早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

Stability of Endomorphisms

(可微分写像の安定性)

申 請 者

池田 宏

Hiroshi IKEDA

数学専攻・トポロジー研究

1994年10月

本論文は endomorphism の安定性についての研究である。可微分閉多様体 M からそれ自身への r 回連続微分可能な写像を C^rendomorphism と呼ぶ。flow や diffeomorphism の安定性理論は一応の完成を見ている。しかし、diffeomorphism から endomorphism への力学系理論の一般化については S^1上の写像以外では M.Shub,R.Mañé and C.Pugh,F.Przytycki 等による単発的な結果があるにすぎない。
endomorphism の力学系理論において R.Mañé と C.Pugh が提示した次のような予想がある。

予想. C^r構造安定な endomorphism は nonwandering set 上に特異点を持たない。

この予想に対して、Mañé は条件を強めることによって次のような結果を得た。

定理 A. C^r絶対安定 endomorphism は公理 A を満たす。

公理 A の条件には nonwandering set 上に特異点を持たないことが含まれている。また絶対安定ならば構造安定であることは定義より明かである。第 1 章では endomorphism の無限小安定性およびそれに必要な概念を定義し、この Mañé の結果を次のように一般化する。

定理 1. C^rendomorphism が構造安定かつ無限小安定ならば公理 A を満たす。

diffeomorphism についての無限小安定性の概念は J.Robbin によって構造安定性定理を証明するための媒介として導入された。本論文では endomorphism の場合にそれに対応するものを無限小安定性として新たに定義した。この無限小安定性は絶対安定性より導かれる。

前出の予想について、本来の問題意識では定理 1 において無限小安定の条件を取り除く方針で研究を進めるべきである。しかし、diffeomorphism の場合と異なり構造安定性から導き出せる重要な性質が endomorphism の場合は現時点ではほとんどない。そこで、diffeomorphism の場合と同様な議論が展開できる無限小安定な endomorphism に着目して、第 2 章では no-cycle 条件の定義とそのために必要な endomorphism についての局所安定多様体理論を準備し、次の定理を証明する。

定理 2. C^r無限小安定な endomorphism は弱公理 A と no-cycle 条件を満たす。

endomorphism についての安定性理論を展開するために、diffeomorphism について S.Smale が定義した公理 A を参考にして Mañé や Przytycki によって endomorphism についての公理 A が定義されている。上記の弱公理 A とは Mañé の定義した公理 A の条件から <nonwandering set は特異点を含まない>を取り除いたものである。しかし、無限小安定性が nonwandering set 上の特異点の存在を許さないかどうかはわからなかった。だが Odani は公理 A は満足しないが弱公理 A は満たす S^1上の無限小安定な endomorphism を構成した。これによって弱公理 A の定義が妥当であることが確認された。

1980 年代に R.Mañé によって C^1diffeomorphism についての安定性予想は解決した。この結果から C^1diffeomorphism については構造安定性と無限小安定性とは同値であることがわかる。また当然これらの性質は open property である。しかし endomorphism の無限小安定性は open property でないことを Odani は示した。そこで無限小安定な endomorphism 全体の集合の内部 $\mathcal{IF}$を考える。C^1diffeomorphism についての結果からの類推で、C^1endomorphism については構造安定性と $\mathcal{IF}$に含まれることが同値ではないかと予想される。第 3 章では C^rAnosov endomorphism, $r \geq 1$, についてはこの予想が正しいことを示す。

定理 3. C^rAnosov endomorphism, $r \geq 1$, について、構造安定性と $\mathcal{IF}$に含まれることは同値である。

さらに定理 2 と $\mathcal{IF}$に含まれることからの考察より次のような endomorphism についてのΩ-安定性定理を示す。

定理 4. f を M の C^rendomorphism, $r \geq 1$, とする。
f が $\mathcal{IF}$に属するならば、f はΩ-安定である。

定理 5. f を M の C^rendomorphism, $r \geq 1$, とする。
f の十分近くのすべての endomorphism が弱公理 A を満足すれば、f はΩ-安定である。

diffeomorphism については次のことが容易にわかる。

命題. 次のことは同値である。
(a) diffeomorphism f は公理 A と no-cycle 条件を満足する。
(b) f の十分近くのすべての diffeomorphism g が公理 A を満足する。

S.Smale の diffeomorphism についてのΩ-安定性定理においてΩ-安定であるための十分条件は (a) の形で与えられている。だが、定理 5 の十分条件は diffeomorphism の場合の (b) に対応している。ゆえに定理 5 はΩ-安定性定理の diffeomorphism から endomorphism への実質的な一般化になっている。endomorphism の場合には Przytycki の十分条件があるが、<nonwandering set 上に特異点をもたない>という条件を含んでいる。しかし、nonwandering set 上に特異点を持つΩ-安定な endomorphism の例を Mañé と Pugh は構成している。したがって前出の弱公理 A を使った定理 5 における十分条件はこの例をも考慮した適切なものとなっている。実際、定理 5 の十分条件に<nonwandering set 上に特異点をもたない>を加えたものが Przytycki の十分条件と同値である。

diffeomorphism の安定性理論において位相共役は重要な概念である。endomorphism の安定性理論を展開する場合、この位相共役を使う方法ともっと弱い概念である inverse limit を使う方法とが提示されていた。この inverse limit を使う方法は Mañé-Pugh や Przytycki によって提起され、Quandt が部分的な結果を得ている。前出の定理 5 における位相共役

を使う方法での一般化とともに第 4 章では inverse limit stability の定義を与え、Ω-安定性定理を一般化して次の定理を証明する。

定理 6. C^rendomorphism f が弱公理 A と no-cycle 条件を満足すれば Ω-inverse limit stable である。

安定性予想において、closing lemma は周期点が nonwadering set で dense であることを示すのに有効な道具である。この closing lemma は C^1flow や C^1diffeomorphism についでは Pugh によって証明された。最近 Wen は closing lemma は C^1nonsingular endomorphism にまで一般化できることを示し、さらに特異点を有限個しか持たない endomorphism についても成立することを証明した。第 5 章では、特異点を有限個しか持たない endomorphism について closing lemma の成立を示した Wen の道具や議論は nonwandering set 上に特異点が高々有限個しかないという条件だけでも有効であることを示す。即ち、特異点を無限個もつ endomorphism であっても nonwandering set 上に特異点が有限個しかないならば、次のような closing lemma が成立することを証明する。

定理 7. f を nonwandering set 上に高々有限個の特異点を持つ C^1endomorphism とし、ω を nonwandering point とする。このとき、f の任意の C^1近傍 $\mathcal{U}$の中に ω を周期点にもつ C^1endomorphism g が存在する。