

外 22-22

早稲田大学大学院理工学研究科

## 博 士 論 文 概 要

## 論 文 題 目

Collaboration between nonlinearity and stochasticity  
in stability of neural networks  
and deterministic stochastic resonance

神経回路網の安定性及び決定論的確率共振における  
非線形性と確率性の協調作用

申 請 者

新井 賢一

Kenichi Arai

ノイズなど確率的な揺ぎが非線形系に及ぼす様々な効果には興味深いものがあり、多くの研究がなされている。通常、ノイズなどを含む確率システムは不確実性があり確実な予測や制御ができない。また、非線形系では、カオスに代表されるような複雑な挙動をすることがあり特定の処方箋がない為、解析や取り扱いが困難であることが多い。その一方で、非線形力学系は多種多様の興味深い現象を示す。その非線形系にノイズを加えた場合、秩序的な振舞いが誘因されるなどの意外な効果をもたらす場合がある。このような現象の探求、解明は様々な現象の説明や新たな応用が期待され、魅力的な研究分野である。

本論文では、非線形学習系であるニューラルネットワークが学習系列の安定な模倣を獲得する学習方法や決定論的な非線形系により引き起こされる確率共振的現象を通して、ノイズや確率変数の導入が非線形効果をもたらすことを数値シミュレーションにより示し、その数理解析を行った。本論文の構成は以下の通りである。

第1章では、ノイズの非線形系における効果という観点から研究の動機を述べた。また、具体的な研究対象についてそれぞれの現状を紹介し、解決すべき課題を述べた。

第2章では、FSM (finite state machine) が出力した系列を RNN (recurrent neural network) が学習し元の FSM を同定する問題を考察した。FSM の学習に成功した RNN でさえも、未知の長い入力系列に対して正しい出力をしつづけることは難しい。学習後の RNN が FSM を模倣する際、中間層の出力ベクトルは FSM の状態を表現し、入力系列に対してこの出力ベクトルは状態間を遷移する。この状態遷移を繰り返すうちに軌道がずれ、望ましい出力をしなくなる。つまり、中間層での状態遷移が安定であることが、RNN が FSM として安定に動作する為の条件となる。RNN の FSM としての動作安定を保証するため、中間層に表現された状態間の安定な遷移に関する十分条件を示した。さらに、この条件を満足する活性化パラメータの有限値が存在することを示した。

しかし、実際の学習においては、安定動作が実現できる状況では学習が進まない。この問題を解決するためベイズ的枠組みを利用した学習方法を提案した。ベイズ学習では推定されるパラメータは確率変数として扱われ、学習においてその確率分布を推定する。そこで安定動作と学習の進展を両立できるように、安定動作の条件を事前知識として組み込み、さらに、学習初期段階ではパラメータの分布を広く取る方法を提案した。さらに、この学習の枠組みでは分布の幅を決めている hyper parameter を学習により調整することができる。これら提案した学習法を用いることで学習の進捗と共に分布の幅が細くなり、効果的に安定動作をする RNN が学習可能であることを数値実験により確認した。

第3章では、確率共振の基本的概念およびその典型的な解析方法を概説する。本論文では滞在時間分布に焦点を当て確率共振を特徴付けたが、二状態近似や断熱近似を用いこれらを解析的に得る方法を述べた。また、本論文で扱う主題である

カオス系を用いた確率共振の研究の状況および生物の感覚器官で観測される確率共振について現在の知見を概観する。

第4章では、レスラー振動子を用いた決定論的確率共振について論じる。まず、レスラー振動子の基本的な性質およびカオス位相同期について述べる。系がカオス位相同期状態から少しずれたとき、位相スリップと呼ばれ間欠的に位相が  $2\pi$  ずれる現象について説明した。本論文では主に位相スリップ間隔分布に着目して系の性質を調べた。位相スリップ間隔分布は指数分布を示すことが数値実験より分かる。このことから、位相スリップはポアソン過程で近似することができ、各位相スリップは独立に起きていることが分かる。つぎに、周期外力を微弱な周期信号により振幅変調する。適当な条件のもとで外力を変調した場合、スリップ間隔分布は変調周期の整数倍のところにピークを持つようになる。これは変調信号の特定の位相で位相スリップの生起確率が最大となるためであり、変調信号と位相スリップが統計的に同期する現象が数値実験により見られたことになる。

さらに、内部揺ぎに対するレスラー振動子の共振の度合いを数値実験により調べた。共振の度合いとして変調信号のある場合とない場合の間隔分布のピーク、特に第1ピークの高さの差を用いた。レスラー振動子のあるパラメータは振動子の振動数を変化させるが、同時に位相スリップの頻度も変るので、これを用い内部のカオス揺ぎを制御した。このパラメータの値を変化させていくとピークの高さの差は増加し最大値を過ぎてまた減少する。つまり、適度な内部揺らぎにより系はもっとも共振の度合いを強めると考えることができる。これは、適切なノイズ強度により共振の度合いが最大になる確率共振の特徴と一致し、かつ完全に決定論的な系で見られるので決定論的確率共振とよぶ。

さらに決定論的確率共振の生じる力学的機構について考察を行った。位相同期状態から位相スリップが生じる状態への遷移は unstable-unstable pair bifurcation により生じる crisis により引き起こされる。この crisis では、固定点間を結ぶ方向の運動は鞍点分岐と同じであり、それと交差する方向に強い不安定な運動をする方向がある。鞍点分岐方向に関して、分岐点付近を通過するのに要する時間は分岐パラメータによりスケールリングされることが知られている。また、強い不安定方向では指数関数的に軌道が分岐の中心から離れるが、位相スリップが起きるためには軌道が分岐点の中心近くに留まっていることが必要である。これらのことから、位相スリップ率を分岐パラメータの関数として求めることができる。変調信号がある場合の位相スリップも断熱近似により時間依存のポアソン過程と近似できる。これらの仮定から導き出された位相スリップ間隔分布は数値実験で得られた結果と一致することを確かめた。つまり、boundary crisis を引き起こす分岐パラメータを周期的に変調し、かつ分岐パラメータを調整することで決定論的確率共振が観測されることになる。

雑音を含む信号で周期外力を変調したときの決定論的確率共振について調べた。

実環境では信号に雑音の混じることは自然であるが、この場合雑音強度が制御できない。一方、生物の感覚器で確率共振の利用を示す証拠は幾つか報告されているが、確率共振により効率的に信号を検出するためにどのように雑音の強度に適応しているのだろうか。決定論的確率共振においてノイズを含む信号を変調信号として用いた場合でも、位相スリップ間隔分布の第1ピークの高さの差は系のパラメータを適切に調整することで最大となることが数値実験により分かった。つまり、与えられたノイズ強度により、系のパラメータを調整し共振の度合いを最適化できるのである。これは制御不可能な外部雑音に対する適応方法の一つの可能性を示していると考えられる。

第5章では、写像力学系における決定論的確率共振について論じる。まず、連続時間力学系のカオス振動子をポアンカレ写像を基にしてに写像力学系で表現する方法を述べる。また、周期外力のある場合でも同様に写像力学系に変形することができる。これらをもとに適切に具体的な写像力学系を用いると、位相同期や位相スリップをみることができる。さらに、位相同期状態から位相スリップ状態への遷移も連続時間力学系の場合と同じ unstable-unstable pair bifurcation によることが分かる。この写像力学系でも連続時間力学系と同様に分岐パラメータを微弱周期信号で変調し、分岐パラメータを調整することで決定論的確率共振が見られることを確かめた。

さらに、写像力学系において、ノイズを含む信号により分岐パラメータを変調した場合でも分岐パラメータを調整し最大の共振が得られることを確かめた。つまり、ノイズを含む決定論的確率共振が生じたことになる。また、ノイズを含む決定論的確率共振の発生機構を調べるため、ノイズを含む写像力学系の位相スリップ率を考察する。この場合、鞍点分岐により固定点が消滅する前でもノイズにより軌道は固定点間を通過できるため位相スリップは起る。この過程は連続時間近似をすることにより Langevin 方程式で表すことができ、平均通過時間は Langevin 方程式から得られた Fokker-Planck 方程式により求めることができる。ノイズを含む場合、位相スリップのための「通路」は至る所に存在し、軌道はどこからでも通過することができる。この為、位相スリップ率は全ての「通路」の平均として求めなければならない。各周期毎に存在する鞍点分岐に関する固定点間隔分布を数値計算により求めた。これらの結果から得られた平均位相スリップ率をもとに、変調信号を加えた場合の位相スリップ間隔分布をポアソン過程近似で求めることができる。これから、共振度合いを示す第1ピークの高さの差は分岐パラメータに関して最大値をもち、数値実験と一致することを確認した。

第6章は、本論文の総括であり、本研究で得られた成果をまとめた。今後の課題として、RNNによるFSMの同定問題の意義から今後の方向性について、また、決定論的確率共振の緒課題、さらに、ノイズが非線形性に及ぼす現象の解明について述べた。