内98-4

早稲田大学大学院理工学研究科

博士論文概要

論文題目

On Vassiliev invariants for algebraically split links

(代数的分離絡み目のヴァシリエフ不変量について)

申請者

岡本美雪

Miyuki Okamoto

数学専攻 トポロジー研究

1998 年 10 月
(西暦)

V.A. Vassiliev によって導入された結び目の Vassiliev 不変量は, J.S. Birman と X.-S. Lin によって組み合わせ的な定式化がなされている. また, 絡み目についても, 結び目の場合の自然な拡張として, T. Stanford によって定義されている.

L が代数的分離絡み目であるとは, 任意の 2 成分に対してその絡み数が 0 である場合をいう. H. Murakami は, このような絡み目に関する Jones 多項式の d 回微分は, 成分数が $d-1$ 以下の部分絡み目のみによる量で表せることを示している. 特に, 成分数が $d-1$ の部分絡み目によって決まる量は, その絡み目に関する Conway 多項式の d 次の係数であることも示されている.

Jones 多項式の d 回微分が d 型 Vassiliev 不変量であることはよく知られており, したがって次のような問題が考えられる.

問題. L を代数的分離絡み目, $v_d(L)$ を L の d 型 Vassiliev 不変量とするとき

- $v_d(L)$ を成分数が $d-1$ 以下の L の部分絡み目のみによる量で表せるか?
- さらに, 成分数 $d-1$ の L の部分絡み目で決まる量は, その部分絡み目に関する Conway 多項式の d 次の係数か?

成分数を固定した絡み目に関する d 型 Vassiliev 不変量全体がベクトル空間をなすことは一般に知られている. この空間の基底や次元を求めるという問題に関して, 特別な場合については既にいくつかの研究がなされている. 絡み目の d 型 Vassiliev 不変量全体の空間に関する基底は, $d=1, 2$ の場合は Murakami によって, $d=3$ の場合は T. Kanenobu, Y. Miyazawa, A. Tani によって与えられている. また, 得られた基底の線形和として $v_d(L)$ を表す等式も示されている. そこで L を代数的分離絡み目とし, これらの等式を見直すと, $d \leq 3$ の場合には上述の問題に対して肯定的な答えが得られる.

本論文では, 代数的分離絡み目の Vassiliev 不変量に関する等式を示し, 任意の $d (> 0)$ において問題を肯定的に解決する.

第 1 章

有向絡み目の複素数値不変量 v_d に対し, 次の式によって特異絡み目 (二重点を持つ絡み目) の不変量が得られる.

$$v_d \left(\begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \right) = v_d \left(\begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right) - v_d \left(\begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right).$$

$d+1$ 個以上の二重点をもつ特異絡み目については常に, その値が 0 であるような v_d を d 型 Vassiliev 不変量という. この条件は, d 個の二重点をもつ特異絡み目 L^d に関する不変量の値 $v_d(L^d)$ は埋め込みによらないと言い換えることができる. よって, $v_d(L^d)$ を考える際には, n 個の有向円周において, どの 2 点が同一視されることで L^d が得られるかということのみが問題となる. そこで, n 個の有向円周において, 同一の点となった 2 点を点線 (コードという) で結んだものをコード図といい, 特異絡み目 L^d をコード図を用いて表すことにする.

第 1 章では, 次の定理を証明する.

定理. v_d を有向絡み目の d 型 Vassiliev 不変量とする. 任意の順序付き, 有向, 代数的分離絡み目 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ に対して,

$$v_1(L) = v_1(\mathcal{O}^n),$$

$$v_2(L) = \sum_{i=1}^n v_2 \left(\begin{array}{c} \text{図} \end{array} \right) a_2(K_i) + v_2(\mathcal{O}^n),$$

$$v_3(L) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} v_3 \left(\begin{array}{c} \text{図} \end{array} \right) a_3(K_i \cup K_j) + \text{成分数が 1 以下の部分絡み目のみによる量},$$

$$v_4(L) = \sum_{1 \leq i < j < p \leq n} v_4 \left(\begin{array}{c} \text{図} \end{array} \right) a_4(K_i \cup K_j \cup K_p) + \text{成分数が 2 以下の部分絡み目のみによる量},$$

が成り立つ. 但し, $\mathcal{O}^n$ は成分数 n の自明な絡み目, $a_d(L)$ は L に関する Conway 多項式の d 次の係数とする.

つまり, $d \leq 4$ で前述の問題に対する肯定的な答えが得られたことになる. また, これまで 4 型 Vassiliev 不変量については, D. Bar-Natan によって, 結び目に関する不変量全体の空間の次元が明らかにされているだけであったが, この定理によって条件付きながら絡み目の 4 型 Vassiliev 不変量全体の空間の基底が具体的に与えられている.

$d \leq 3$ のとき, 不変量全体の空間の基底を求めるために, 前述の 4 氏は, 二重点を d 個以下もつような特異絡み目をすべてリストアップし, さらに特異絡み目に関する 2 種類の関係性を考慮するという方法をとっていた. しかし, この章では, M. Kontsevich によって導入された普遍 Vassiliev 不変量を用いることにより, 二重点を d 個もつ特異絡み目 (すなわち, コードを d 本もつコード図) のみをリストアップして考察することで定理の証明を行なう.

第 2 章

この章では, 任意の $d (> 0)$ で問題に対する肯定的な答えを与える, 代数的分離絡み目の Vassiliev 不変量に関する等式を示す.

$L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ を順序付き有向絡み目, $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ を L の各成分に付けられた添字の集合とする. 絡み目 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ と添字集合 $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \mathcal{N}$ ($i_1 < i_2 < \cdots < i_k$) に対して, $L^{\mathcal{I}}$ で $K_{i_1} \cup K_{i_2} \cup \cdots \cup K_{i_k}$ という L の部分絡み目を表すことにする.

次に $\{[i_{\alpha_1}, \dots, i_{\alpha_k}] \mid \forall i_{\alpha_\zeta} \in \mathcal{I}, \alpha_\zeta \neq \alpha_\eta \text{ for } \zeta \neq \eta\}$ という集合を考える. 添字の列 $i_{\alpha_1}, \dots, i_{\alpha_k}$ と $i_{\beta_1}, \dots, i_{\beta_k}$ が数珠順列として同じならば, k 個の添字の組としても同じ

$([i_{\alpha_1}, \dots, i_{\alpha_k}] = [i_{\beta_1}, \dots, i_{\beta_k}])$ と見做すことにし, その同値類の集合を $Q(I)$ と書くことにする.

定理. v_d を有向絡み目の d 型 Vassiliev 不変量とする. 任意の順序付き, 有向, 代数的分離絡み目 $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$v_d(L) = \sum_{\substack{I \subseteq \mathcal{N} \\ \#I=d-1}} \sum_{[\xi_1, \dots, \xi_{d-1}] \in Q(I)} v_d(D[\xi_1, \dots, \xi_{d-1}]) a_d(L^I) \\ + \sum_{k=0}^{d-2} (-1)^{d+k} \binom{n-k-1}{d-k-2} \sum_{\substack{I \subseteq \mathcal{N} \\ \#I=k}} v_d(L^I \cup \mathcal{O}^{n-k}), \quad d \geq 2;$$

$$v_1(L) = v_1(\mathcal{O}^n).$$

但し, $D[\xi_1, \dots, \xi_{d-1}]$ は

と, コードのついていない $n-d+1$ 個の有向円周 S^1 の排反和とする.

$v_d(D[\xi_1, \dots, \xi_{d-1}])$ は L によらない量である. したがってこの等式より, 任意の $d (> 0)$ において, 前述の問題が肯定的に解決されたことになる.

普遍 Vassiliev 不変量は, その値を複素数を係数とするコード図の多項式として得られる. 第 2 章では具体的にコード図のリストを作ることはせず, コードがどの有向円周についているかということに注目して, 普遍 Vassiliev 不変量の値におけるコード図の係数を考察することにより, 最終的には 5 種類のコード図のみ具体的に取り扱うことで, 等式の証明を行なう.

Jones 多項式 $V(L; t)$ に対して, $X(L; t) = V(L; t)/(t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}})^{n-1}$ とし, $X(L; t)$ の $t=1$ における d 回微分を $X^{(d)}(L; 1)$ とする. $X^{(d)}(L; 1)$ が d 型 Vassiliev 不変量であることから, 上の定理の系として次の等式が得られることも示す. これは本論文で扱った問題を考える動機となった等式である.

系. [Murakami] $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ を有向, 代数的分離絡み目とする. $d \geq 1$ のとき,

$$X^{(d)}(L; 1) = (-1)^{d+1} 12 \times d! 2^{-d} \sum_{\substack{I \subseteq \mathcal{N} \\ \#I=d-1}} a_d(L^I) \\ + \sum_{k=1}^{d-2} (-1)^{d+k} \binom{n-k-1}{d-k-2} \sum_{\substack{I \subseteq \mathcal{N} \\ \#I=k}} X^{(d)}(L^I; 1)$$

が成り立つ.