

外 92-13

早稲田大学大学院理工学研究科

博士論文概要

論文題目

固有関数による
板の解析に関する研究

申請者

石川 清志

Kiyoshi Ishikawa

平成 4 年 6 月

理 1573 (1833)

弾性論の基礎的知識に基づいて、力学における現象のとらえ方と系統的な解析の方法を探究することは工学的応用面、ならびに力学の創造的発展の基礎として重要であり、その有用性は等しく認められるところである。

計算機の大型化、高速化に伴って、有限要素法、境界要素法といった数値解析法がめざましい勢いで導入されるようになった。これらの解析法によれば、近似解ではあるが、境界が複雑な形のときでも容易に解を得ることができる。解の近似度を高めるには要素の間隔を狭くすることになるが、その場合解くべき連立方程式の次数が増加して、解を求めることが加速度的に困難になる。このことは少し前までは大きな問題であった。今日においても、空間に対して有限要素法、時間に対して差分法を用いた動力学の問題では、解を発散させないようにするために高速計算機でも長い処理時間を要する。

連続体力学の弾性論は塑性理論、粘弹性理論、あるいは有限変位理論への橋渡しとして重要であり、今日でも物体の破壊機構を解明するためにはより精緻な応力計算が切望されている。

本研究は、連続体力学の板の問題について、固有関数を用いて系統的に解析する一解法を提示し、固有関数の性質、物理的意味について論じる。それは、板の静力学、動力学の問題に対して、系統的な固有関数解析を適用すると、支配方程式が連立偏微分方程式となる場合でも境界条件、さらには初期条件のもとで直接的に、しかも精緻に解けるという特徴を有する。動力学の問題では、物体はすべて粘性減衰を有する Voigt 体とし、衝撃荷重等による過渡現象に注目する。数値計算結果から、荷重に対する力学的特性を述べ、併せて解の妥当性、その精度について考察する。

本論文は 7 章から構成されており、各章の内容の概略を以下に記す。

第 1 章では、本研究の位置づけを明らかにするとともに、研究の目的、およびその内容の概略を述べる。その中で、力学における現象のとらえ方と、系統的で精緻な解析の方法を探究することの必要性を論じ、解析に関する基本的な考え方を述べる。また、解の誘導に関しては支配微分方程式と境界条件の関係や、変位ポテンシャル理論、更には偏微分方程式から常微分方程式へ引き下げる積分変換等についても述べる。

第 2 章では、固定矩形薄板の静力学曲げ問題に複素固有関数を導入し、重調和方程式、あるいは変形重調和方程式が固定の境界条件のもとで精緻に解ける解法について述べる。初めに、横荷重を受ける 4 辺固定矩形板の曲げ問題をとりあげ、複素固有関数解析の基本的な特徴を示し、併せてその有用性を述べる。それは、数学的に精緻なかたちで重調和方程式を固定の境界条件のもとで解くもので、その解を表す固有値方程式は必然的に複素根をとる。このように複素固有関数になることにより過不足なく境界条件を受け入れる自由度を持つことになる。さらに、複素固有関数は関数の直交性を有しないために、別の直交関数である Fourier 級数を導入し、複素固有関数を展開して解き、すべての条件を満足する解を得る。

統いて、圧縮あるいは引張の一様面内力と、横荷重を受ける固定矩形板の曲げ問題に複素固有関数を適用し、その有効性を検討する。この問題の支配微分方程式は変形重調和方程式として表され、たわみと横荷重の関係は線形をとるもの、面内力に対しては非線形となる。解は支配微分方程式の同次解と、横荷重に依存する特解の和で表す。同次解には複素固有関数を用い、特解には 3 種類の解析法による解、すなわち、Giencke 理論による長柱の座屈に現れる

固有関数 (Case I)、梁の自由振動に現れる固有関数 (梁関数、Case II)、および特解の一般解を直接求め Fourier 級数で展開する方法 (Case III) を適用する。圧縮面内力が作用する場合、面内力によって複素固有関数は実数の固有値をとることもある。数値計算では、矩形板の対向 2 辺は固定と限定し、これと直交する他の対向 2 辺には固定、単純支持、あるいは自由が現れる問題について検討する。また、圧縮面内力が作用する板の弾性曲げ座屈問題を検討するときでも、複素固有関数解析によれば容易にその座屈値が求められることを示している。

第 3 章では、粘性減衰を有する Voigt 体の固定矩形薄板の曲げ振動問題に対し、Giencke 理論に従う固有関数 (梁関数) と、Stokes の方法による固有関数を組み合わせた固有関数解析を示し、その解析的特徴を論じる。固定の境界条件を有する問題に有効と思われる Giencke 理論の梁関数を導入すると、Voigt 体の運動方程式は変数分離されて偏微分の階数を引き下げることができる。さらに、Stokes の方法による固有関数解析を適用すると、時間のみの常微分方程式に引き下げられ、初期条件を用いて解かれることになる。結局、二種類の固有関数を適用すると運動方程式は空間の二変数それぞれの常微分方程式と時間の常微分方程式に分離され、それぞれ対応する境界条件や初期条件の下で解けることになる。梁関数は自由以外の境界条件に適用できる汎用性があり、単純支持板の Lévy 解とほとんど同様に処理できる容易さをもつ。また、粘性減衰を表す項として、運動方程式には時間の 1 階微分演算子が含まれるが、この場合には Stokes の方法による固有関数解析が有効である。それは空間の座標関数を基として変数分離するもので、すべて実数の範囲で解析される。しかも座標関数は弾性体の自由振動に現れる正規関数であり、直交性を有する。この直交性を利用することにより、運動方程式は空間と時間の常微分方程式に分離され、それぞれ境界条件、初期条件を用いて解けるという特徴をもつ。数値計算では、ステップ型衝撃荷重に対する過渡現象と、周期性調和荷重に対する共振現象と粘性係数の関係を考察する。

第 4 章では、有限厚円盤の動力学問題を取り上げ、運動方程式が連立偏微分方程式となる場合でも固有関数解析が有用であることを示し、境界条件、初期条件を用いて直接解ける解析的特徴を述べる。この問題では以下の事にも言及する。円盤の側面の条件を満足させようすると必然的に Bessel 関数による固有関数解析となる。運動方程式そのものは Bessel 関数の展開によって完全に変数分離され、それによって偏微分の階数を引き下げることができるが、一部の応力成分が Bessel 関数の展開では完全に変数分離することができない。したがって、その応力成分が境界条件に現れる問題は解くことができないことになる。このことは他の解析法でも全く同じである。しかし、円盤の厚さに比べて半径が大きい場合には、側面の条件を正確に満足しないものであっても、側面からいくらか内側に入った位置の挙動は近似的に求めることができる。Saint-Venant の原理から内側に入るほどその精度が上がることになる。

また、ステップ型集中衝撃荷重を受ける円盤について数値計算を行い、載荷点からいくらか離れた位置の変位、応力の擾乱から、以下の波動の過渡現象を考察する。静止の円盤の表面に集中荷重を衝撃的に負荷させると、載荷点を中心とした半円球状の波面をもつ波動が誘起され、それが放射状に伝播する。観察する注目点では、静止のゼロ状態から先行横波の直接到達によって変位は不連続的に急変し、急激に立ち上がる。応力も鋭い波頭を表す。後行横波の直接到達によっても変位は再び急変し、応力は尖頭波となって現れる。さらに、境界面からの反射波によっても変化

が起り、複雑な波動の擾乱を表す。弾性体の挙動は、はっきりとした典型的な波動の擾乱を表すのに対して、粘性減衰を有する Voigt 体では全体的に緩慢な運動を表し、弾性体の運動のおよそ中心を通る形態となる。

第5章では、衝撃荷重を受ける無限厚板（あるいは層）の過渡現象を論じる。これは前章の有限厚円盤の半径を無限大にした動力学問題である。無限に大きい物体の場合、前章までの有限物体と異なり、その解は積分形式の解をとる。円柱座標で表される Voigt 体の運動方程式を Hankel 変換すると、その運動方程式には時間の 1 階微分演算子が含まれるので、ここでも Stokes の方法による固有関数解析を用いる。したがって、積分変換と固有関数を組み合わせた解析となるが、解析的に矛盾なく解ける解析過程を明らかにする。無限に広がる厚板では、縦波、横波による擾乱の現象は無論、この他に Rayleigh 波と呼ばれる表面波による擾乱の過渡現象をも明らかにできる。集中衝撃荷重を受ける厚板について数値計算を行い、載荷点で誘発された縦波、横波が伝播し、厚板内のある注目点に到達したときに起こる過渡現象を考察する。すなわち、波動の到達によって起こる変位の急変や、応力の尖頭波を調べる。また、載荷点から離れた位置に注目したとき、Rayleigh 波の到達によって起こる擾乱をも調べる。

第6章では、第5章で扱った問題の応用として、半無限体上の無限厚板（あるいは層）の動力学問題について、Hankel 変換と固有関数による解析の提示と、数値計算によって、衝撃荷重に対する過渡現象、すなわち、波動の伝播形態、反射、屈折現象を考察する。厚板と半無限体の接続境界面では変位の適合と応力の平衡を満足さるように解くことになるが、この問題では、厚板と半無限体の剛性率の比率によって波動の伝播特性が大きく異なる。半無限体の剛性率が高いときは、典型的な Love の層問題となる。

衝撃荷重の載荷点から離れた厚板、あるいは半無限体の注目点では波動の到達によって変位の急変や応力の尖頭波が現れる。それらの現象から、波動の到達時刻とその伝播経路、および半無限体との接続境界面で起こる反射現象や透過屈折現象について考察する。また、この問題では、伝播横波が接続境界面で反射されることによって新たに反射縦波を誘発させる、いわゆる SP 波の回折効果をも観察する。

第7章では本研究によって得られた成果を総括する。

以上、本研究は連続体力学の板の問題について、系統的な固有関数解析を適用して精緻に解くことができる一解法を提示したものである。特に、支配微分方程式が境界条件、あるいは初期条件のもとで直接的に解ける解析過程を明確にできたと考えられる。本論文では限られた問題しか扱わなかったが、汎用性を有する固有関数解析は複合薄板構造や、厚板の三次元非軸対称問題の解析に適用することが可能と思われる。