早稲田大学大学院理工学研究科

博士論文概要

論文題目

Knot-inevitable projections of planar graphs

(平面的グラフの結び目不可避射影像)

申請者

塚本 達也

Tatsuya Tsukamoto

数理科学専攻 幾何学研究

1999 年 5 月
(西暦)

空間グラフ理論は、結び目理論の拡張として、近年活発に研究されている分野である。前者は空間に埋め込まれたグラフ、即ち一次元複体を、後者は空間に埋め込まれた円周、即ち一次元球面を研究する分野である。今まで多くの研究者によって、結び目に対する結果を空間グラフにまで拡張することが試みられており、数多くの結果が得られている。いくつかの結果は一般のグラフにまでは拡張できないが、制限を加えたグラフへの拡張を考えることも時に本質的であり、興味深い。第1章では、グラフに平面的という制限を加えたものを扱う。そこで結び目の基本的定理を、空間に埋め込まれた平面的グラフにまでは拡張できないことを示した。K. Taniyama の命題から自然に考えられる問題に対する解答を与える。また、Vassiliev 不変量は、これまでに知られている量子不変量を網羅する結び目の不変量であり、近年結び目理論の中心的存在として盛んに研究されているが、これに関して最近 K. Habiro によって二つの結び目が同じ n 型の Vassiliev 不変量の値を持つための必要十分条件が彼の定義した結び目に対する局所操作を用いて与えられた。第2章では、その局所操作による結び目の $n+1$ 型の Vassiliev 不変量の値の変化量を与える。

第1章 結び目理論における基本的定理の一つに、結び目のどのような射影像も各二重点に適当に上下関係を与えることで、自明な結び目の正則図形が得られる、というものがある。この定理の空間グラフ理論への拡張を考えると、どのような平面的グラフの平面へのはめ込み（多重点は有限個の二重点のみとし、以下平面グラフの射影像という）も、各二重点で辺に適当に上下関係を与えることで、その平面的グラフの平面への埋め込みにアンビエントアイソトピックとなるものが得られるか、という問題となる（ここで自明な結び目に対応するものが平面に埋め込まれたグラフであり、一般のグラフでは相当するものが定義できていない）。これは結び目の多項式不変量を、空間に埋め込まれた平面的グラフの多項式不変量に拡張できるかという問題とも深く関わっている、空間グラフ理論における基本的な問題である。しかし、K. Taniyama はこれに対し次のような否定的な解答を与えた。

命題 [谷山] 各二重点で辺にどのように上下関係を与えても、得られた正則図形はホップ絡み目にアンビエントアイソトピックな部分グラフを含むような、平面的グラフの射影像が存在する。

しかし、この命題により、得られる正則図形が皆、ホップ絡み目という特定の絡み目を含むような平面的グラフの射影像が存在することがわかった。これは空間グラフを単に結び目理論の拡張としてのみ、とらえては想像もつかないものであり、空間グラフ理論の奥の深さを示すものである。このことから自然に、次のような問題が考えられる。

問題 各二重点で辺に上下関係を与えることで得られる正則図形が皆、指定された結び目にアンビエントアイソトピックな部分グラフを含むような、平面的グラフの射影像が存在するか。

本論文第1章ではこの問題に対して次のような解答を与える。ここで結び目、絡み目とも空間に埋め込まれた平面的グラフと考えられるので定理1は上の問題に対し完璧な解答を与えており、また平面的グラフのグラフの部分グラフは平面的グラフであるから、平面的グラフの射影像を考える限り、定理1は最大限の結果である。

定理1 任意の、空間に埋め込まれた平面的グラフ H に対し、各二重点で辺にどのように上下関係を与えても、得られた正則図形が H にアンビエントアイソトピックな部分グラフを含むような、平面的グラフの射影像が存在する。

第2章 有向結び目の複素数値不変量 v_d に対し、次の式によって特異結び目（二重点を持つ結び目）の不変量が得られる。

$$v_d \left(\text{図形} \right) = v_d \left(\text{図形} \right) - v_d \left(\text{図形} \right).$$

$d+1$ 個以上の二重点をもつ特異結び目については常に、その値が0であるような v_d を d 型 Vassiliev 不変量という。この条件は、 d 個の二重点をもつ特異結び目 K^d に関する不変量の値 $v_d(K^d)$ は埋め込みによらないと言い換えることができる。よって、 $v_d(K^d)$ を考える際には、 n 個の有向円周において、どの2点が同一視されることで K^d が得られるかということのみが問題となる。そこで、有向円周において、同一の点となった2点を点線（コードという）で結んだものをコード図といい、特異結び目 K^d をコード図を用いて表すと扱いやすく、応用上も都合が良い。D. Bar-Natan は、コード図の集合の代数的構造を研究する際、漢字図と呼ばれる、コード図の一般化にあたるもの（ここではウェブ図ということにする）を導入した。ウェブ図やコード図の有向円周を除いたものを内部グラフというが、コード図の内部グラフは辺の集まりであるのに対し、ウェブ図の内部グラフは3つの辺が一点を共有するのを許したグラフである。各ウェブ図はSTU関係を用いて、コード図の線形和で書くことができることに注意されたい。

$$\text{図形} = \text{図形} - \text{図形}$$

Vassiliev 不変量は近年結び目理論の中心的存在として盛んに研究されているが、各結び目に対し、全ての Vassiliev 不変量が一致するような結び目はそれ自身のみである、というのは Vassiliev 不変量の研究のみに留まらず結び目研究全体の中でも非常に大きな問題である。K. Habiro は、2つの結び目の Vassiliev 不変量の値が一致する必要十分条件を、結び目の局所変形を用いて表した。

定理 [葉広] 二つの結び目 K, K' に対し次の二つの条件は同値. (n は 2 以上の整数)

1. K と K' が全ての n 型 Vassiliev 不変量に対して同じ値を持つ.
2. K と K' が有限回の C_{n+1} 変形に移り合う.

従って C_{n+1} 局所操作は各結び目の n 型 Vassiliev 不変量の値を保存する. 本論文第 2 章では, C_{n+1} 局所操作によって結び目の $n+1$ 型 Vassiliev 不変量の値がどれだけ変化するかを示す.

定理 2 v_n を n 型 Vassiliev 不変量とし, K' が K に C_n 操作を一回施すことにより得られたとする. このとき, 対称群 S_n の元 σ に対する one-branch tree diagram が存在し, $v_n(K) - v_n(K') = \pm v_n(T_\sigma)$ が成り立つ.

ここで one-branch tree diagram とは, 内部グラフが一本の幹が n 個の枝を持つ木状のグラフであるようなウェブ図であり, n 個の枝の分岐点と有向円周との n 個の交点が対称群 S_n の元 σ に対応して結ばれたものである. また, C_2 -move は Delta unknotting operation と同値であり, C_3 -move は Clasp-pass move と同値であることから, $n = 2, 3$ の場合についてそれぞれ 2, 6 種類の one-branch tree diagrams の 2, 3 型 Vassiliev 不変量を計算することにより次を得る.

系 3 結び目に Delta unknotting operation を一回施すことで, その結び目の order 2 の Vassiliev 不変量の値は $\pm v_2$ 変わる.

系 4 結び目に Clasp-pass move を一回施すことで, その結び目の order 3 の Vassiliev 不変量の値は 0 もしくは $\pm v_3$ 変わる.

また Conway 多項式の二次の係数や Jones 多項式を三回微分したものに 1 を代入したものはそれぞれ, type 2, 3 の Vassiliev 不変量であることが知られているが, それらについて実際にコード図の値を計算することによって次が得られる. 系 5 については先に M. Okada によっても得られている. また定理 2 において n が 3 以上の場合, $v_n(T_\sigma)$ の値が 0 となる可能性がある. これに関して定理 7 を得ている.

系 5 [岡田] 結び目に Delta unknotting operation を一回施すことで, その結び目の Conway 多項式の二次の係数の値は ± 1 変わる.

系 6 結び目に Clasp-pass move を一回施すことで, その結び目の Jones 多項式を三回微分したものに 1 を代入した値は 0 もしくは ± 36 変わる.

定理 7 $n \geq 3$ の時, 任意の結び目に対してその結び目の型を変えない C_n -move が存在する.