早稲田大学大学院理工学研究科

博　士　論　文　概　要

論　文　題　目

On the unit groups generated by special values of analytic functions

解析関数の特殊値で構成される代数体の単数群について

申　請　者

伊藤　剛司

Tsuyoshi　Itoh

数理科学　数理哲学

2001年12月

解析関数の特殊値を用いて代数体のアーベル拡大体を構成せよ、といういわゆる「Hilbertの第12問題」は20世紀において大きく発展した。基礎体が有理数体または虚2次体である場合は古典的に良く知られている理論があるが、基礎となる体が高次のCM体（総実代数体の総虚2次拡大体）である場合も、高次元虚数乗法論により詳しく調べられている。

本論文では、これら解析関数の特殊値で生成されるような代数体のアーベル拡大体の単数について考察している。このような単数の研究は類体の構成問題に関連するだけでなく、代数体の単数群という整数論において非常に重要な対象を研究するための足がかりにもなると考えられる。

基礎となる体が有理数体の場合は、1の冪根を用いて構成される単数（円単数）が存在している事は良く知られており、この円単数のなす群は有理数体上の実アーベル拡大体のイデアル類群と密接な関係を持っている。または基礎となる体が虚2次体である場合にも同様に楕円関数または保形関数の特殊値で生成されるような単数が存在している事が知られている。しかし、基礎体が一般の代数体である場合には、このような単数の存在は一般には知られていない。

第1章では、虚2次体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大における modular unit の性質について考察している。modular unit とは、前述した保形関数の特殊値により構成される虚2次体上のアーベル拡大体の単数である。

p を奇素数、k を虚2次体とし、$K=\bigcup_{n=0}^{\infty}k_n$ を k 上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする。このとき、K/k が正規 p 整数底と持つとは、任意の n に対して k_n の p 整数環 $O_{k_n}[1/p]$ が $O_k[1/p][\mathrm{Gal}(k_n/k)]$ 加群として free かつ rank 1 である事として定義する。与えられた代数体の全ての $\mathbb{Z}_p$ 拡大が正規 p 整数底を持つかどうかは、整数論の重要な予想とも結びついており、意味のある問題である。この問題に関して、小松啓一氏は「虚2次体の任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大は (p) を法とする ray class field まで持ち上げてやれば正規 p 整数底を持つ」という事を証明した。

これに対し、(p) を法とする ray class field よりも次数の低い体に持ち上げた場合にも同様の結果が成立することを証明したのが第1章の最初の結果である。

定理 1　K/k を任意の $\mathbb{Z}_p$ 拡大、H を k の Hilbert p-class field とする。このとき、「$p=3$ であり、かつ $k=\mathbb{Q}(\sqrt{-3d})$ で $d\equiv 1 \pmod 3$」の場合を除いて、持ち上げられた $\mathbb{Z}_p$ 拡大 HK/H は正規 p 整数底を持つ。

特に、k の類数が p で割り切れない場合は、上記の条件の元では k の全ての $\mathbb{Z}_p$ 拡大は正規 p 整数底を持つ。

定理1の証明は、具体的に正規 p 整数底を生成する虚2次体のアーベル拡大体の元を上記の modular unit を用いて構成することによって得られる。

第1章のもう一つの結果は、虚2次体の特別な $\mathbb{Z}_p$ 拡大において、全単数群を modular unit のなす群で剰余した群とイデアル類群のそれぞれの p 部分がある条件の元には同型になるという事を証明したものである。

k を虚2次体、p を5以上の素数で k において分解するもの、$\mathfrak{p}$ を p の上にある k の素イデアルとする。さらに、k の Hilbert 類体において $\mathfrak{p}$ が分解しない、という仮定を加える。k_n を k の $\mathfrak{p}^{n+1}$ を法とする ray class field、$k_\infty=\bigcup_{n=1}^{\infty}k_n$ とおくと、k_∞/k_0 は $\mathfrak{p}$ 上の素イデアル以外は不分岐な $\mathbb{Z}_p$ 拡大となる。

Φ_n を k_n における modular unit 全体のなす群とする。これは全単数群に有限指数を持つ部分群である。A_n を k_n のイデアル類群の Sylow p 部分群、B_n を k_n の単数群を Φ_n での剰余を取った有限群の Sylow p 部分群とする。

定理 2　A_n の位数が n に関して有界であるならば、十分大きい全ての n に関して A_n と B_n は Galois 加群として同型になる。

これは、尾崎学氏の証明した円単数とイデアル類群に関する結果の虚2次体における類似である。

第2章では、高次の代数体上のアーベル拡大の単数群を Siegel modular 関数の特殊値で構成すること、およびそれらの最小多項式の計算についての結果である。

以下では k を円の5分体 $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/5))$ とする。この場合は、高次元虚数乗法論により、k のアーベル拡大を構成する方法は既に知られているが、虚2次体の場合のようにアーベル拡大体の単数を構成する方法は知られていない。

H_2 を2次の Siegel 上半空間とし、$u\in\mathbb{C}^2, z\in H_2$ と $r,s\in\mathbb{R}^2$ に対し、Theta 級数を

$$\Theta(u,z;r,s)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^2}e\left(\frac{1}{2}{}^t(x+r)z(x+r)+{}^t(x+r)(u+s)\right)$$

で定義する。但し、$\xi\in\mathbb{C}$ に対し $e(\xi)=\exp(2\pi i\xi)$ とおく。

さらに、$r,s,r',s'\in(1/N)\mathbb{Z}^2$ に対し、$\Phi(z;r,s;r',s')=\frac{2\Theta(0,z;r,s)}{\Theta(0,z;r',s')}$ と定める。このとき、この関数はレベル $2N^2$ の Siegel modular 関数となる。

z_0 を超楕円曲線 $y^2=1-x^5$ に付随する H_2 のCM点とすると、高次元虚数乗法論における「Shimura の相互律」により、$\Phi(z_0;r,s;r',s')$ は k のアーベル拡大体の元となる事が知られている。

福田隆氏と小松啓一氏は、この $\Phi(z_0;r,s;r',s')$ を用いて、k の (6) を法とする ray class field k_6 における単数を構成した。

第2章の最初の結果は、この福田氏と小松氏によって構成された単数の有理数体上の最小多項式の計算である。k_6 は有理数体上40次の体であるので、最小多項式はこの単数の有理数体上の40個の共役たちの近似値を十分に高い精度で計算することによって得られる。k 上の共役は上記の「志村の相互律」を用いることにより比較的容易に求まるが、有理数体上の共役を決定するには幾らかの困難が伴う。

また、福田氏と小松氏の方法を推し進めて、k 上のさらに高次のアーベル拡大の単数の構成を行う。K を k の (18) を法とする ray class field のある部分体とする。これは有理数体上 1080 次の体である。この体における単数を $\Phi(z_0; r, s; r', s')$ を用いて構成し、これらの Galois 共役たちと K に含まれる円単数により生成される群が自由階数 299 を持つ事の証明を計算機を用いて与える。

第 3 章では、実 2 次体のアーベル拡大の単数が 2 重ガンマ関数の特殊値で得られるであろう、という Stark-新谷の予想について考察している。

前述した Hilbert の第 12 問題へのアプローチの一つとして、「Kronecker の極限公式から代数体の単数を構成する」という方法がある。すなわち、代数体の合同指標 χ に対応する L 関数の 1 での値の解析的表示の研究である。

これに関して、1970 年代後半 Stark は総実代数体の L 関数の導関数の 0 での値から得られるある種の ray class invariant がその体のアーベル拡大の単数となっているであろう、という予想を提出した。一方、新谷卓郎氏はこれとは独立に、実 2 次体の極限公式が 2 重ガンマ関数の特殊値によって得られる事に着目し、実 2 次体の場合に Stark とほぼ同一の予想を提出し、この ray class invariant が 2 重ガンマ関数の特殊値で表されること、また特別な場合にはこの予想が正しい事を証明した。

F を実 2 次体、M/F を無限素点の分岐に対してある条件の付いたアーベル拡大とし、$\mathfrak{f}$ を M/F の導手、$H(\mathfrak{f})$ を F の $\mathfrak{f}$ を法とする狭義の ray class group、G を類体論により M に対応する $H(\mathfrak{f})$ の部分群とする。

このとき、任意の $c \in H(\mathfrak{f})$ に対し、2 重ガンマ関数の特殊値によってある ray class invariant $X_\mathfrak{f}(c, G)$ が定義される。

予想 (Stark-Shintani) $X_\mathfrak{f}(c, G)^m$ が M の単数となるような整数 m が存在するであろう。

この章では、実 2 次体のある種のアーベル拡大体の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大において Stark-Shintani 予想が成立している場合に、単数 $X_\mathfrak{f}(c, G)^m$ のなす群とイデアル類群との構造に着目し、上記の定理 2 に類似する形の結果を証明する。

以下は、簡単の為に M/F は 2 次拡大とする。p を奇素数で p 上のすべての素点が M/F では不分解であるものとし、M_∞/M を円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする。M_n を M_∞/M の第 n 中間体とする。この時、M_n には Stark-Shintani 予想が $m = 1$ で成立することが知られている。そこで、C_n を $X_\mathfrak{f}(c, G)$ たちから生成される M_n の単数群とし、E_n^- を M/F の Galois 群（の M_n への拡張）の作用による「マイナス部分」とする。同様に、A_n^- を M_n のイデアル類群の Sylow p 部分群の「マイナス部分」とする。第 3 章の主結果は以下の通りである。

定理 3 A_n^- の位数が n に関して有界であるならば、Galois 加群として E_n^-/C_n の Sylow p 部分群と A_n^- は同型となる。