早稲田大学大学院理工学研究科

博　士　論　文　概　要

論　文　題　目

精度保証付き数値計算を用いた
非線形方程式の解の存在検証法
に関する研究

申　請　者
神　沢　　雄　智
Yuchi　KANZAWA

電子・情報通信学専攻
情報数理工学研究

1997年　12月

非線形現象を解析することは，理工学上重要なことであるにも関わらず，厳密な解析が可能な場合は稀であり，結果として，その現象をある数学的なモデルに置き換え，そのモデルに対する数値シミュレーションを行なうことが多い．

一方，浮動小数点演算を用いて数値計算を行なう時には丸め誤差が伴い，得られた結果の精度について数学的な保証が必ずしも得られないことは，かなり以前から指摘されている．また，反復式の極限が求めるべき値である反復法は，有限回の反復で出力を行うと，未収束のための誤差が生じる．動的非線形現象の解析を行なう場合などにはさらに，時間離散化誤差が生じる．このように，数値シミュレーションには，その各段階でさまざまな誤差が生じているにも関わらず，得られた結果を盲信することによって，非線形現象の解析が行なわれていることも多い．シミュレーションなどを通して確からしいと思われる事柄を見い出したとき，それを数学的に厳密に証明することが重要となる所似である．

ところが最近になって，従来困難だと思われていた丸め誤差を含む演算結果の精度を保証することが可能であることが明らかにされ始め，これにともなって，数値計算を行うと同時に得られた結果の精度を保証するという新たな観点から数値計算法全般を見直す動きが始まり，単なる丸め誤差の厳密評価という問題に留まらず，有限次元非線形連立方程式や関数方程式の解を，その存在・一意性・存在領域の保証付きで求める数値計算アルゴリズムも開発され始めている．このような数値計算法は，精度保証付き数値計算法と呼ばれており，今後の数値計算法のあるべき一つの姿として注目を集めている．

丸め誤差を厳密に評価するために，区間演算と呼ばれる手法がある．これは，全ての数値をそれを含む区間で表現し，区間同士の演算として，それぞれの区間に含まれる全ての数値に対して同じ演算を行なったときに得られる全ての値を含む区間を計算するものである．したがって，区間同士の四則演算や初等関数の引数を区間とした時のアルゴリズムが与えられれば，その組合せで表現される数式の値を，真の値を含む区間として計算することができる．これによって，連立一次方程式の解法などに対する，解が有限回の代数演算によって表現されることに基づく直接解法にたいして，精度保証付き数値計算を行なえることになる．

非線形方程式に対しては，一般に解を有限回の代数演算で表現する式に基づいて求解する直接法を適用することはできないので，Newton 法などの反復法が用いられるが，この反復法の

過程を区間演算に置き換えても近似解の含まれる区間が得られるだけで真の解の存在に関する情報は必ずしも得られない．そこで，与えられた方程式を同値な不動点問題に置き直し，不動点定理の成立条件を有限回の区間演算を用いて確認することになる．

本論文は，上に述べた現状を踏まえて，精度保証付き数値計算を用いた有限次元非線形方程式の解の存在検証法に関し，著者の行った研究成果をまとめたものである．

本論文の第 1 章では，上記の背景・目的について論じる．本章の最後に，本論文の構成を示す．

本論文の第 2 章では，精度保証付き数値計算の主要な道具である区間演算の基本的性質と区間演算を用いた非線形方程式の解の存在検証法の一つである Krawczyk 法を紹介する．

本論文の第 3 章では，有限次元の非線形方程式

$$f(x) = 0, \quad f : X \subset \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n \tag{1}$$

に対して，与えられた超直方体領域内の全ての解を精度保証付きで求め，有限ステップで終了するアルゴリズムについて述べる．この方程式の全ての解を求めることは回路シミュレーションなどの様々な分野において重要な問題となる．区間解析を用いる方法において，従来は多くが Moore の方法に基づいているが，その方法によって有限ステップで全ての解を求めることは必ずしも保証されないことが知られている．この章では，Moore の方法を改訂した非線形方程式 (1) の超直方体領域 $T \subset X$ 内の全ての解を精度保証付きで求めるアルゴリズムを提案する．そして，適当な条件の下で，提案されたアルゴリズムが有限ステップで停止することが数学的に証明されることを示す．

第 4 章では，定義域の次元が値域の次元よりも高い非線形関数 $f : D \subset \boldsymbol{R}^l \to \boldsymbol{R}^n$，$(l > n)$ を用いた方程式

$$f(z) = 0 \tag{2}$$

に対して，与えられた超直方体領域内の全ての解を精度保証付きで求め，有限ステップで終了するアルゴリズムについて述べる．このような方程式の全ての解を求めることもまた，様々な分野において重要な問題となる．本章では，非線形方程式 (2) の超直方体領域 $T \subset D$ 内の全ての解を精度保証付きで求めるアルゴリズムを提案する．そして，適当な条件の下で，提案されたアルゴリズムが有限ステップで停止することが数学的に証明されることを示す．

第 5 章では，有限次元の非線形方程式の解曲線の存在検証法について述べる．有限次元非線形方程式

$$f(x) = 0 \quad f : \boldsymbol{R}^{n+1} \to \boldsymbol{R}^n \tag{3}$$

の解は，一般に 1 次元多様体として得られる．これを解曲線ともいう．この曲線を数値計算によって，しかも精度保証付きで求めることは様々な分野において重要な問題となる．本章では，解曲線の存在検証法を示す．具体的には，区間解析と精度保証付き数値計算を利用して非線形方程式の解曲線が存在するための十分条件 (陰関数定理の成立条件) を検証することにより，解曲線の存在領域を計算する．また，この方法が適当な条件の下で有界閉領域内の解曲線に対して有限ステップで存在検証に成功することを数学的に証明する．

第 6 章では，有限次元の非線形方程式

$$f(x) = 0, \quad f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n \tag{4}$$

の特異解の存在を数値的に検証する問題について考察する．特異解を計算する一つの方法は，その特異性を解消することであり，Bordering Method として知られており，元の方程式の特異解が正則解となるような拡大方程式が提案されている．この拡大方程式にたいして，従来の正則解を解くための方法を用いることを考えるのは自然である．しかし，拡大方程式は，元の方程式に新しい変数を加えることが必要である．この新しく加えられた変数が 0 に等しい時に，拡大方程式の解は元の方程式の特異解となる．通常，ある変数の値が 0 であることを数値的に判定することは決定不能であることが知られている．本章では，以上の考察を踏まえて，方程式 (4) の近似的特異解という概念が導入されている．これは，方程式 (4) に新しく加えられた変数のノルムが，予め決められた値よりも小さい時の拡大方程式の真の解である．そして，近似的特異解の存在検証法を提案している．さらに，新しい拡大方程式を提案している．この拡大方程式は，様々の余次元と重複度を持つ特異解に対して適用できることを示すとともに，この拡大方程式を用いた近似的特異解の検証法を提案している．最後に，この検証法が十分良い近似解に対して必ず検証に成功することを，数学的に証明している．

本論文の第 7 章では，本論文の結論を述べる．