早稲田大学大学院理工

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

C-semigroups of linear operators in Banach spaces

— A generalization of the Hille-Yosida theorem —

(バナッハ空間における線形作用素C-半群
ーヒレ・吉田の定理の一般化ー)

申 請 者

田 中 直 樹

Naoki Tanaka

数学専攻・発展方程式研究

平成2年5月

1. 研究の背景と目的

本研究は Banach 空間 X における作用素 C-半群に関するものである。有界線形作用素の族 $\{S(t); t \geq 0\}$ が C-半群であるとは

(1) $S(s)S(t) = S(s+t)C \quad (s, t \geq 0)$, $\quad S(0) = C$,

(2) 各 $x \in X$ に対して $S(\cdot)x : [0, \infty) \to X$ は連続である。

但し，C は逆作用素をもつ有界線形作用素である。

内容は作用素 C に関する仮定のもうけ方で (I) 作用素 C の値域 $R(C)$ が X で稠密な場合 (II) 作用素 C の値域 $R(C)$ が必ずしも X で稠密でない場合 の2つに，さらに (I) の場合は (I_1) $\{S(t); t \geq 0\}$ が指数的有界，つまり

(3) 定数 $M \geq 0$ と $a \geq 0$ が存在して $\|S(t)\| \leq Me^{at} \quad (t \geq 0)$

が成り立つ場合 (I_2) 必ずしも $\{S(t); t \geq 0\}$ が指数的有界でない場合 の2つに分けられる。(I_1) については 1) 指数的有界な C-半群の完全生成作用素の特徴付け 2) 指数的有界な正則 C-半群 3) 指数的有界な C-半群の摂動 を各章に分け扱う。(I_2) については 4) 局所 C-半群の完全生成作用素の特徴付け (II) については 5) 指数的有界な C-半群の生成作用素の特徴付け を扱う。

まず，これらの研究の背景及び目的を順次述べる。

1) 1948年に Hille と Yosida により発展方程式論の基礎である線形縮小半群の生成理論が築かれて以来，線形半群の理論は (C_0)-半群の概念の拡張として，クラス $(C_{(k)})$ 半群及び増大度 α 半群等が導入され半群の分類が試みられ著しく進歩した。最近になって Arendt は Banach 空間におけるベクトル値有界関数に対する Widder's theorem の integrated version といえる事柄が成り立つことを発見し，これを利用して (C_0)-半群の概念の拡張として integrated semigroup の概念を導入した。また同時期に，(C_0)-半群の概念の拡張として指数的有界な C-半群の概念が Davies と Pang により導入され，その生成作用素の特徴付けが得られた。しかし従来知られてきている線形作用素の半群との関係についての考察は十分にはなされていなかった。1章の研究の目的は，指数的有界な C-半群の完全生成作用素の概念を導入し，その特徴付けを得ることと，この理論を用いて今まで知られている色々なクラスの半群の生成定理の一般化と統一化を扱うことにある。

2) 放物型方程式を取り扱うのに重要な役割をもつ (C_0)-正則半群の概念の拡張としてクラス (H_α) 正則半群及び増大度 α 正則半群があげられる。特に，前者は holomorphic distribution semigroup と密接な関係があり多くの人々による研究がある。2章の目的は，指数的有界な正則 C-半群の概念を導入しその完全生成作用素の特徴付けを行い，これを利用して各種正則半群の生成定理を統一的に扱うことにある。

3) 2階抽象 Cauchy 問題が，この問題をシステム化し integrated semigroup の理論を用いれば，従来独立に研究されていた cosine family の理論を用いず，1階抽象 Cauchy 問題として統一的に扱えることが Neubrander により示された。その後，cosine family に関する bounded perturbation theorem 及び complete second order problem に適用する目的で integrated semigroup の摂動定理が考察されるようになった。3章の研究の目的は，指数的有界な C-半群の摂動定理を考察し，integrated semigroup 従って，(C_0)-半群及び cosine family の摂動定理を統一的に扱うことにある。

4) $C = I$（恒等作用素）の場合には，"性質 (1), (2) $\Rightarrow$ 性質 (3)" が成立することはよく知られているが，一般には，成立しないことが Davies と Pang により指摘され，さらに「regular distribution semigroup との関係を明確にできる C-半群の理論を展開できないか」という問題が生じた。この問題に答えるために，

(1)$'$ $S(s)S(t) = S(s+t)C \quad (0 \leq s, t, s+t < T)$, $\quad S(0) = C$,

(2)$'$ 各 $x \in X$ に対して $S(\cdot)x : [0, T) \to X$ は連続である

を満たす作用素族 $\{S(t); 0 \leq t < T\}$（以下，局所 C-半群と呼ぶ）を考察する。4章の研究の目的は，局所 C-半群の完全生成作用素の特徴付けを得ることであり，さらに，この理論と regular distribution semigroup の理論との関係を明確にすることにある。

5) (C_0)-半群の生成作用素 A を特徴付ける2つの条件

(i) A の定義域 $D(A)$ は X で稠密，(ii) $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$, $\|R(\lambda : A)^m\| \leq M(\lambda-\omega)^{-m} \quad (\lambda > \omega, m \geq 0)$

に関しては，X が回帰的であれば "(ii) $\Rightarrow$ (i)" は成立するが一般には不成立である。そこで，(ii) を満たすが定義域が X で稠密でない作用素の特徴付けを考察することは興味深い。5章の研究の目的は，指数的有界な C-半群の生成作用素の定義域が必ずしも X で稠密でない場合，従って，1章から4章まで仮定した条件「作用素 C の値域 $R(C)$ が X で稠密である」をもうけない場合に，指数的有界な C-半群の理論を考察し，integrated semigroup との関係を明確にすることにある。

2. 本論文の内容

本研究1章から5章において得られた結果を以下に要約する。

1) 次のように述べられる指数的有界な C-半群の完全生成作用素の特徴付けについて考察した。閉線形作用素 A が $\|S(t)\| \leq Me^{at} \ (t \geq 0)$ を満たす指数的有界な C-半群の完全生成作用素であるための必要十分条件は

(A_1) $\lambda > a$ に対して $(\lambda - A)^{-1}$ が存在する，

(A_2) $D((\lambda - A)^{-m}) \supset R(C)$, $\quad \|(\lambda - A)^{-m} C\| \leq M(\lambda - a)^{-m} \quad (\lambda > a, m \geq 0)$,

(A_3) 各 $x \in D(A)$ に対して $Cx \in D(A)$, $\quad ACx = CAx$,

(A_4) A の定義域 $D(A)$ は X で稠密である，

(A_5) $CD(A)$ は A の芯である。

この時，次の表現定理が成立する。但し，収束は $[0, \infty)$ の有界区間上一様である。

$$S(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^m}{m!} (\lambda - A)^{-m} Cx = \lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{t}{m} A\right)^{-m} Cx \quad (x \in X, t \geq 0).$$

特に，$C = I$ の時は，Hille - Yosida の定理である。従って，本研究の結果は，Hille - Yosida の定理を拡張するものである。次に，この特徴付けの応用として，

① $T(t)C = CT(t) \quad (t > 0)$ $\qquad$ ② $R(C) \subset \Sigma \equiv \{x \in X ; \lim_{t \to 0+} T(t)x = x\}$

を満たす半群 $\{T(t); t \geq 0\}$ の生成定理を考察し，適当な作用素 C を選ぶことにより

クラス $(C_{(k)})$ 半群及び増大度 α 半群の生成定理を統一的に扱った。さらに，$n \in \mathbb{N}$，A を $\rho(A) \neq \phi$ である X で稠密に定義された閉線形作用素とする時，A が n-times integrated semigroup の生成作用素であることと指数的有界な $R(1:A)^n$-半群の完全生成作用素であることが同値であることを考察し，同時に n-times integrated semigroup が具体的に半群の n 回不定積分で表現できることを示した。

2) 指数的有界な正則 C-半群の完全生成作用素の特徴付けについて論じた。この特徴付けを利用して Da Prato により導入された増大度 n の正則半群（n は非負の整数）をより一般化した増大度 α の正則半群（α は非負の実数）の完全生成作用素の特徴付けを行った。従って，本研究の結果は，(C_0)-正則半群の生成定理を拡張するものであり，また Da Prato の結果を改良するものでもある。

3) (C_0)-半群に対する Phillips-Miyadera の摂動定理の拡張として指数的有界な C-半群の Phillips-Miyadera タイプの摂動定理を扱い，n-times integrated semigroup の Phillips-Miyadera タイプの摂動定理を考察する。本研究の結果は，先に述べた目的で調べられた（ある種の制約のもうけられた）有界線形作用素を摂動することに限られていた integrated semigroup の摂動定理をより広いクラスが摂動できるような摂動定理（例えば，Takenaka-Okazawa により得られた cosine family に対する Phillips-Miyadera タイプの摂動定理を統一的に扱うことが可能になる）に改良したものである。

4) 局所 C-半群の完全生成作用素の特徴付けを扱う。この理論の特徴は，C-半群の指数的有界性を仮定しないため，Laplace 変換を用いた議論が不可能となる点にある。この点を克服するため locally convex topological space 上の locally equicontinuous semigroup の生成定理の証明を簡潔化するために用いられた asymptotic resolvent の概念を参考に，C-resolvent に近い性質をもつ asymptotic C-resolvent の概念を導入し，これを用いて局所 C-半群の特徴付けを得た。また新たに，local integrated semigroup の概念を導入し，局所 C-半群の理論を用いて，このクラスの特徴付けを考察し，regular distribution semigroup と local integrated semigroup の言葉を用いて特徴付けることに成功した。従って，本研究は，Davies と Pang により指摘されていた問題を解決するものである。

5) 条件「作用素 C の値域 $R(C)$ が X で稠密である」を仮定しない場合の指数的有界な C-半群について考察する。(イ) A を生成作用素が満足する性質 (A_1)-(A_3) を満たす閉線形作用素とすると，$\overline{D(A)}$ 上の指数的有界な C_1-半群が生成され，その生成作用素は $C_1^{-1}A_1C_1$ で与えられる。但し，A_1 は A の $\overline{D(A)}$ の中への部分，C_1 は C の $\overline{D(A)}$ への制限である。これは，$(\lambda-\omega)(\lambda-A)^{-1}$ が縮小作用素となる Banach 空間を導入し，非線形半群の構成方法を用いて行なわれる。本研究は，Davies と Pang により得られた生成定理を条件「A の定義域 $D(A)$ が X で稠密である」を仮定しない場合に拡張するものである。(ロ) 指数的有界な C-半群 $\{S(t); t \geq 0\}$ を与えた時，$\{C^{-1}S(t); t \geq 0\}$ が X に連続的に埋め込まれた空間上 (C_0)-半群になることを考察し，指数的有界な C-半群を (C_0)-半群の言葉を用いて特徴付けることに成功した。