早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Generalized BRST Models and Topological Yang-Mills Theory
(一般化されたBRSTモデルと位相的ヤン＝ミルズ理論)

申 請 者
カヴァリョ マルセロ F. L.
Marcelo Carvalho
数理科学 多様体上の解析学

2002年4月

70年代後半より数学と物理は密接に関係しながらめざましく発展してきた。理論物理からの新しいアイデアや問題が数学のいろんな分野に持ち込まれ、微分方程式論、変分法や微分幾何学のように古くから物理の諸問題を扱ってきた分野のみならず、代数幾何学や整数論も物理からの刺激により新しい様相を呈するようになった。　たとえば、プラズマ物理の Kadomtsev-Petiashvilli 方程式が、代数曲線のヤコビ多様体の特性をしらべる古典的な Schottky 問題と密接な関係にあることがわかり、Witten によりなされた stationary-phase 近似法を用いるモース不等式の解析的扱いの類似をたどることにより Deligne 等は整数論において大きな成功をおさめた。Donaldson は Yang-Mills 方程式とその instanton 解の理論を深く調べることにより４次元多様体の交叉２次形式に関する問題を解決した。

このように物理学とくに素粒子論や超伝導の近年の発展に影響を受け、そこに見られる新しい代数や幾何の構造を定式化、理論化する試みは、物理数学の新しい主題として定着した観がある。

BRST 変換はゲージ場とフェルミ粒子が相互作用する系を量子化するときに、局所ゲージ不変性が破れる代償として生じる大局的不変性を記述する変換として Becchi, Rouet と Stora の３人の物理学者により導入された。BRST 変換は冪零となり BRST コホモロジーが定義される。　その後の研究により、少なくとも有限次元多様体においては、BRST コホモロジーは H. Cartan 以来知られている同変コホモロジーで説明されることがわかった。　Witten は、Donaldson の４次元多様体の多項式不変量を相関関数に持つ相対論的な量子場のモデル、すなわち位相的量子場の理論、を構成した。　この理論は超対称的な BRST コホモロジーの理論に基礎を置いている。これらの理論の背景となる代数的構造は、ゲージやゴースト場の BRST 変換則に現れる Weil 代数にほかならないことがわかってきた。

リー群 G のリー代数を g , また $W(g)$ をその Weil 代数とする。　G-主束 P の接続を与えれば、Weil 代数から P 上の微分形式の代数 $\Omega(P)$ への階数付き微分代数の準同型が定まる (Chern-Weil 写像) 。 多様体 M に G が作用するとき、リー環 g のリー微分および内微分は、$A = W(g) \otimes \Omega(M)$ に作用するように拡張される。このテンソル積代数 A の内部微分およびリー微分で不変な元全体のつくる部分代数 A_{basic} により M の G-同変コホモロジーの Weil モデルが定義される。

BRST 代数 B, δ_{BRST} は, 階数付き代数としては $A = W(g) \otimes \Omega(M)$ と同じものを考えるが、その微分は、A の微分に g の M への作用から来るリー微分および内部微分をつけ加えた新しい微分 δ_{BRST} を与えた階数付き微分代数 B のことである。B は代数として A と同じだが微分代数としては異なっている。 B から A への次数０の階数付き微分代数準同型が Mathai-Quillen 写像 $\exp(-\theta^a \times I_a)$ で与えられる。　これは群作用の局所化の問題で重要な準同型である。δ_{BRST} を

B の G-不変部分代数 $S(g^*) \otimes \Omega(M)$ に制限して考えた微分代数のコホモロジーを同変コホモロジーの BRST モデルという。Mathai-Quillen 写像 により BRST モデルは Weil モデルと同型になる。

位相的量子場の理論における BRST 変換では、接続全体のつくる無限次元空間にも局所化原理をあてはめているが、これらも形式的な代数演算に限れば厳密さを持つといってよい。Weil モデルにせよ BRST モデルにせよ、形式的には、しかるべき交換関係を満たすように Weil 代数を構成する三つ組 (θ, Ω, d) を与え, 可積分条件 ; $d + [\theta, \Omega] = 0$ を課すことにより得られることに注意しょう。

G-主束 $P \longrightarrow M$ 上の接続全体の空間を $\mathcal{C}$, ゲージ変換群を $\mathcal{G} = Aut_0(P)$, $\mathcal{G}$ 軌道空間（モデュライ）を $\mathcal{M} = \mathcal{C}/\mathcal{G}$ とする。$\mathcal{G}$-主束 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ 上の標準接続を c とする。 あらたに $G-$ 主束 $P \times \mathcal{C}/\mathcal{G} \longrightarrow M \times \mathcal{C}/\mathcal{G}$ を考えると、その上の接続 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{A}_{(p,A)} = A + c(A)$ により定義され、その曲率 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F} = F + \psi + \phi$ と分解される。c をゴーストと呼ぶ。　TQFT における BRST 変換 δ_T は,

$$\begin{aligned} \delta_T A &= i\psi - (d_M c + [A, c]), \quad \delta_T c = -\frac{1}{2}[c, c] + i\phi, \\ \delta_T \psi &= -(d_M \phi + [A, \phi]) + [\psi, c], \quad \delta_T \phi = [\phi, c]. \end{aligned}$$

により与えられるが、Weil 代数の三つ組みとして、$(\mathcal{A} = A + c,\ \mathcal{F},\ d_Q)$ で定義されるものをとれば、上の BRST 変換 δ_T を与える式 は,　曲率 $\mathcal{F}$ の定義式と同値な $\mathcal{F} = d_Q \mathcal{A} + \frac{1}{2}[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ と可積分条件 $\tilde{d}_Q \mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0$ とを成分ごとに書いたものに他ならないことがわかる。

申請者は 論文 The $d = [\delta, b]$ Decomposition of Topological Yang-Mills Theory において、TQFT における接続 A の曲率 F を任意の２次形式に置き換えるとき、組み $(\mathcal{A}, \mathcal{F} = B + \psi + \phi)$ にどのような微分を考えれば可積分条件をみたす三つ組みとなるか、そのときの BRST 変換に対応する変換はどうなるか、という問題を調べ、$d_M + \delta$ にさらにゴーストに（ゲージ軌道空間の方向に）２、３，４階だけ階数をあげる１次微分を加えることにより与えられる微分が解であることを示した。

TQFT の曲率 $\mathcal{F} = F + \psi + \phi$ により $G-$ 主束 $P \times \mathcal{C}/\mathcal{G} \longrightarrow M \times \mathcal{C}/\mathcal{G}$ のチャーン類 $\mathcal{W}_N := c_N \mathrm{Trace}(\mathcal{F})^N$ を考えよう。これは F, ϕ, ψ の多項式であるが、その取り方に依存せず　主束 Q の位相不変量であり $d_Q \mathcal{W}_N = 0$ となる。これを $\mathcal{W}_N = \sum W_k^N$ と分解して書くと次の式 (descent equation) を得る。

$$\delta_T W_0^N = 0, \qquad \delta_T W_1^N + dW_0^N = 0, \qquad \cdots \qquad dW_{2N}^N = 0.$$

$N = 2$ のときに解くと

$$\mathcal{W}_2 = -\frac{1}{2} Tr\, F^2 - iTr\, \psi F + Tr(\frac{1}{2}\psi^2 - iF\phi) + Tr\, \psi\phi + \frac{1}{2} Tr\, \phi^2$$

となる。　これが Donaldson 多項式の Witten による導出法であった。

申請者は同様の試みを一般の三つ組み $\mathcal{A} = A + c, \mathcal{F} = \phi + \psi + B, \tilde{d})$ に対して行い $B = F$ の場合には Donaldson 多項式と一致するが、微分 d_M, δ_T を含むある式を得た。B, F, ϕ, ψ の多項式でないし、任意に与えた B に依存するので位相不変量ではないが興味ある式が得られたと言える。 接続の空間の上に次数の高いゴーストをを持つ共変微分 $\tilde{d}$ を考えて、三つ組み $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \tilde{d})$ の Weil 代数およびBRST コホモロジーを導入した点、および そのチャーン類の計算によりDonaldson 多項式に関する Witten の表現と類似の表現を導いたことはまったく新しい試みである。

論文 Some properties of models exhibiting gauge and curvature ladders, において申請者は, TQFT において Weil 代数を定める三つ組み $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \tilde{d})$ を高次のゴースト項を付け加えて考察した。 TQFT において A, F は主束 $P \longrightarrow M$ 上の接続とその曲率で、接続全体のモデュライを $\mathcal{M} = \mathcal{C}/\mathcal{G}$ とするとき,c, ψ, ϕ はそれぞれ $M \times \mathcal{M}$ 上の $(0,1)$ 次, $(1,1)$ 次、および $(0,2)$) 次の g 値微分形式であったが、申請者はこれを

$$\mathcal{A} = A + c + \sum_{k=2}^{n} c_k^1 \qquad \mathcal{F} = B + \psi + \phi + \sum_{k=3}^{n} \phi_k^2$$

と一般化した。 ここに c_k^1 は $M \times \mathcal{M}$ 上の 1 次微分形式で、ゴースト数 $-k$ である。ϕ_k^2 は $M \times \mathcal{M}$ 上の 2 次微分形式で、ゴースト数 $-k$ である。 BRS 変換は、基本場のゲージ変換（無限小ゲージ変換）をゴースト項 c で置き換えて導入されたことを考えると、より高次のゴースト項も一緒に考て代数として一般化した方が自然であると思える。このとき、BRST 代数と平行な議論を行い、可積分条件を成分ごとに書き下すと、δ_T の A, c, B, ψ, ϕ および c_k^1, ϕ_k^2 に対する作用が、TQFT の BRST 変換の公式と類似に定まる。 申請者は、さらに BRST 代数と平行な議論を進めて、この形式における descent equation を調べ、Donaldson 多項式の Witten による導出法と同じ推論を実行した。 そして、$\mathcal{W}_N := c_N \mathrm{Trace}(\mathcal{F})^N$ を、いくつかの N の小さな値について、A, c, B, ψ, ϕ および c_k^1, ϕ_k^2 を変数とする類似な多項式で書き下した。 ここに現れるさまざまな公式の幾何学的な背景を与え、さらには場の理論の観点から どのような物理的意味があるかを探ることは、負のゴーストが不必要であるという否定的な結果が出る場合を含めても意義が大きい。