早稲田大学大学院理工学研究科

博士論文審査報告書

論　文　題　目

Generalized BRST Models and Topological Yang-Mills Theory

一般化された BRST モデルと位相的ヤン＝ミルズ理論

申　請　者

Marcelo　Carvalho F.L

カヴァリョ　マルセロ F.L

数理科学　多様体上の解析学

2002 年 7 月

Donaldson は Yang-Mills 方程式とその instanton 解を調べることにより４次元多様体の交叉２次形式に関する問題を解決した。このとき導入された Donaldson 多項式を相関関数として持つような量子場のモデルは、位相的量子場の理論 (TQFT) として Witten により建設された。　この論文で申請者は、TQFT の基礎となる 超対称的な BRST 変換の理論のひとつの一般化を試みている。BRST 変換はゲージ場とフェルミ粒子が相互作用する系の量子化において、ゲージ不変性とユニタリティを保証する変換として Becchi、Rouet、Stora と Tyutin により導入された。BRST 変換は冪零となり BRST コホモロジーが定義される。これらの理論の背景となる代数的構造は、ベクトルポテンシャルやゴースト場の BRST 変換則に現れる Weil 代数、あるいはリー環の作用を持つ可換な階数付き微分代数にほかならない。g をリー群 G のリー代数とし、$S(g^*), \Lambda(g^*)$ で双対リー代数 g^* の対称積と交代積を表す。 g の二つの双対基底 $\omega^a \in S(g^*)$ と $\theta^a \in \Lambda(g^*)$ をとるとき、θ^a を階数１の生成元、ω^a を階数２の生成元として生成される 階数付き代数 $W(g) = S(g^*) \otimes \Lambda(g^*)$ を Weil 代数という。$G-$ 主束 P の接続を与えれば、Weil 代数から P 上の微分形式の代数 $\Omega(P)$ への階数付き微分代数の準同型が定まる (Chern-Weil 準同型)。多様体 M に G が作用するとき、g が内微分で作用する階数付き微分代数 $(A = W(g) \otimes \Omega(M),\, d' = d_W + d_M)$ から M の $G-$ 同変コホモロジーの Weil モデルが定義される。BRST 代数 (B, δ_{BRST}) は階数付き代数としては A と同じだが、微分を $\delta_{BRST} = d' + \theta^a \otimes L_a - \omega^a \otimes I_a$ で与えた階数付き微分代数 のことである。B から A への次数０の階数付き微分代数準同型が Mathai-Quillen 写像 $\exp(-\theta^a \otimes I_a)$ で与えられる。BRST 変換 δ_{BRST} で考える同変コホモロジーを BRST モデルという。Mathai-Quillen 写像 により BRST モデルは Weil モデルと同型になる。Weil モデルにせよ BRST モデルにせよ、これらは微分幾何的な構造を反映した交換関係を満たすように Weil 代数を定める三つ組 $(\theta, \omega = \tilde{d}\theta + [\theta,\theta], \tilde{d})$ とその可積分条件 $\tilde{d}\omega + [\theta, \omega] = 0$ により決定される。

P 上の接続全体の空間 $\mathcal{C}$ のゲージ変換群 $\mathcal{G} = Aut_0(P)$ による軌道空間を $\mathcal{M} = \mathcal{C}/\mathcal{G}$ とする。$\mathcal{C}$ 上の標準接続 c により、G 主束 $\mathcal{Q} = P \times \mathcal{C}/\mathcal{G} \longrightarrow M \times \mathcal{C}/\mathcal{G}$ 上の接続 $\mathcal{W}$ が点 (p, A) での値が $\mathcal{W}_{(p,A)} = A + c(A)$ となるように定義され、曲率 $\mathcal{F} = d_{\mathcal{Q}}\mathcal{W} + \frac{1}{2}[\mathcal{W}, \mathcal{W}]$ は $\mathcal{F} = F + \psi + \phi$ と分解される。ただし b を $\mathcal{C}$ 上の外微分として $d_{\mathcal{Q}} = d_M + b$ である。 F は A の曲率、ψ は M 上１次、$\mathcal{C}$ 上１次の形式、ϕ は $\mathcal{C}$ 上２次の形式であり、ともに $Lie(\mathcal{G})$ 値であるから同義反復的に g-値であると思える。TQFT における BRST 変換 b は、

$$
\begin{aligned}
bA &= i\psi - (d_M c + [A, c]), \quad bc = -\frac{1}{2}[c, c] + i\phi, \quad b\psi = -(d_M\phi + [A, \phi]) + [\psi, c], \\
b\phi &= [\phi, c], \quad bF = -i(d_M\psi + [A, \psi]) + [F, c]. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

により与えられるが、Weil 代数の三つ組として、$(\mathcal{W}, \mathcal{F}, d_{\mathcal{Q}})$ をとれば、上の

BRST 変換 b を与える式 は、曲率 $\mathcal{F}$ の定義式と、その可積分条件：

$$(2)\quad (d_M+b)\mathcal{W}+\frac{1}{2}[\mathcal{W},\mathcal{W}]=\mathcal{F};\qquad (3)\quad (d_M+b)\mathcal{F}+[\mathcal{W},\mathcal{F}]=0$$

を成分ごとに書いたものに他ならないことがわかる。以上が TQFT の基礎となる BRST 変換の Weil 代数としての枠組みであるが、基礎の多様体 M や $\mathcal{M}$ と独立な記述を与える Dubois-Violette の方法がある。P 上の接続全体の空間 $\mathcal{C}$ の上で定義された $\Omega(P)$-値多項式全体 $\mathcal{B}$ も g が作用する階数付き微分代数となり、$\mathcal{C}$ 上には $\mathcal{C}\subset g\otimes\Omega^1(P)$ により同義反復的に接続 c が定まる。P の無限小ゲージ変換群を $g_P=Lie(\mathcal{G})$、その双対を g_P^* とする。$\mathcal{A}=\mathcal{B}\otimes\Lambda(g_P^*)$ は、g が作用する双階数付き代数で、$\Omega(P)$ および g_P^* から来る二つの微分 d,b により双階数付き微分代数になり、$\mathcal{A}$ 上の標準的な接続 $\mathcal{W}$ は $\mathcal{W}=A+c$ と (1,0) および (0,1) 成分に階数分解される。作り方より三つ組 $\left(\mathcal{W},\ \mathcal{F}=(d+b)\mathcal{W}+\frac{1}{2}[\mathcal{W},\mathcal{W}],\ d+b\right)$ は (2),(3) を満たすので、成分ごとに書いて (1) の BRST 変換則が得られる。

申請者は g が作用する双階数付き微分代数とその標準的な接続の組に、ゴースト数が負となるゴースト場を持ち、必ずしも接続の曲率ではない２次微分形式も含む、より一般な BRST 変換の理論を構成した。このとき三つ組 $(\mathcal{W},\mathcal{F},\tilde{d})$ は

$$\mathcal{W}=\sum_{k=0}^{D}\varphi_k^{1-k};\qquad \mathcal{F}=\sum_{k=0}^{D}\eta_k^{2-k};\qquad \tilde{d}=\sum_{k=0}^{D}\triangle_k^{1-k},$$

$$\varphi_0^1=c,\quad \varphi_1^0=A,\qquad \eta_0^2=\phi,\quad \eta_1^1=\psi,\quad \eta_2^0=B\,;\qquad \triangle_0^1=b,\quad \triangle_1^0=d,$$

で与えられる。ここで $k\geq 2$ に対して $\varphi_k^{1-k}=0,\ \triangle_k^{1-k}=0,\ k\geq 3$ に対し $\eta_k^{2-k}=0$, $\eta_2^0=B=F$ としたのが TQFT の BRST 変換である。 この三つ組みに対する演算を展開する微分代数として、申請者は双階数 (m,n) を持つ微分代数 $\mathcal{K}=\sum_{m\geq 0}\sum_n K^{(m,n)}$ を、n に負の値も許して、導入した：

$$K^{(m,n)}=\begin{cases}\mathcal{B}^m, & n=0\\ \mathcal{B}^m\otimes\Lambda^n(g_P^*), & n>0\ \text{のとき}\\ \mathcal{B}^m\otimes\Lambda^{-n}(g_P), & n<0\ \text{のとき}.\end{cases}$$

本論文の Chapter 2 で、申請者は g の作用する一般な双階数付き微分代数の三つ組に対する可積分条件と、それを展開した 一般化された BRST 変換 を考察し、$\mathcal{K}$ の外微分 $\tilde{d}$ が、微分 b と、A 上の Mathai-Quillen 写像 $\exp(\delta)$ を決める階数 $(1,-1)$ の作用素 $\delta=-\theta^a\otimes I_a$, $\theta^a\in\mathcal{B}^0\otimes g^*$、により、$\triangle_k^{1-k}=\frac{1}{k!}[\delta,[\delta,\cdots,[\delta,b],\cdots]]$ と書けることを示した。Chapter 7 で、$\mathcal{K}$ が微分代数となるように積、外微分 $\tilde{d}$ や内微分 I_a、リー微分 L_a によるリー代数 g の作用などが定義され、三つ組 $(\mathcal{W},\mathcal{F},\tilde{d})$ に対し演算を展開するための数学的基礎が上記の Dubois-Violette の方法の拡張として与えられた。

TQFT の曲率 $\mathcal{F}$ によりチャーン類 $\omega_N := c_N \mathrm{Trace}\mathcal{F}^N$ を考えよう。これは F, ϕ, ψ の多項式であるが、その取り方に依存せず主束 Q の位相不変量である。ビアンキ恒等式 $d_Q\omega_N = 0$ を階数分解し、ω_N の成分ごとに書くと 次の式(descent equation)が得られる。

$$bW_0^N = 0, \qquad bW_1^N + dW_0^N = 0, \qquad \cdots, \qquad dW_{2N}^N = 0.$$

これを解くと、$N = 2$ のときは多項式 $\omega_2 = -\frac{1}{2}Tr\,F^2 - iTr\,\psi F + Tr(\frac{1}{2}\psi^2 - iF\phi) + Tr\,\psi\phi + \frac{1}{2}Tr\,\phi^2$ が得られる。これが Donaldson 多項式の TQFT による説明であった。申請者は同様の試みを微分代数 $\mathcal{K}$ の三つ組 $(\mathcal{W}, \mathcal{F}, \tilde{d})$ に対して行い、Chapter 3,4,5,6 で様々な条件のもとに descent equation を解いている。それらは $B = F$ の場合には Donaldson 多項式と一致するある種の微分多項式になる。Chapter 3 において $k \geq 3$ で $\varphi_k^{1-k} = 0$, $D = 4$ の場合に descent equation の解の空間が 8 次元であることが示された。Chapter 4 では TQFT において曲率 F を任意の 2 次形式 B に拡張して、条件 (2),(3) を満たすように $\tilde{d}$ を定め、これに対し descent equation を解く。とくに $B = F$ のとき Donaldson 多項式が得られる。Chapter 5 では曲率 $\mathcal{F} = 0$ の場合をあつかい、Chern-Simons 項との関係を調べている。Chapter 6 で負のゴーストがすべて出る場合: $\varphi_k^{1-k} \neq 0, k = 1, 2, \cdots, D$ を調べている。このときはすべての $\triangle_k^{1-k} = 0$ であり、descent equation は Zumino の descent equation と類似になるという興味ある観察がなされている。

以上のように、申請者は BRST 変換を負のゴーストも対象とするように一般化するとともに、対応する Witten の方法から導かれる微分多項式を詳しく計算し、Donaldson 多項式を特別な場合として含む descent equation の一連の解を得た。これが位相的不変量としての意味を持つかどうかはわからないが、負のゴーストをふくむ位相的量子場のモデルを構成したことは大きな意味を持っている。また、申請者は双階数付き 微分代数の概念を拡張しそれを用いて様々な重要な結果を得ている。これらの研究成果は、幾何学のみならず解析学、物理学に新しい様相を提供すると思われる。従って、本論文は博士（理学）の学位論文としてふさわしいものであると認める。

2002 年 7 月

審査員（主査） 早稲田大学教授	Docteur ès Sciences（パリ大学）	郡敏昭
早稲田大学教授	理学博士（京都大学）	上野喜三雄
早稲田大学教授	理学博士（早稲田大学）	大場一郎
横浜市立大学教授	理学博士（九州大学）	藤井一幸