2445

早稲田大学審査学位論文(博士)の要旨

1996-8

早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Studies on Discrete Nonlinear
Integrable Systems
離散非線形可積分系に関する研究

申 請 者
辻 本 諭
Satoshi TSUJIMOTO

電気工学専攻・情報数理工学研究

1996 年 11 月

自然現象は一般的には非線形な現象であり，理論あるいは実験の両面からの活発な議論がなされており，電子計算機の発達とともに現在も拡大し続けている．自然現象を記述する非線形微分方程式の多くには解析的な解を与えることは不可能であるが，計算機を用いることにより，その振る舞いを数値的に知ることができるようになり，様々な興味深い現象が見出されてきている．

特に，ソリトンと呼ばれる現象は，物理的には“エネルギーが集中し，安定なかたまりとして伝播する波動”であり，数学的にはソリトンを記述する方程式は，非線形であるため解の重ね合わせができないにもかかわらず，無限個のパラメータを含む厳密解を持つことができる．この著しい性質を持つKdV方程式，戸田方程式，非線形シュレーディンガー方程式などの非線形な発展方程式は，無限自由度の可積分系と呼ばれ，その背後に豊かな代数構造を持つ事が明らかにされつつあり，現在も精力的に研究が進められている．

近年，計算機の発展により，離散系に対する研究が盛んになってきており，可積分系の分野においても，その代表的非線形微分方程式の離散化がなされてきた．与えられた微分方程式の大局的性質を保存するような離散化は一般には困難であり，素朴な離散化は元の系の性質を保存しないだけでなく，しばしば数値カオスを引き起こす．KdV方程式などの非線形可積分系にはタウ関数と呼ばれる線形微分方程式系の解の行列式で表示される解が存在する．線形系のレベルでのオイラー差分はタウ関数の自明でない離散化をもたらすが，これをもとの非線形方程式の変数のレベルでみれば，任意に大きな差分間隔について安定に振舞う離散方程式になっている．ルンゲ・クッタ法など通常の離散化とは異なる際立った性質である．

従来，“可積分系の離散化”という問題は，微分方程式の数値解析からの観点や，差分化された方程式それ自身の構造の単純さから興味を持たれてきた．しかし，近年，数理工学や数理物理学などの様々な分野において，離散非線形可積分系が現出していることが報告されてきており，連続系においてもいくらかの関連性は知られていたが，離散系の場合はより直接的な形で数値計算アルゴリズム，線形計画法，符号理論などのとの関連性が明らかになりつつある．これらの事実は可積分系の理論がそれら他の分野との融合をはかり，アルゴリズムなどの改良を促す可能性を秘めており，多角的な観点からの研究が活発に進んでいる．

無限自由度の可積分系を解析する手法として，逆散乱法，双線形化法，佐藤理論など様々な手

法があるが，Nソリトン解などの厳密解を構成する手法として，双線形化法が知られている．双線形化法とは，非線形発展方程式を適当な従属変数変換により，双線形方程式と呼ばれる方程式に変換し，この方程式に対し摂動計算を用いて厳密解を求めるものである．双線形化法および佐藤理論においては，可積分な非線形方程式は微分構造を持った代数的恒等式から構成されるとの観点に立っている．

本論文は，双線形化法および佐藤理論を用いることによって，種々の離散的非線形可積分系を導出し，数値計算アルゴリズムの背後にある数理に関する研究の成果をまとめた論文である．

本論文の第1章では，上記の背景について論じ，あわせて双線形化法および佐藤理論について紹介する．本章の最後に，本論文の構成を示す．

本論文の第2章では，行列式・パフィアンの基本的性質を紹介し，双線形方程式の基となる行列式・パフィアンの代数的恒等式について考察する．続いて，カソラチ行列式・離散化されたグラム型行列式のそれぞれに対し成立する行列式の恒等式を与え，離散化されたKP方程式のヒエラルキーを導出する．また，$2N$次のパフィアンで表現された離散BKP方程式の厳密解に関しても，パフィアンの恒等式より，離散化されたBKP方程式のヒエラルキーを導出する．この結果より，連続系と離散系の相違点は，行列式あるいはパフィアンの微分則と差分則の違いであり，双線形方程式が代数的恒等式に帰着できる点では変わりないことを明らかにする．

本論文の第3章では，前章で導出された離散KP方程式の双線形方程式を用い，適当な従属変数変換により，戸田格子方程式の2種類の離散化を導出する．続いて，数列の収束を加速するεアルゴリズムと等価なKdV方程式の離散化を与える．また，ロトカ・ボルテラ方程式の相互作用の項を拡張した方程式を紹介し，その離散化について議論する．この際，離散方程式の行列式表示を，離散系におけるバックルンド変換の理論を用い導出する．さらに，離散BKP方程式より離散沢田・小寺方程式，離散KP方程式系列より，離散化された非線形シュレーディンガー方程式を導出する．特に，パフィアンの恒等式から構成された離散沢田・小寺方程式は，任意パラメータを選択することにより，KdV方程式の離散方程式と捉えることも可能であり，またロトカ・ボルテラ方程式の拡張された方程式を得ることが出来る．

本論文の第4章では，佐藤理論の自然な拡張を考えることにより，離散可積分系を導出する新たな手法を提案する．本章では，最初に，離散化されたロトカ・ボルテラ方程式の高次保存量を

求め, 離散可積分系の背後にある連続変数との関連性を明らかにする. その後, 時間連続の時の戸田格子ヒエラルキーの理論の拡張により, 離散化された戸田格子方程式を導出する. 本手法により, 無限の系列の離散方程式が得られ, それらの従属変数変換および双線形方程式が導出することが可能となる. ここで得られる離散方程式の中には, 固有値計算の手法である LR法のアルゴリズムを多次元化した方程式も含まれる.

本論文の第 5 章では, 離散的な非線形可積分系の他の分野への応用について議論する. 本章では, 離散可積分系を元の微分方程式の数値解析的観点からシミュレーションを試みる. 続いて、固有値計算の手法である LR法を紹介し, 離散戸田方程式との対応を見る. 数列の収束を加速するεアルゴリズムを紹介し, 離散 KdV 方程式と等価であることを示す. また, より一般的な数列を加速する E変換を紹介し, 変形された離散ロトカ・ボルテラ方程式を用いることにより, この E変換が計算できることを示す.

本論文の第 6 章では, 本論文の結論を述べる.