内2-3

早稲田大学大学院理工

博　士　論　文　概　要

論　文　題　目

いくつかの凸な物体に対する
散乱核の特異点

申　請　者
中　村　真　一
Shin-Ichi　NAKAMURA

数学：関数方程式

平成 2 年 5月

本論文では，Lax と Phillips によって創始された物体による波動方程式の散乱問題について議論する。まず問題の概要と議論したい点について述べる。

$\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$ における滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつコンパクトな物体とし，$\Omega = \mathbb{R}^n - \mathcal{O}$ を連結とするとき次で表わされる物体 $\mathcal{O}$ による散乱を考える。

$$\begin{cases} \Box u \equiv \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x \right) u(t,x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^1 \times \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \mathbb{R}^1 \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = f_1(x) & \text{on } \Omega, \\ u_t(0,x) = f_2(x) & \text{on } \Omega. \end{cases}$$

このとき $k_-(s,\omega)$（又は $k_+(s,\omega)$）$\in L^2(\mathbb{R}^1 \times S^{n-1})$ を初期値 $f = (f_1, f_2)$ の内向き（又は外向き）推移表現とする。写像 $S : k_- \longrightarrow k_+$ は散乱作用素と呼ばれ，$L^2(\mathbb{R}^1 \times S^{n-1})$ から $L^2(\mathbb{R}^1 \times S^{n-1})$ へのユニタリ作用素となり，このとき S は超関数による核 $S(s,\theta,\omega)$ をもつ；

$$(Sk_-)(s,\theta) = \iint S(s-\tilde{s},\theta,\omega)\, k_-(\tilde{s},\omega)\, d\tilde{s}\, d\omega.$$

ここで $S(s,\theta,\omega)$ は $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1_s)$ に値をとる θ と ω $(\theta \neq \omega)$ に関する C^∞ 関数である。最近の研究によって次のことがわかっている。

Majda は，$n=3$ のとき支持関数 $r(\omega) = \min_{x \in \mathcal{O}} x \cdot \omega$ と $S(s,\theta,\omega)$ との間に次の関係があることを示した。

(i) $\operatorname{supp} S(\cdot,-\omega,\omega) \subset (-\infty, -2r(\omega)]$,

(ii) $s = -2r(\omega)$ は $S(s,-\omega,\omega)$ の特異点である。

さらに曽我と山本は，$n \geqq 2$ で $\mathcal{O}$ の凸性と $S(\cdot,-\omega,\omega)$ の特異点に関する次の定理を得た。

$\mathcal{O}$ が凸である $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{sing\,supp} S(\cdot,-\omega,\omega)$ は任意の $\omega \in S^{n-1}$ に対して1点のみ。

この定理から従うことは $\mathcal{O}$ が凸でないとすると，ある $\omega \in S^{n-1}$ が存在して，そのような ω に対しては $\operatorname{sing\,supp} S(\cdot,-\omega,\omega)$ は1点より多くの点が存在することが従う。

そこで我々が議論したいことは，$\mathcal{O}$ が凸でないときに $\operatorname{sing\,supp} S(\cdot,-\omega,\omega)$ と $\mathcal{O}$ の形状の間には，どのような関係が存在するのであろうかということである。

以下この問題に関して得られた結果について概説する。

まず第1章においては，$\mathcal{O}$ が2つの交わらない球 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ 又は $\mathbb{R}^3$ から成る場合について考える。このとき上に述べた定理から $\operatorname{sing\,supp} S(\cdot,-\omega,\omega)$ の右端は $-2r(\omega)$ であり，ある $\omega \in S^{n-1}$ に対して，

$\operatorname{sing\,supp} S(\cdot,-\omega,\omega)$ の別の点が $(-\infty, -2r(\omega))$ の中に存在することが従う。得られた結果は次のものである。

d_i を $\mathcal{O}_i$ の半径とし，$r_i(\omega) = \min_{x \in \mathcal{O}_i} x \cdot \omega$ $(i = 1, 2)$ とする。

定理1.

$\omega \in S^{n-1}$ $(n = 2, 3)$ を ω に平行な直線が $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ ともに交わらない方向とする このとき次が成立する。

$$\operatorname{sing\,supp} S(\cdot,-\omega,\omega) \cap \left[\min_{i=1,2} (-2r_i(\omega)), +\infty \right)$$

$$= \{ -2r_1(\omega), -2r_2(\omega) \}.$$

もっと制限された ω に対しては，$S(s,-\omega,\omega)$ の特異点の分布について完全に知ることが出来た。

定理2.

$\operatorname{dist}(\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2) > 13 \max_{i=1,2} d_i$，$\omega$ を $|r_1(\omega) - r_2(\omega)| < \max_{i=1,2} d_i$，とする。

このとき次が成立する。

(i) $\operatorname{sing\,supp} S(\cdot,-\omega,\omega) = \{ -2\min_{i=1,2} r_i(\omega) - S^i_m \}_{\substack{i=1,2,\\ m=1,2,3,\cdots}}$,

(ii) $\lim_{m\to+\infty} (S^i_{m+2} - S^i_m) = 2\operatorname{dist}(\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2)$ $(i = 1, 2)$,

(iii) $\lim_{m\to+\infty} \{ S^i_{2m} - 2^{-1}(S^1_{2m-1} + S^2_{2m-1}) \} = \operatorname{dist}(\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2)$ $(i = 1, 2)$.

ここで，S^i_m は $x_0 \in P = \{ x ; x \cdot \omega = \min_{i=1,2} r_i(\omega) - 1 \}$ を ω 方向に出発し，m 回物体の表面で幾何光学の法則によって反射し，$-\omega$ 方向の光線となって P 上の点 x_{m+1} にもどって来たときの幾何光学の光線の x_0 から x_{m+1} までの折線の長さである。

この定理から従うことは，ある ω に対する制限の下で，$\operatorname{sing\,supp} S(\cdot,-\omega,\omega)$ を完全に知ることが出来，その特異点の分布状態から2つの物体間の距離を知ることが出来るということである。

次に第2章について概説する。第2章では，第1章で物体 $\mathcal{O}$ が2つの球 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ とから構成され，空間次元が2又は3であるという条件を取り除くことについて考察する。すなわち第1章の定理に相当することが，$\mathcal{O}$ が2つの交わらない凸な物体 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ から成っており，さらに空間次元が2次元以上であれば成立する，ということについて議論される。議論の方法は第1章で行なわれたものと別の角度から行なわれる。

次に第3章について概説する。第3章では，第2章で得られた

結果が，$\mathcal{O}$がいくつかの交わらない凸な物体$\{\mathcal{O}_j\}_{j=1,2,\ldots,J}$から構成される場合にはどのようになるのであろうかということについて考察する。物体が$\mathcal{O}_1$と$\mathcal{O}_2$のみから構成されるときに重要な役割をしたのは，2つの物体間の距離を与える点を往復する周期的なふるまいをする幾何光学の光線であった。物体が3つ以上の凸な物体から成るときには，このような周期的な光線がいくつも存在することが，井川によって示されており2章で述べるような簡潔な結果を期待することは出来ないが，それでもあるωに対しては，$S(s,-\omega,\omega)$の特異点の位置を完全に知ることが出来，さらにその中で周期的なふるまいをするものに対しては，その分布状態が周期の間隔に近づくことが示される。