a_{p-1} \equiv \psi_p + \psi_{p+1}$$

$$-a_p \equiv \psi_{p+1}$$

この定義を用いて (A2) の右辺を次のように書き換えていく。

$$\begin{aligned} & 1 - L - (a_0 + a_1)L - (a_2 - a_1)L^2 - (a_3 - a_2)L^3 - \dots \\ & \quad - (a_p - a_{p-1})L^p - (-a_p)L^{p+1} \\ & = 1 - L - a_0L - a_1L + a_1L^2 - a_2L^2 + a_2L^3 - a_3L^3 + \dots \\ & \quad + a_{p-1}L^p - a_pL^p + a_pL^{p+1} \\ & = (1 - L) - a_0L - (a_1L + a_2L^2 + a_3L^3 + \dots \\ & \quad + a_{p-1}L^{p-1} + a_pL^p)(1 - L) \end{aligned} \tag{A3}$$

(A3) の最右辺は (A1) の左辺の書き換えであるから、本文 2 節 (14) の左辺は、

$$\begin{aligned} & (1 - \phi_1L - \phi_2L^2 - \dots - \phi_pL^p)(1 - \alpha L)u_t \\ & = \{(1 - L) - a_0L - (a_1L + a_2L^2 + a_3L^3 + \dots \\ & \quad + a_{p-1}L^{p-1} + a_pL^p)(1 - L)\}u_t \\ & = \Delta u_t - a_0u_{t-1} - a_1\Delta u_{t-1} - a_2\Delta u_{t-2} - \dots - a_p\Delta u_{t-p} \end{aligned} \tag{A4}$$

と書くことができる。(A4) の最左辺と最右辺を見比べれば、(14) から (15) への書き換えができることがわかる。

なお、 $a_0$  の定義と  $\psi_i$  ( $i = 1, \dots, p+1$ ) の定義から、

$$\begin{aligned} a_0 & \equiv -1 + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \dots + \psi_p + \psi_{p+1} \\ & = -1 + (\alpha + \phi_1) + (\phi_2 - \alpha\phi_1) + (\phi_3 - \alpha\phi_2) + \dots \\ & \quad + (\phi_p - \alpha\phi_{p-1}) + (-\alpha\phi_p) \end{aligned}$$

$$= (\alpha - 1)(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)$$

であることもわかる。

#### 参考文献

- Davidson, Russel and James G. MacKinnon (2004), *Econometric Theory and Methods*, Oxford University Press.
- Dickey, David A., and Wayne A. Fuller (1979), “Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root”, *Journal of American Statistical Association*, Vol.74, pp.427–431.
- Elliott, Graham, Thomas J. Rothenberg, and James H. Stock (1996), “Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root”, *Econometrica*, Vol.64, pp.813–836.
- Fuller, Wayne A. (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley.
- Fuller, Wayne A. (1996), *Introduction to Statistical Time Series* (2nd ed.), Wiley.
- Greene, William H. (2003), *Econometric Analysis* (5th ed.), Prentice-Hall.
- Hayashi, Fumio (2000), *Econometrics*, Princeton University Press.
- Hamilton, James D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- 森棟公夫 (1999), 『計量経済学』東洋経済新報社.
- 坂野慎哉 (2006), 「ADF 検定の検出力について」, 『現代経済学の最前線』, 早稲田大学産業経営研究所, pp.56–68.
- 山本拓 (1988), 『経済の時系列分析』創文社.