早稲田大学大学院理工学研究科

博　士　論　文　概　要

論　文　題　目

System of particles and no-interaction theorem
in Minkowski space
(ミンコフスキー空間における質点系とゼロ作用の定理)

申　請　者
米田　　元
Gen　　Yoneda

数学専攻·数理統計学研究

1994 年 10 月

本論分の舞台となるのは特殊相対性理論の世界となる4次元Minkowski空間(M,V)である。その空間上にある有限個の質点の軌跡や運動量保存について研究する論文である。本論分は3章より構成される。第1章で質点の軌跡である世界線について扱い、特にその漸近的条件について調べる。第2章では質点系の運動量保存について考え、基本定理となるNo-Interaction Theoremの証明を一般化する。第3章では光速度の相互作用を採用し、相対論的作用反作用の法則を公式化して考察する。以下では各章ごとに概要を述べる。

第1章では質点の運動を取り扱うための道具である世界線について調べる。V上の世界線をつぎのように定める。

定義 $X \subset V$が世界線であるとは次のような全射$\boldsymbol{x}$が一意的に存在することを言う。実数の開区間Iは0を含み、$\boldsymbol{x}: I \to X$は$\dot{\boldsymbol{x}}(\tau) \in$ FTU(future timelike unit vector) $\forall \tau \in I$となり、さらに$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$となる。

この世界線Xに対して次のような7つの条件を考える。

(A) [*inertial permanency*] 慣性時刻空間が実数全体である。

(B) [*proper permanency*] 固有時刻空間が実数全体である。

(C) [*gamma finiteness*] γ因子は上界を持つ。

(D) [*visibility*] M上の任意の点を頂点とする未来向き光円錐、及び過去向き光円錐はそれぞれ世界線Xと共有点を持つ。

(E) [*endlessness*] 世界線が端点を持たない。

(F) [*drawability of perpendicular*] 任意の点から垂線が下ろせる。

(G) [*acceleration vanishing*] 固有加速度が漸近的に0になる。

世界線を質点の軌跡と見ればこの7つは全て物理的に自然である。だが数学的にはこの7つは自明なことではない。特殊相対性理論においては全ての慣性系は同等であるとされる。従ってそこで考えるべき条件も慣性系に依存しては不自然である。従ってそこで考えるべき条件も慣性系に依存しては不自然である。

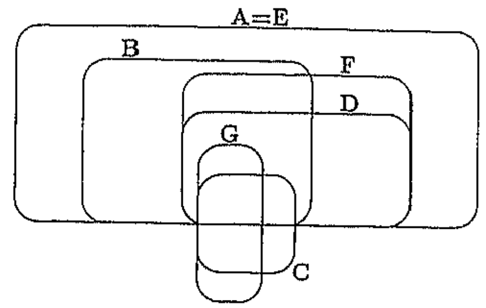
定理 条件(A)-(G)はそれぞれ慣性系に依らない。

複数の条件が提示されているので包含関係を調べる。

定理 (1) (B)⇒(A). (2) (D)⇒(F). (3) (F)⇒(A). (4) (A)∩(C)⇒(B). (5) (A)∩(C)⇒(D). (6) (A)⇔(E). (7) (A)∩(G)⇒(B). (8) (A)∩(G)⇒(D).

図示すると、

A～Gのベン図



となる。さらに次のことを示す。

定理 このベン図の13個の領域には全て世界線が存在する。

第2章では質点系の運動量保存について考える。有限個の質点について慣性系に依らずに運動量が保存するのは全ての質点が直線運動をする時のみ（相互作用がないということ）である、といのうがNo-Interaction Theoremの考えである。これは特殊相対論においては遠隔作用が存在しないことを示すものとして公理的に認識されている。このTheoremはCurrieらによって提唱され証明されているが、HamiltonianやLagrangianを用いて証明されている。これらが存在するのはひとつの仮定である。この論文ではそれらの仮定なしに証明する(ただし4点系まで)。

Minkowski空間(M,V)上でn個の質点を考え、運動量と各運動量を固有に定義する。そこに次の仮定をする。

仮定 空間的平面上の各質点の運動量(角運動量)の総和は平面の選び方に依らない。

この仮定は次のことと同じである。全ての慣性系において運動量（角運動量）が保存し、さらに保存したその量も慣性系に依存しない。

次の定理を証明する。

定理 n質点系$(n = 1, 2, 3, 4)$が上の仮定を満たすのは自明な場合(全ての世界線が直

線) であるときのみである。

第3章では前章の結果を受けて、相互作用の記述や運動量保存を改める方法を考える。ニュートンの作用反作用の法則は相対論で受け入れられない。それはこの法則が相互作用が瞬時に伝わることを意味してしまうからである。そこで光速度による相互作用を考え、この法則を修正する。

質点Aの時刻αに対し、質点Bの遅延時間$\mathrm{ret}(\alpha)$を定義する。比較すべきなのはAの固有時刻αにおける作用を$\mathbf{R}(\alpha)$と, Bの固有時刻$\mathrm{ret}\alpha$における反作用$\overline{\mathbf{A}}(\mathrm{ret}\alpha)$である。$\alpha_1$から$\alpha_2$の間にAが受け取った運動量は$\mathrm{ret}\alpha_1$から$\mathrm{ret}\alpha_2$の間にBが発した運動量に相当する、つまり

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\mathbf{R}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\int_{\mathrm{ret}\alpha_1}^{\mathrm{ret}\alpha_2}\overline{\mathbf{A}}(\beta)\mathrm{d}\beta=0.$$

この積分型の式を微分型にすると

$$\mathbf{R}(\alpha)+\dot{\mathrm{ret}}(\alpha)\overline{\mathbf{A}}(\mathrm{ret}\alpha)=0.$$

これは光速度で伝わる場合の時間の遅れ、及び時間進行の違いを考慮に入れており、相対論的作用反作用の法則と呼ぶ。

運動量を持ちうるものは質点と相互作用を媒介する光子だと考えると総運動量は、

$$\mathbf{P}(\alpha,\beta):=m_a\dot{\mathbf{a}}(\alpha)+m_b\dot{\mathbf{b}}(\beta)-\int_{\mathrm{ret}\beta}^{\alpha}\mathbf{A}(\tau)\mathrm{d}\tau-\int_{\mathrm{ret}\alpha}^{\beta}\overline{\mathbf{A}}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

となる。第1,2項は質点の運動量で第3,4項は航行中の光子の運動量である。

定理 相対論的作用反作用の法則を使えば総運動量は保存する。

章の後半ではこの法則の応用性を調べる。場による相互作用のシステムとの関係やWheelerらが提唱した場を使わないDirect Interaction Systemとの関係について調べる。