内2-29

早稲田大学大学院理工

博士論文概要

論文題目

量子力学及び場の量子論の確率過程による定式化

申請者
岡本 洋
Hiroshi Okamoto

物理学及応用物理学専攻素粒子理論研究

平成2年12月

量子力学及び場の量子論と確率過程の理論との間に多くの類似点があることが、量子力学の創設期以来多くの研究者により指摘されてきた。

自由粒子の量子力学的運動を記述するシュレーディンガー方程式が、時間を実数から虚数に置き換えることにより、自由粒子のブラウン運動を記述する拡散方程式に一致することは特によく知られている。この両者の対応はポテンシャルがある場合にも拡張できる。この場合、粒子の量子力学的運動はポテンシャルからリッカチ型の微分方程式を通じて定められるドリフト項を持つランジュバン方程式、あるいはそれに等価なフォッカー・プランク方程式により記述される。このように、虚数時間の非相対論的量子力学は確率過程により定式化することができる。

１９８１年に Parisi-Wu により提案された確率過程量子化法（Stochastic Quantization Method; 以下では、SQM と略す）は、ユークリッド化された時空における場の量子論を確率過程で定式化する別の枠組みである。SQM では、通常の時空に対応する４次元座標の他に新たに第５番目の仮想的な時間座標を導入し、この仮想時間方向の確率過程を考える。この確率過程は量子化したい系の運動方程式から定められるドリフト項を持つランジュバン方程式、あるいはそれに等価なフォッカー・プランク方程式で記述され、その熱平衡極限における同時刻 n 点相関関数がユークリッド化された時空における通常の場の量子論の真空状態における n 点グリーン関数に一致する。SQM は特にゲージ場の量子化、モンテカルロシミュレーション等への適用においてその有効性が認められ、大いに注目を集めてきた。

言うまでもなく、実際の時間は虚数ではなく実数である。また、実際の時空はユークリッド的ではなくミンコフスキー的である。その意味で、上記の２つの定式化における確率過程は現実に対応する過程ではない。量子論の確率過程による定式化を実数時間またはミンコフスキー時空のもとで試みることは、単に理論的に興味があるだけでなく実用面からもきわめて重要である。このことについて議論するのが本研究の目的である。

本論文では、全編を通して複素ランジュバン方程式の手法が用いられる。この手法では、ドリフト項が複素数のランジュバン方程式（複素ランジュバン方程式）において、実数非負値の確率分布を導入するために、力学変数がもともとは実数であってもこれを複素数に拡張して扱う。従って、複素ランジュバン方程式はこの複素力学変数の実部と虚部に関する連立ランジュバン方程式に分解される。実数非負値確率分布の時間発展は、この連立ランジュバン方程式に等価なフォッカー・プランク方程式により記述される。

以下に、本論文の構成と概要を述べる。

第１章は序論である。この章では、本論文で扱う課題への導入を行う。まず、量子論の確率過程による定式化の試みについての歴史をまとめる。次に、量子論

の確率過程定式化を実数時間またはミンコフスキー時空のもとで行うことの意義を述べる。

第２章では、はじめに述べた虚数時間の非相対論的量子力学の確率過程による定式化を、実数時間形式に拡張することを試みる。虚数時間形式におけるシュレーディンガー方程式とフォッカー・プランク方程式との対応を実数時間の量子力学に直接適用すると、フォッカー・プランク関数は複素数になる。このような関数を確率分布とみなすことはできないので、実数時間の量子力学を確率過程で定式化することは一見不可能のように見える。ここではこれを上記の複素ランジュバン方程式の手法により解決し、実数時間の量子力学を記述する確率過程が実際に存在することを示す。理論の出発点は複素変数に拡張された粒子の位置座標の実数時間発展を記述する複素ランジュバン方程式である。これを実部と虚部に分解して得られる連立ランジュバン方程式に等価なフォッカー・プランク方程式は、実数非負値の確率分布を与える。このフォッカー・プランク方程式から適当な操作の後に通常のシュレーディンガー方程式が導かれる。

次に、経路積分形式のもとで、上記の連立ランジュバン方程式で記述される確率過程に伴う遷移確率と通常の量子力学における遷移確率振幅との間の関係式を導く。

さらに、調和振動子の場合を例にとり、この確率過程の性質をより詳しく解析する。まず、理論の有効性を検証するために、フォッカー・プランク方程式の厳密解を求め、これから通常の量子力学における調和振動子の遷移確率振幅が得られることを示す。さらに、この確率過程は非散逸過程であり、熱平衡極限を持たないことを示す。これは量子力学における時間反転不変性を反映する。しかしながら、純虚数係数の小さな線形項をポテンシャルに加えることにより、ランジュバン方程式に減衰項を持たせることができる。この場合には、確率過程は熱平衡極限を持ち、この極限において相関関数が通常の量子力学における基底状態のグリーン関数に一致することがわかる。

以上の定式化は量子力学の確率過程的定式化に基づく新しい計算方法を与える。この定式化においては、量子力学的時間発展がランジュバン方程式により記述される。ゆえに、将来的には、量子力学的諸現象、特に時間発展を伴う現象のランジュバン方程式に基づくモンテカルロシミュレーションによる解析が可能になると期待される。また、このような定式化が可能であることは、現在の量子力学の背後に古典的確率過程で記述される何らかの根本的実在がある可能性を強く示唆する。この定式化は量子力学の基礎に関するより深い究明のための手がかりになるとも期待される。

第３章では、SQM のミンコフスキー時空への拡張について議論する。これについてはすでにいくつかの試みがなされているが、ここでは積分核を持つ複素ランジュバン方程式に基づく試みを扱う。ミンコフスキー時空に移行することによ

り、SQM のランジュバン方程式のドリフト項は純虚数となる。このような複素ランジュバン方程式で記述される確率過程は熱平衡極限を持たない。そこで、いかにしてこの複素ランジュバン方程式を安定化させ、物理的に正しい結果を与える熱平衡極限を得られるようにするかということが問題になる。ところで、ユークリッド時空における SQM のランジュバン方程式では、通常は積分核を考慮に入れない。これは積分核を 1 に選ぶことに相当するが、それとは異なる積分核を導入しても同じ熱平衡極限が得られることが知られている。この積分核の選択に関する自由度に注目し、ミンコフスキー時空における SQM においても積分核を導入してドリフト項に実数部分を持たせることにより、上記の複素ランジュバン方程式を安定化する試みが提案されている。しかしながら、このように拡張された複素ランジュバン方程式が正しい熱平衡極限を与えるかどうかについては、現在まで十分な解析はなされていなかった。そこで、この論文では、ミンコフスキー時空における自由中性スカラー場の場合を例にとり、積分核を持つ複素ランジュバン方程式で記述される確率過程の性質を詳しく調べる。ここでは積分核をクラインーゴルドン作用素の逆作用素に選ぶことによりドリフト項が完全に実数になる場合を考える。まず、複素数に拡張されたスカラー場の実部と虚部に関する連立ランジュバン方程式に等価なフォッカー・プランク方程式の厳密解を求めてみる。この解は積分核に含まれる係数に依存する減衰部分を持ち、仮想時間無限大の極限において定常状態を表す関数に収束する。即ち、この確率過程は熱平衡極限を持つ。さらに、この熱平衡極限における同時刻相関関数が通常の量子論の真空状態におけるグリーン関数に一致することが示される。即ち、この熱平衡極限は物理的に正しい結果を与える。

さらに、このフォッカー・プランク方程式を対角化することにより、その固有値が準正定値であること、およびそれらの値が積分核に含まれる係数に比例することがより明確に示される。

以上から、積分核を持つ複素ランジュバン方程式は、SQM をミンコフスキー時空に拡張するための方法として大いに有効であることが示唆される。特に、熱平衡に達する速さを積分核に含まれる係数により調節できるという点から、将来この方法によりミンコフスキー時空における有効な数値シミュレーションの実行が可能になると期待される。

第 4 章は結論である。本論文を総括し、今後の展望について述べる。