1998-5

早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

On radial solutions of semilinear elliptic
equations with a gradient term

（勾配項を含む半線形楕円型方程式の球対称解について）

申 請 者

廣 瀬　宗 光

Hirose　Munemitsu

数理科学専攻・非線形偏微分方程式研究

1998年　5月

この論文では，勾配項を含む半線形楕円型方程式

(1) $$\Delta u + \frac{1}{2}x \cdot \nabla u + \lambda u + |u|^{p-1}u = 0, \quad x \in R^n$$

の球対称解 $u = u(r)$ ($r = |x|$) が作る集合の構造を明らかにすること，すなわち常微分方程式の初期値問題

(IVP) $$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{n-1}{r}u_r + \dfrac{r}{2}u_r + \lambda u + |u|^{p-1}u = 0, & r > 0, \\ u(0) = \alpha \in (0,\infty), \quad u_r(0) = 0 \end{cases}$$

の解 $u(r;\alpha)$ が，パラメーター $n \geq 1, \lambda > 0, p > 1$ に応じてどのような振る舞いをするか決定することを目標とする．

初期値問題 (IVP) は，反応拡散方程式

(2) $$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = \Delta\psi(t,x) + |\psi(t,x)|^{p-1}\psi(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times R^n$$

の初期値問題 (初期条件 $\psi(0,x) = 0$, $x \in R^n$) について，ある条件の下で非自明解の存在を示すために Haraux と Weissler により導かれた (1982 年)．(2) の自己相似解

$$\psi(t,x) = t^{-\frac{1}{p-1}}u(x/\sqrt{t})$$

を考えると，$u(y) : R^n \to R$ は次の方程式を満たさなければならない：

$$\Delta u + \frac{1}{2}y \cdot \nabla u + \frac{1}{p-1}u + |u|^{p-1}u = 0, \quad y \in R^n.$$

この方程式をより一般化した (1) は "Haraux-Weissler 型方程式" と呼ばれる．Haraux と Weissler は球対称解を考察の対象とし，$n \geq 1, 0 < \lambda < n/2, (n-2)p < (n+2)$ ならば，解集合の中に無限遠で急速に減衰する正値解が存在することを示した．さらに，その一意性が成り立つことを予想したが，証明するには至らなかった．その後，Weissler をはじめ Atkinson，Peletier，Terman 等により (IVP) の各 α に対する解の挙動が調べられたが，十分な結果は得られていなかった．当研究では，未解決の部分について完全に解明することを目指す．

本論文は，2 つの章から構成される．

第一章では，(IVP) の正値解集合の構造について調べる．(IVP) の解 $u(r;\alpha)$ は初期値 α を出発後，正である限り単調減少するという性質に着目すると，次の二点について議論する必要がある．

(Ⅰ) $u(r;\alpha)$ は零点を持つか，すなわち，$u(z;\alpha) = 0$ なる $z \in (0,\infty)$ が存在するか．

(Ⅱ) $u(r;\alpha)$ が零点を持たない場合，$u(r;\alpha)$ の無限遠での漸近挙動はどうなるか．

従来の研究では，$\lambda > 0$ の場合と比較して $\lambda = 0$ のケースについてはまったく考察されていなかった．後者について以下の結果が成立する．

Theorem 1.1. $n \geq 3$ を仮定する．$\lambda = 0$ のとき，

(i) $1 < p < (n+2)/(n-2)$ ならば，以下を満たす $\alpha_0 \in (0,\infty)$ が一意的に存在する：
$\alpha \in (\alpha_0,\infty)$ ならば $u(r;\alpha)$ は零点を持ち，$\alpha \in (0,\alpha_0]$ ならば $u(r;\alpha) > 0$，$r \in [0,\infty)$ である．
また $u(r;\alpha_0)$ は零点を持たない解の中でもっとも速く減衰し，

$$u(r;\alpha_0) = O(r^{-n}\exp(-r^2/4)), \quad r \to \infty.$$

(ii) $p \geq (n+2)/(n-2)$ ならば，すべての $\alpha \in (0,\infty)$ に対して $u(r;\alpha) > 0$，$r \in [0,\infty)$ である．

また $\lambda > 0$ のとき，無限遠での漸近挙動は，Peletier, Terman & Weissler (1986 年) により詳しく調べられており，(IVP) の正値解は以下のように分類できる．

(i) $u(r;\alpha)$: crossing solution $\Longleftrightarrow$ $u(z;\alpha) = 0$ なる $z \in (0,\infty)$ が存在する．

(ii) $u(r;\alpha)$: slowly decaying solution $\Longleftrightarrow$ $u(r;\alpha) > 0$，$r \in [0,\infty)$ かつ $u(r;\alpha) \sim r^{-2\lambda}$，$r \to \infty$.

(iii) $u(r;\alpha)$: rapidly decaying solution $\Longleftrightarrow$ $u(r;\alpha) > 0$，$r \in [0,\infty)$ かつ $u(r;\alpha) \sim r^{2\lambda-n}\exp(-r^2/4)$，$r \to \infty$.

これらの分類から，パラメーター n, λ, p に応じて $u(r;\alpha)$ が crossing solution，slowly decaying solution，rapidly decaying solution のいずれになるのか，各 α に対して決定することが課題となる．まず $1 < p < (n+2)/(n-2)$ に対して，本論文では次の結果を証明することができた．

Theorem 1.2. $n \geq 3$，$0 < \lambda < n/2$，$1 < p < (n+2)/(n-2)$ を仮定する．このとき，$u(r;\alpha_0)$ が rapidly decaying solution となる $\alpha_0 \in (0,\infty)$ が一意的に存在し，各 $\alpha \in (0,\alpha_0)$ に対して $u(r;\alpha)$ は slowly decaying solution となり，各 $\alpha \in (\alpha_0,\infty)$ に対して $u(r;\alpha)$ は crossing solution となる．

この定理により，$n \geq 3$ の場合 Haraux と Weissler の予想は正しいことが判明した．また，Weissler の結果 (1986 年 : $n \geq 1, \lambda \geq n/2, p > 1$ ならば，各 $\alpha \in (0,\infty)$ に対して $u(r;\alpha)$ は crossing solution となる) を組み合わせると，$1 < p < (n+2)/(n-2)$ の場合は，正値解集合の構造が完全に解明されたことになる．

一方 $p \geq (n+2)/(n-2)$ に対しても，Peletier, Terman & Weissler，Atkinson & Peletier(いずれも 1986 年) によって得られていた結果を拡張することに成功した．

Theorem 1.3. $n \geq 3$，$0 < \lambda < \max\{1, 3n(n-2)/8(n-1)\}$，$p \geq (n+2)/(n-2)$ を仮定する．このとき，各 $\alpha \in (0,\infty)$ に対して $u(r;\alpha)$ は slowly decaying solution となる．

さらに，$(\lambda,p) \in [\max\{1, 3n(n-2)/8(n-1)\}, n/2) \times [(n+2)/(n-2),\infty)$ がある条件を満たすときにも Theorem 1.3 と同様の結論が得られた．なお一連の定理を証明するために，線形方程式 $\varphi_{rr} + \{(n-1)/r + r/2\}\varphi_r + \lambda\varphi = 0$ の解について詳しく調べる必要がある．この方程式の解 $\varphi(r)$ の零点の有無，無限遠での漸近挙動，さらに $r\varphi_r(r)/\varphi(r)$ の $r \in [0,\infty)$ での有界性などを議論し，これらの結果を踏まえて柳田一四ツ谷による解構造分類定理を適用する．

第二章では，複数個の零点を持つ(IVP)の解(以下振動解と呼ぶ)について考え，その零点の個数と無限遠での漸近挙動について調べる．議論の都合上，この章では

$$\lambda = \frac{1}{p-1}$$

に制限して考える．Peletier等によって得られた漸近挙動の結果は振動解についても成立することに注意すると，(IVP)の解 $u(r;\alpha,p)$ は以下のように分類できる．

(i) $u(r;\alpha,p)$: k-slowly decaying solution $\Longleftrightarrow$ $u(r;\alpha,p)$ は，$(0,\infty)$ 内に k 個の零点を持ち，$u(r;\alpha,p) \sim r^{-2/(p-1)}$，$r \to \infty$.

(ii) $u(r;\alpha,p)$: k-rapidly decaying solution $\Longleftrightarrow$ $u(r;\alpha,p)$ は，$(0,\infty)$ 内に k 個の零点を持ち，$u(r;\alpha,p) \sim r^{2/(p-1)-n}\exp(-r^2/4)$，$r \to \infty$.

これらの分類から，パラメーター n, p に応じて $u(r;\alpha,p)$ が k-slowly decaying solution，k-rapidly decaying solution のいずれになるのか，各 α に対して決定することが目標となる．振動解については，Weissler(1986年)により k-rapidly decaying solution の存在は議論されたが，一意性については未解決であった．これに関連して得られた結果は，以下のようにまとめられる．

Theorem 2.1. $n \geq 1$ を仮定する．さらに，以下を定義する：

$$\begin{cases} p_k := 1 + \dfrac{2}{n+2k}, \quad k = 0,1,2,\cdots, \\ p_{-1} := \dfrac{n}{n-2} \quad \text{for} \quad n \in (2,\infty), \quad p_{-1} := \infty \quad \text{for} \quad n \in [1,2]. \end{cases}$$

(i) 各 k に対して，$p \in (p_k, p_{-1}]$ 上で定義される C^1 級関数 $\alpha = \alpha_k(p) > 0$ が存在し，$u(r;\alpha_k(p),p)$ は k-rapidly decaying solution となる．

(ii) 各 $p \in (p_k, p_{k-1}]$ に対して，実数列 $\{\alpha_i(p)\}$ は

$$0 < \alpha_k(p) < \alpha_{k+1}(p) < \alpha_{k+2}(p) < \cdots \to \infty$$

を満たし，$\alpha \in (0, \alpha_k(p))$ に対して $u(r;\alpha,p)$ は k-slowly decaying solution となり，$\alpha \in (\alpha_i(p), \alpha_{i+1}(p))$ $(i = k, k+1, k+2\cdots)$ に対して $u(r;\alpha,p)$ は $(i+1)$-slowly decaying solution となる．

この定理の証明には，まず各 p について十分小さい α に対する $u(r;\alpha,p)$ の振る舞いを調べなければならない．そのために (p,α) 平面における k-rapidly decaying solution の自明解からの分岐という観点からの解析がポイントとなる．