早稲田大学大学院 理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

On mathematical structure of solutions to some discrete integrable systems

ある離散可積分系の解の数理構造について

申 請 者

長井	秀友
Hidetomo	Nagai

数学応用数理専攻 非線形システム研究

2009 年 9 月

微分方程式に始まった可積分系理論では，Grassmann多様体，Affine Lie環，Plücker関係式，Young図形，Schur関数など幾何的，代数的な数理構造との関連が次々と明らかになり，理論が対象とする方程式の主流も差分方程式やセルオートマトンなど離散的なものに移行しつつある．本論文も離散可積分系に関する方程式および解の代数構造を研究対象とする．その内容は，高階可積分常差分方程式に関するものと，超離散ソリトン方程式の解構造に関するものとに分かれる．

まず前半の高階の可積分差分方程式について，本論文では2階の可積分常差分方程式を拡張することにより3階以上の高階の可積分方程式を生成し，さらにその解の構造を調べた．差分方程式が可積分であるとは，方程式の階数に見合うだけの十分な個数の独立な保存量をもつことで定義される．代表的なものとして可積分2階常差分方程式である対称Quispel-Roberts-Thompson (QRT)系

$$x_{n+1}=\frac{f_1(x_n)-x_{n-1}f_2(x_n)}{f_2(x_n)-x_{n-1}f_3(x_n)}$$

があり，保存量がひとつ存在することで可積分性が保証される．このような2階の可積分常差分方程式の研究は同じく2階の常微分方程式の研究とともに盛んに行われてきた．ところが，3階以上の高階の方程式については研究が手つかずの状態と言ってよく，具体例が散見される程度である．

そこで本研究では与えられた差分方程式が可積分であるかを判定する「代数的エントロピーテスト」を援用し，対称QRT系を拡張することによって高階な可積分差分方程式を生成する一般的な手法を提案する．用いた手法は大まかに以下の手順で構成される．

(1) 対称QRT系に含まれる定数を，代数的エントロピーを援用しながら可積分性を壊さないように非自励化する．
(2) 得られた非自励化方程式を2つ以上組み合わせることにより3階以上の可積分差分方程式を導出する．

解の構造を調べるためには得られた高階可積分差分方程式をもう一度2階の方程式に分離する．ただし，非自励化定数を含まない形で分離する必要があり，分離手続きは自明ではなく発見的に行う．得られた結果の例を挙げるとQRT系$(1+x_{n-1})(1+x_{n+1})=c\,x_n$の定数$c$を2周期化し，3階可積分方程式

$$x_{n+2}=\frac{\alpha\,x_n x_{n+1}}{(1+x_{n-1})(1+x_n)(1+x_{n+1})}-1$$

を得る．これを偶数ステップ，奇数ステップの2階差分方程式にそれぞれ分離すると，

$$x_{2n+2}=\frac{g_1(x_{2n})-x_{2n-2}g_2(x_{2n})}{g_2(x_{2n})-x_{2n-2}g_3(x_{2n})},\qquad x_{2n+3}=\frac{h_1(x_{2n+1})-x_{2n-1}h_2(x_{2n+1})}{h_2(x_{2n+1})-x_{2n-1}h_3(x_{2n+1})}$$

を得る．両方程式とも対称 QRT 系の形式に従っており，2つの対称 QRT の連立系により高階の可積分方程式が得られることが明らかになった．以上の手法は汎用性に富み，対称 QRT 系に限らず適用可能であり，本論文では他に離散 Painlevé 方程式についても同様の高階化，偶奇分離を行っている．

二番目のテーマは超離散ソリトン方程式の解構造である．従属変数を離散化する超離散化手法はソリトンセルオートマトンを代表とする完全デジタル可積分系を次々と生み出してきた．最初に発見された箱玉系と呼ばれるソリトンセルオートマトンは，Affine Lie 環のクリスタルとの関連で現在も盛んに研究がなされている．また交通流のモデルなどデジタル数理モデルにも多大な影響を及ぼしている．

しかしながら，超離散化は手法の基本公式 $\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log(e^{A/\varepsilon}+e^{B/\varepsilon})=\max(A,B)$ に内在する「負の問題」により，従属変数を自動的に離散化する汎用的な手法ではなく，適用できる方程式の形式が限定される．また，同じ理由により，いわゆる佐藤理論に代表されるソリトン方程式の統一理論をすべて超離散化によって翻訳することは現在に至るまで成功していない．その理由は明白で，理論の根幹をなす Plücker 関係式，解の行列式表示等々がすべて負の問題に抵触するからである．

これに対して本論文では超離散パーマネント形式と呼ばれる新しい解の表現を提示し，それを手がかりに超離散 Bäcklund 変換，超離散 Plücker 関係式等を提出する．超離散パーマネント(UP)はこれら結果の根本をなす数学的表現であり，N 次実行列 (a_{ij}) に対して，$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\left(\sum_\pi\prod_{1\le i\le N}\exp\frac{a_{i\pi_i}}{\varepsilon}\right)=\max_\pi\sum_{1\le i\le N}a_{i\pi_i}\equiv\max\,[a_{ij}]$ によって定義される．ここで $\pi=\{\pi_i\}$ は 1 から N までの任意の順列である．UP が連続のソリトン理論における行列式の超離散対応であることが本論文を含む種々の研究により明らかになりつつある．

本論文ではこの UP を用いて以下の結果を提出する．

(1) 超離散変形 KdV（mKdV）方程式，超離散戸田方程式の UP による新しい解の表現を与える．たとえば超離散 mKdV 方程式

$$f_{i+1}^n+g_{i-1}^n=\max\left(f_i^{n-1}+g_i^{n+1}-\max(0,-2M),\,f_i^{n+1}+g_i^{n-1}-\max(0,2M)\right)$$
$$f_{i-1}^n+g_{i+1}^n=\max\left(f_i^{n-1}+g_i^{n+1}-\max(0,-2L),\,f_i^{n+1}+g_i^{n-1}-\max(0,2L)\right)$$

における UP 形式の N ソリトン解 f_i^n は

$$f_i^n=\frac{1}{2}\max\begin{bmatrix}|s_1(n,i)+p_1| & \cdots & |s_1(n,i)+(4N-3)p_1|\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ |s_N(n,i)+p_N| & \cdots & |s_N(n,i)+(4N-3)p_N|\end{bmatrix}$$

$$g_i^n = \frac{1}{2}\max\begin{bmatrix} |s_1(n,i)-p_1| & \cdots & |s_1(n,i)+(4N-5)p_1| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |s_N(n,i)-p_N| & \cdots & |s_N(n,i)+(4N-5)p_N| \end{bmatrix}$$

で与えられる．このような解の表現形式は従来にないものであり，以下に述べるより一般的な数理構造につながる重要な成果となっている．

(2) UP による一般化 N ソリトン解

$$f_i^n = \frac{1}{2}\max\begin{bmatrix} |s_1(n,i)| & \cdots & |s_1(n+k(N-1),i+l(N-1))| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |s_N(n,i)| & \cdots & |s_N(n+k(N-1),i+l(N-1))| \end{bmatrix}$$

が満たす新しい超離散ソリトン方程式および超離散 Bäcklund 変換を提出する．ここでk,lは非負の定数とする．たとえば分散関係式$q_j = (|p_j + C| - |p_j - C|)/2$を与えたとき$f_i^n$は $f_i^n + f_{i-l+1}^{n+k} = \max(f_{i-l}^{n+k-1} + f_{i+1}^{n+1}, f_{i-l}^{n+k} + f_{i+1}^{n} - C)$ $(k \geq 2, C \geq 0)$を満たす．これら方程式と変換はパラメータや分散関係式を適宜与えることにより，さまざまな超離散ソリトン方程式を与えることができ，統一理論の基礎をなす重要な成果となっている．

(3) 解を UP 形式のソリトン解に限定することで，Plücker 関係式の超離散版を提案する．簡単な場合，ソリトン解に対応する 2 次元ベクトル$\mathrm{x_j} = (\mathrm{y_1} + \mathrm{j\,r_1}, \mathrm{y_2} + \mathrm{j\,r_2})^{\mathrm{T}}$を用いて

$$\max[\mathrm{x_1\ x_3}] + \max[\mathrm{x_2\ x_4}] = \max(\max[\mathrm{x_1\ x_2}] + \max[\mathrm{x_3\ x_4}], \max[\mathrm{x_1\ x_4}] + \max[\mathrm{x_2\ x_3}])$$

で表される．ソリトン解に限定するとはいえ，上記の関係式は連続のソリトン方程式の解構造を与える Plücker 関係式との対応が明白であり，統一理論完成のための重要な手がかりを与えている．この結果を拡張して，より一般的な解構造に対応させることで最終的な結果，すなわちソリトン方程式の解の代数構造の超離散系に対する完全な翻訳を得ることが期待できる．

博士論文では以上の結果を次のように構成する．

第 1 章：研究の背景

第 2 章：可積分差分方程式の高階化

第 3 章：超離散 mKdV 方程式，超離散戸田方程式の UP 形式解

第 4 章：一般化超離散ソリトン解が満たす超離散ソリトン方程式および Bäcklund 変換

第 5 章：超離散 Plücker 関係式を用いたソリトン解の証明