早稲田大学大学院理工[illegible]

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Multi-Ergodic Motions in Nearly Integrable Hamiltonian Systems

近可積分ハミルトン系における多重エルゴード運動

申 請 者
菊地 康裕
Yasuhiro Kikuchi

物理学及び応用物理学専攻
統計物理学研究

平成 2 年 1 2月

決定論的方程式から得られる予測不可能な運動は，一般にカオスと総称されている．近年になって，このような現象が自然科学，工学，医学など分野を越えた様々な問題の中に見いだされ，基礎あるいは応用の面でも盛んに研究されるようになってきている．そのなかでもハミルトン系におけるカオスの研究は，統計力学の基礎をなすエルゴード問題を起源とする古い歴史をもった分野である．

天体力学における3体問題が求積法によって解けないことは，Bruns によりすでに前世紀から知られていた．さらに Poincaré は，積分可能な系に摂動が加わった場合，一般にはハミルトニアン以外に摂動パラメータに対して解析的な積分は存在しないことを示した．彼はまた，そのような系においてきわめて複雑な解曲線が存在すること，すなわち今日でいうカオスが存在することを予言していた．Fermi は，この結果を拡張して，自由度2以上の系では，摂動パラメータに対して解析的であるような孤立した不変曲面も存在しないということを示し，従って，軌道はエネルギー一定の面上をエルゴード的に運動すると主張した．しかしながら，それとは逆に Kolmogorov の理論により，摂動項が充分小さな系，すなわち近可積分系においては多くの積分曲線（＝不変トーラス）が壊れないで残りうることが指摘され，後に Arnold と Moser によって独立に証明された．このようなトーラスはＫＡＭトーラスと呼ばれ，その上の軌道は準周期的である．以上の結果は，近可積分系における位相空間が，複雑な解曲線とＫＡＭトーラスという大きく性質の異なる2種類の部分により構成されていることを意味している．

今世紀に入ってから，計算機の出現で方程式を数値的に解くことが可能となった．Henon と Heiles は天体力学から導かれる系を数値的に解くことによって，前世紀から予測されていたこれらの現象を示し，以後のこの分野における研究の先駆者となった．その後の数値計算を中心とした研究により，近可積分ハミルトン系のカオス運動がロングタイムテイルおよび非定常性をもつことが明かにされてきた．それらは，エルゴード論で扱われる強い不安定性をもつ力学系には現れない新しい性質である．ハミルトン系におけるストカスティック層とＫＡＭトーラスの境界には軌道が淀む領域が存在している．淀み層は，カオス軌道に非定常性をもたらすような強い不変測度を持つものと予想されている．我々は，このように多数の強い不変測度が共存するようなエルゴード運動を，多重エルゴード運動と呼んだ．本研究は，近可積分ハミルトン系におけるカオス軌道の多重エルゴード性に関する研究である．

本論文は，次の6つの章により構成されている．

第1章はイントロダクションである．カオスの特性量やエルゴード性など従来のカオス研究で用いられてきた重要な概念に加えて，本論文のキーワードである非定常性および多重エルゴード性といった新しい概念を説明する．

第2章では，ハミルトン系に関して，これまでに知られている重要な結果を解

説する．

はじめに，ハミルトン系の基本的な性質を述べ，それから，可積分な系に小さな摂動が加わった系，すなわち近可積分系を考える．簡単のため自由度が2の場合を取り扱うことにして，切断面の方法から2次元保測写像を導出する．ここで，近可積分系に関するＫＡＭの理論を2次元保測写像に適用して解説する．また，本研究においてモデルとして使用するスタンダードマッピングを紹介する．

次に，淀み現象に関する2つの理論的な説明を紹介する．ひとつは，ＫＡＭアイランドの分布が自己相似的であることを仮定することによって，各々のＫＡＭアイランドのまわりにおける淀み運動を説明するものである．もうひとつは，スケーリング理論的なアプローチであり，Nekhoroshov の定理による近可積分系の軌道の安定性に関する評価式から，ＫＡＭトーラス表面における淀み運動の性質を示す方法である．これらふたつの理論は，いずれも，軌道がＫＡＭトーラスのまわりに滞在する時間がべき分布に従うことを導く．ハミルトン系のカオスでしばしば観測されるロングタイムテイルや非定常性は，淀み現象によるものであると理解される．

ここで示した理論には，仮定や理想化などの不十分な点が含まれており，系に対する正しい知識が欠けている．理論を発展させる為には，これらのことを補うことが不可欠である．そのような点から，実際の系に対する数値実験が意義を持つ．

第3章では，大域的なカオス軌道が淀み層によって受ける影響について，数値実験により得られた結果を述べる．パワースペクトルの特異性およびその指数スペクトル，局所 Lyapunov 指数の分布の形状および相空間での軌道との対応などが明らかになった．

第4章では，局所 Lyapunov 指数の揺らぎが持つ情報から，多重エルゴード性を特徴付けることを試みる．

局所 Lyapunov 指数は，接ベクトル dx_n が dx_{n+1} へうつる時の引き延ばし率 $\lambda_n = \ln|dx_{n+1}|/|dx_n|$ によって計算する．λ_n の時間平均が中心極限定理に従わないのは，時系列に強い相関が存在するからであると思われる．多重エルゴード性の直接的な証拠は，自己相関関数あるいはパワースペクトル密度関数によって得ることができる．数値実験によりパワースペクトルを求めた結果，低周波領域において 1/f 型のスペクトルを持つことが確認された．

λ_n のロングタイムテイルは淀み運動と関係している．淀み層における λ_n の値は，カオス領域の時に比べてずっと小さな値となる．1/f スペクトルは，軌道が淀み層に滞在している間，λ_n がゼロに近い値を取り続ける為に起こるものと考えられる．これを確かめる為に，適当な閾値を定めてそれ以下の状態をＡ，それ以上の状態をＢと定め，λ_n が各々の状態に滞在し続ける時間 τ の分布を調べた．その結果，滞在時間分布が，Ｂにおいては指数型 $b(\tau) \sim e^{-\beta\tau}$ であるのに対して，Ａ

ではべき型 $a(\tau) \sim \tau^{-\alpha-1}$ となることがわかった．状態AとBは，それぞれ軌道が淀み層にいる状態とカオス層にいる状態に対応している．指数αは1より小さいので，Aにおける平均滞在時間が無限大に発散しており，λ_nは非定常性を持っている．このため，局所Lyapunov指数分布の最大確率を与える値λ_cが，観測時間Nに対して$N^{-\delta}$の様に減衰する．ここに，ふたつの指数は$\delta = 1 - \alpha$のようなスケール則で結ばれている．これらの結果から，新しい軌道不安定性の評価式$|dx_n| \sim |dx_0| e^{\lambda_A n^{\alpha}}$が得られる．

第5章では，semi-Markov過程を取り扱う．ロングタイムテイルをもつ時系列から得られるシンボル化された時系列は，semi-Markov過程によりモデル化されることが知られている．ここでは，前章で議論した，AおよびBの2状態を交互にとるような場合について考える．

はじめに，2状態semi-Markov過程$\sigma(t)$の時間平均$\Lambda_N = N^{-1}\int_0^N \sigma(t)dt$が従う分布を更新理論による解析によって求め，また，その基本的な性質を示す．

次に，前章で扱った過程に対応させて，AおよびBの待ち時間分布をそれぞれ$a(\tau) = \alpha\tau^{-\alpha-1}$および$b(\tau) = \beta e^{-\beta\tau}$で与える．これは，1/fスペクトルを示すような間欠的な時系列に対する確率過程モデルになっている．過程の性質は，指数αの領域によって3つに分けられる．$\alpha > 2$の領域では，Λ_Nの極限分布は正規分布であり，中心極限定理に対応している．また，$2 > \alpha > 1$の時には，指数αの安定分布へと収束することが示される．$1 > \alpha$においては，Aにおける平均滞在時間が発散するので，過程は非定常となる．極限分布は，$1 > \alpha > 1/2$では，指数$1/\alpha$の安定分布の右半分に等しく，また，$\alpha = 1/2$の時には正規分布の半分となる．さらに，$1/2 > \alpha > 0$では，単峰性を持たない単調減少するような分布関数が得られる．非定常領域$1 > \alpha$では，分布全体が観測時間Nの逆べき$N^{\alpha-1}$に比例してゼロに近づくことがわかる．これは前章で得られた実験結果を説明している．

最後に，ここで考えたsemi-Markov過程の漸近性を，ラージデビエーション理論の立場から整理して述べる．

第6章では，本論文全体のまとめと将来への展望に関する議論が述べられている．