早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

完全4次元処理に基づく
ソリッドモデリング技術に関する研究

申 請 者
吉田 典正
Norimasa Yoshida

機械工学専攻・CAD工学研究

1996年12月

ソリッドモデリングの技術は，３次元ＣＡＤ／ＣＡＭシステムの基礎となる技術である．ソリッドモデリングシステムでは，集合演算と呼ばれる立体どうしの和，差，積集合を算出する操作をコンピュータ内で行うことによって立体の作成を行う．集合演算は，立体どうしの干渉状態を数値計算を行って算出し，立体の位相を変更することによって行われる．集合演算は，ソリッドモデリングシステムの重要な機能の一つであるが，浮動小数点演算に伴う数値誤差等が原因となり数値計算の結果の位相構造の判定に矛盾が生じ，処理が途中で破綻する可能性を持っている．また，集合演算のアルゴリズムには，複雑さという問題点もある．このような問題点を背景に，幾何の定義・演算及び位相の定義・操作に関して同次処理及び双対処理を徹底させ，システムの信頼性を向上することを目的とした「完全４次元処理」（または「完全同次処理」ともいわれる）が提案されている．

そこで本研究においては，ソリッドモデリングシステムの信頼性を損なう原因となる集合演算が処理途中で破綻する問題，及び集合演算のアルゴリズムの複雑さに対して，「完全４次元処理」の考えを適用し，こららの問題を解決する手法を構築することを目的とした．

本論文は７章より構成されている．

第１章では，本研究の背景，目的を述べている．ソリッドモデリングに関する研究の流れと主要な成果を概観し，集合演算が処理途中で破綻する問題点を指摘し，本研究の基礎となる「完全４次元処理」について概説している．最後に，本論文の研究目的を述べている．

第２章では，幾何アルゴリズムの破綻の原因となる幾何判定の矛盾の例を示し，本研究の基礎となる「完全４次元処理」について述べている．まず，３直線の交差問題を例に，浮動小数点演算を用いることによって幾何判定が矛盾する例を示した．次に，幾何アルゴリズムの破綻を防ぐ主要な３手法について概説し，「完全４次元処理」に関して本研究と関連する事項について述べている．

第３章では，多倍長整数を要素とする任意の同次多項式の符号を効率的に判定する適応的符号判定処理の理論について述べている．幾何アルゴリズムでは，数値計算結果によって得られる値の符号を用いて位相構造の変更を行う．従って，式の符号を全てのデータ長を用いて計算するのではなく，上位のデータのみから判定することができれば演算の効率化を図ることができる．「完全４次元処理」では，幾何要素どうしの演算は一貫して４次元空間で行われる．３次元ユークリッド空間での幾何判定に利用される非同次多項式は，処理を４次元空間で行うと同次多項式となる．４×４行列式や４次の内積計算等の任意の同次多項式に容易に利用可能な適応的符号判定処理の理論を構築した．適応的符号判定処理の理論を４次の内積及び４×４行列式の計算に応用し，実際に考えられるデータに則して作成されたランダムなデータに関して，データ長が増加しても一定のデータ長で符号判定を行うことができることを確認した．４×４行列式の計算の場合には，ベクトル成分に関して，(1)すべての成分のデータ長を一定とした場合，(2)すべての成分のデータ長をランダムとした場合，(3)第４成分のデータ長のみ他成分よりも１倍長だけ短くした場合を対象とし，４×４行列式の符号判定処理に必要とされる計算時間及び符号判定の成功率を測定した．(1)の場合は上位データより計算した式の値の絶対値が誤差限界値を越える場合が多いデータであり，(2)は誤差限界値を越える場合が少ないデータ（すなわち内積の値が0に近くなるデータ）であり，(3)は実際の幾何計算に最も多く現れるデータである．(1)の場合には２倍長取り出すことで１００％の符号判定に成功したが，(2)の場合は，数値のデータ長及び取り出す倍長数に応じて符号判定の成功率は様々に変化した．(3)の場合には，２倍長で９７％の符号判定に成功した．これらの結果より，実際のデータは，４×４行列式を計算する場合には，整数値を表すデータ長が増加しても２倍長取り出すことによってほとんどの場合に符号判定を行えることが判明した．以上より，適応的符号判定処理は，データ長が増加してもほぼ一定の計算時間で処理できることが判明した．

第４章では，第３章で述べた理論を用いて半空間テストを行う際に必要な最少のビット数が，超平面と点の位置が変化することによってどのように変化するかを，超平面と点に対応するベクトルどうしのなす角に関連づけて述べている．超平面に対する点の半空間テストは，様々な幾何テストのなかでもっとも基本的なものの一つである．n次元空間における超平面と点は，それぞれn+1次元ベクトルで表現され，半空間テストは２つのベクトルの内積の符号によって判定される．そこで，本章では，整数を成分に持つn次ベクトルの内積に適応的的符号判定処理を応用した場合の符号判定に必要な最少のビット数に関して解析した．この結果，符号判定に必要な最少のビット数は，主に２つのベクトルのなす角に依存し，その他の依存要因としては次元やベクトルの位置などがあるが，これらの影響は次元が低い場合あまり影響のないことが判明した．次に，２次元の場合を例にとり，直線と点の位置変化によって対応するベクトルのなす角がどのように変化するのかを調べることにより，半空間テストに必要な最少のビット数の変化を調べた．この結果から，直線と点の位置変化によって，符号判定に必要な最少のビット数がどのように変化するのかを知ることができる．直線と点との垂直距離が同じである２組の直線と点に対して半空間テストを行う場合，原点に近い位置にある直線と点の組のほうが少ないビット数で符号判定を行うことができることが本章の結果から判明した．本章の結果は，第３章で提案した適応的符号判定処理を利用する際の基礎となるものである．

第５章では，整数演算を用いることによって数値的に破綻することのない集合演算アルゴリズムについて述べている．モデリングの過程では，基本ソリッドを構築し，座標変換し，集合演算を行うことによってソリッドを作成する．ソリッドの無矛盾性を定義し，無矛盾性をモデリングのあらゆる過程で保持することにって集合

演算の処理途中で破綻することのないアルゴリズムを作成する手法を提案している．まず，多面体で表現された円柱，トーラス，球などの基本ソリッドを整数で矛盾なく構築する手法を示した．次に，座標変換に関して，点ベクトルと座標変換行列の乗算が誤差なく行われれば，正確なアフィン変換となり，ソリッドの無矛盾性が保たれることを示している．平面式係数を変換する行列は，点に関する座標変換行列の随伴行列によって整数で正確に求めることができる．ソリッドが無矛盾であれば集合演算における幾何判定において矛盾を生じることはなく，数値計算の結果が原因となり決して破綻することが生じない．

同次処理に基づく整数演算を利用し，ソリッドの無矛盾性を保持することによって，数値的に決して破綻することのない集合演算を実現することができるが，数値を表現する最大のデータ長が一定範囲内である必要がある．そこで，モデリングの過程で最大のデータ長を制限する手法を述べている．これは，(a)集合演算では新たな頂点は生じるがあらたな平面は生じないことに着目し新たに算出される頂点はその回りの３平面の交差として算出し，(b)座標変換は基本ソリッドに対して１度だけ行い（実際には，連続する変換は合成し１つの変換行列にまとめられるので，座標変換が１度だけに制限されるものではない），(c)集合演算を行う一方のソリッドを基本ソリッドに制限することによって行うことができることを示している．

以上に述べた手法を用いて試験的に構築されたソリッドモデラで作成されたソリッドの例を示した．また，２つの角柱を原点を中心に配置し，一方を x, y, zの各軸に関して10^{-6}度づつ回転させ，集合演算を行った場合でも破綻することなく集合演算を行うことができることを示し，極限的な状況でも破綻することなく集合演算を行えることを確認した．

第６章では，ソリッドモデルのデータ構造であるQuarter Edge データ構造に稜線ループを導入し，このデータ構造を用いた集合演算のアルゴリズムについて述べている．Quarter Edge データ構造では，Face と Vertex に関して理論及びプログラムの両面において完全な双対性を実現することができ，双対な位相要素は同じデータ構造で表現され，双対なオイラーオペレータは同じ関数で実現される．このデータ構造では，Face と Vertex にはそれぞれ loop が存在している．しかし，Edge には loop がないために，稜線の回りに複数の領域がある形状を表現することができなかった．まず，稜線ループを導入した Quarter Edge データ構造を示し，このデータ構造を操作するオイラーオペレータを示している．次に，稜線ループを利用した集合演算のアルゴリズムについて述べている．このアルゴリズムは，従来のアルゴリズムと比較し，ソリッドの分割結合の際に複雑な分類を必要とするヌルエッジの挿入が不要となり，集合演算アルゴリズムをより簡潔にすることが可能となる．

第７章は結論であり，各章の成果をまとめている．