

2012 年度修士学位論文

GI/GI/1 待ち行列システムにおける待ち時間の分散近似式に関する研究

指導： 甲藤 二郎教授
小松 尚久教授

2013 年 2 月 8 日

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 情報理工学専攻

5111B072-7 田村 健範

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究の背景と目的	1
1.2	本論文の構成	3
第 2 章	従来研究	5
2.1	通信トラフィック理論	5
2.2	ケンドール記号	6
2.3	Kraemer/Langenbach-Belz の近似式	6
2.4	GI/G/1 に於ける待ち時間の分散近似式	8
2.5	拡散近似式	9
2.6	M/G/1 に於ける待ち時間の分散拡散近似式	9
2.7	GI/GI/1 に於ける待ち時間の分散拡散近似式	10
第 3 章	GI/GI/1 システムに於ける高精度近似式の提案	13
3.1	提案近似式	13
第 4 章	シミュレーションによる評価実験	15
4.1	実験概要	15
4.2	モンテカルロ式シミュレータ構築	15
4.3	実験結果	17
4.3.1	$H_2/H_2/1$	17
4.3.2	$H_2/E_2/1$	18
4.3.3	$M/M/1$	18
4.3.4	$E_2/E_2/1$	19
4.3.5	$D/D/1$	20
4.4	まとめ	20
第 5 章	実環境における近似式の評価実験	21
5.1	実験概要	21
5.2	トラヒックデータ	21
5.3	モデルの定義	22
5.4	実験諸元	23
5.5	実験結果	24

5.6	サービス時間分布	24
5.7	精度評価	27
5.8	考察	28
第 6 章	結論	29
6.1	まとめ	29
6.2	今後の検討課題	29
謝辞		31
参考文献		33
付録 A	シミュレーション評価実験結果	35
付録 B	確率分布	41
B.1	正規分布	41
B.2	指数分布	42
B.3	2 次アーラン分布	44
B.4	2 次の超指数分布	45
関連業績		49

第 1 章

序論

1.1 研究の背景と目的

近年、インターネットの普及と高速化に伴い、多くのユーザがインターネット上で多種多様なサービスを享受できる時代となった。しかし、一方で震災時に於ける一時的なバーストラフィックをはじめとし、ユーザの増加に伴うネットワークやサービスサーバへの負荷の増大は、サービス品質を低下させる脅威となることが容易に推測できる。特にリアルタイム性の求められるサービスにおいて、サービスの品質の水準を一定以上に保つことは非常に重要な課題である。このため、ネットワークを構築する際にはユーザの不満を最小限に抑えつつ、効率的なネットワークを設計することが必要になる。このようなネットワークを設計する上で、ウェブサーバやネットワークのアクセス応答遅延時間や遅延時間の変動を評価、予測することが一つの重要なファクターとなる。

アクセス応答遅延時間の変動（ジッタ）を予測、評価することを考えた場合、現在ではシミュレータを作成し、用いることによって評価することが多い。しかし設計するネットワークが巨大になるにつれ、シミュレータの作成や実行から結果を得るまでの時間等、多大なコストがかかる場合がある。そのような中で、単純でかつ一般的な理論式が、高い精度でアクセス応答遅延時間の変動を評価、予測することができれば、コストをかけずに最適なネットワークを設計することが可能になると考えられる。

そこで本論文では特にアクセス応答遅延時間の変動（ジッタ）に着目し、待ち行列理論を用いてネットワークをモデル化し、遅延時間の分散を求める理論式を提案する。ネットワーク上では、例えばルータやサービスサーバにおいて一度に大量のパケットが到着すると、パケットが処理されるまでに待ちが発生することがある。

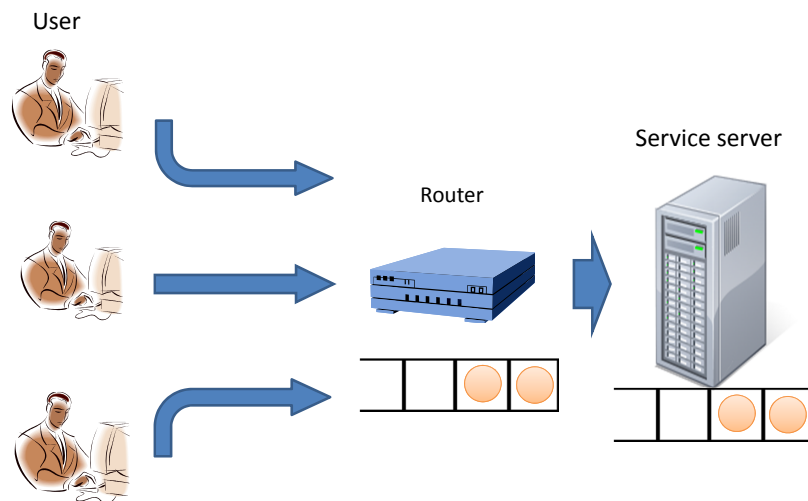


Fig.1.1 Queuing packets in the network

このため、QoS (Quality of Service) を実現するネットワークを設計する上で、遅延変動評価において待ち行列理論を用いることは非常に有効な手段であるといえる。遅延時間の平均については、Kraemer と Langenbach-Belz が既存研究において高精度な近似式を提案している。現在でもこの式より近似精度の高い近似式は提案されていないことから、公式として扱われることがあるほどである。一方で遅延の変動については十分な議論がなされておらず、遅延時間の平均のような精度の高い近似式は提案されていない。そこで本論文では遅延変動に着目し、これを評価するためにパケットの待ち時間の分散に関する理論式を提案し、シミュレータと実トラフィックデータを用いて評価を行う。

1.2 本論文の構成

本論文の構成と各章の概要を以下に示す.

[第 1 章] 序論

研究を行うにあたっての背景, 目的と, 本論文の構成を述べる.

[第 2 章] 従来研究

ネットワークに待ち行列理論を応用した従来研究について述べる.

[第 3 章] $GI/GI/1$ システムに於ける待ち時間の分散近似式の提案

本論文について提案する待ち時間の分散近似式について述べる.

[第 4 章] シミュレーションによる評価実験

シミュレータを用いて提案する近似式の精度を評価する.

[第 5 章] 実環境に於ける近似式の評価実験

実際のインターネットトラフィックデータを用いて, 提案する近似式がどの程度実環境の待ち時間の分散を近似できているか評価する.

[第 6 章] 結論

本論文のまとめと今後の検討について述べる

ていくパケット交換型は待時系に分類することができる。即時系での性能指標は、主に送信要求が失われる呼損率であり、一方、待時系での主な性能指標は平均待ち時間である。また、マルチメディア通信が実現され、www (world wide web) の普及により、インターネットを通じてテキストデータだけでなく、音声や動画像といったデータをやり取りできるようになった今では、ユーザの不満を最小限に抑え、かつ効率的なネットワークを構築するには待時系の性能評価が不可欠であり、盛んに研究されてきた。特にインターネットトラフィックでは、動画のストリーム等によるバースト入力が多く見られ、従来のようなポアソン過程を前提としたモデルでは不十分であり、非ポアソン過程を考慮に入れた解析が必要になる。以下に待ち行列システムを表すケンドール記号の表記方法と、待ち時間について研究されてきた内容を述べる。

2.2 ケンドール記号

待ち行列システムのモデルは、しばしばケンドール記号を用いて表記される。以下にその表記方法について述べる。

$$A/B/c/k$$

A : 客の到着間隔分布

B : サービス時間分布

c : 客を処理する窓口 (サーバ) の数

k : 待合室 (キュー) の長さ

待合室の長さが ∞ である場合は省略して表記される場合がある。また、客の到着間隔分布、サービス時間分布に関して用いられる記号の例を示す。

D : 一定分布

M : 指数分布 (ポアソン分布)

E_k : k 次アーラン分布

H_k : k 次超指数分布

G : 一般分布

GI : 再生過程に従う一般分布

2.3 Kraemer/Langenbach-Belz の近似式

従来では非常に多くの場合、ネットワークを設計する上で、トラフィックの諸過程についてはコンピュータの助けを借りての数値計算を必要とされていた。トラフィック工学の多くの応用において、方程式を解くための手続きやツールはトラフィック技術者には納期内に使用できないか、あるいは計算作業の量が迅速な見積もりに見合わないかのどちらかであった。このため、システ

2.3 Kraemer/Langenbach-Belz の近似式

ム解析や設計において平均待ち時間と待ち確率を単純でかつ一般的な近似式によって求められることが望まれていた．そのような中で 1978 年に，Kraemer と Langenbach-Belz [1] によって，GI/G/1 の待ち行列における平均待ち時間と待ち確率を求める近似式 (以下 K-LB 近似式) が提案された．以下にその近似式を示す．

T_A = 客の到着間隔時間

T_W = 客の待ち時間

T_H = サービス時間

λ = 客の到着率

h = 平均サービス時間

この時，トラフィック A は以下のように表される．

$$\begin{aligned} A &= \frac{E(T_H)}{E(T_A)} \\ &= \lambda \cdot E(T_H) \\ &= \lambda \cdot h \end{aligned} \tag{2.1}$$

また，客の到着間隔に関する平方変動係数を C_A^2 ，サービス時間に関する平方変動係数を C_H^2 とすると，それぞれ以下のように表される．

$$C_A^2 = \frac{Var(T_A)}{E(T_A)^2} \tag{2.2}$$

$$C_H^2 = \frac{Var(T_H)}{E(T_H)^2} \tag{2.3}$$

上記の式を用いて，GI/G/1 システムにおける平均待ち時間 $E(T_W)$ と待ち確率 W は以下の式で表される．

$$\begin{aligned} E(T_W) &= \frac{A \cdot h}{2(1-A)} \cdot (C_A^2 + C_H^2) \cdot f(A, C_A^2, C_H^2) \\ f(A, C_A^2, C_H^2) &= \begin{cases} \exp\left(-\frac{2(1-A)}{3A} \cdot \frac{(1-C_A^2)^2}{C_A^2 + C_H^2}\right) & C_A^2 \leq 1 \\ \exp\left(-(1-A) \cdot \frac{C_A^2 - 1}{C_A^2 + 4C_H^2}\right) & C_A^2 \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$W = A + (C_A^2 - 1) \cdot A(1 - A) \cdot g(A, C_A^2, C_H^2) \quad (2.5)$$

$$g(A, C_A^2, C_H^2) = \begin{cases} \frac{1 + C_A^2 + A \cdot C_H^2}{1 + A(C_H^2 - 1) + A^2 \cdot (4C_A^2 + C_H^2)} & C_A^2 \leq 1 \\ \frac{4A}{C_A^2 + A^2 \cdot (4C_A^2 + C_H^2)} & C_A^2 \geq 1 \end{cases}$$

(2.4) は GI/G/1 システムにおける平均待ち時間の近似公式とも呼ばれ、これまで数多く提案されてきた平均待ち時間の近似式の中でも特に高い近似精度持つ。

K-LB 近似式により、平均待ち時間において比較的容易に汎用な近似式を得ることができた。しかし、ネットワーク設計において、QoS を実現するためには遅延 (平均待ち時間) のほか、ジッタ (待ち時間の振れ幅) や帯域制御といった様々な検討項目がある。中でもジッタを求める近似式に関しては平均待ち時間を求める近似式ほど盛んに議論がなされておらず、検討の余地がある。これは、待ち行列長のモーメントと待ち時間のモーメントの関係式は Little の公式以外に知られていないためである。しかしジッタを解析するには、待ち時間の分散を求める必要がある。そこで、現在提案されているいくつかの待ち時間の分散に関する近似式について以下に述べる。

2.4 GI/G/1 に於ける待ち時間の分散近似式

1986 年に馬場 [2] によって GI/G/1 に於ける待ち時間の分散に関する近似式が提案された。 n 番目の客は時刻 t_n に到着し、そのサービス時間を S_n とする。到着時間間隔 $T_n = t_{n+1} - t_n (n \geq 1)$ とサービス時間 $S_n (n \geq 1)$ は二つの独立同一分布に従う確率変数列とし、 $P(T_n \leq t) = A(t)$, $P(S_n \leq t) = B(t)$, $P(T_n - S_n \equiv U_n \leq t) = U(t)$ と定義する。

W_n を n 番目の客の待ち時間とし、 $W_1 = 0$ とする。また、 I は最初の regeneration cycle におけるサーバの idle time である。このとき、システムの平均待ち時間 $E(W)$ と待ち時間の分散 $V(W)$ は以下ようになる。

$$E(W) = -\frac{E(U^2)}{2E(U)} - \frac{E(I^2)}{2E(I)} \quad (2.6)$$

$$V(W) = -\frac{E(U^3)}{3E(U)} + \left(\frac{E(U^2)}{2E(U)}\right)^2 + \frac{E(I^3)}{3E(I)} - \left(\frac{E(I^2)}{2E(I)}\right)^2 \quad (2.7)$$

(2.6),(2.7) より、idle time の 3 次までのモーメントを求めることができれば $V(W)$ を計算することができる。

しかし (2.7) では、heavy traffic では非常に精度がよいが、light traffic の場合だと精度が悪化することが確認されており、トラフィック密度が大きい所でしか用いることが出来ない。

この他に、拡散近似を用いて待ち時間の分散を求める近似式が提案されている。以下に拡散近似と、拡散近似を用いて待ち時間の分散を求めた近似式を述べる。

2.5 拡散近似式

拡散近似とは、重負荷時における待ち行列の特性量に対する漸近的近似、待ち行列における系内客数、待ち時間等の確率過程が、重負荷時に適当な正規化のもとで拡散過程に収束することを示す重負荷極限定理そのものをさす場合と、これらの特性量の拡散過程モデルを指す場合とがある。連続時間、連続状態を持つマルコフ過程 $X(t)$ に対して、 $X(t)$ の確率密度関数 $f(x, t)$

$$f(x, t)dx = P\{x \leq X(t) < x + dx\} \quad (2.8)$$

は、いくつかの数学的条件を満たしたとき、以下の偏微分方程式を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [a_n(x, t)f(x, t)] \quad (2.9)$$

とくに $a_n(x, n) = 0$ ($n = 2, 3, \dots$) とした (2.9) の 1 階偏微分方程式を流体方程式、同様に $a_n(x, n) = 0$ ($n = 3, 4, \dots$) としたとき、 x に関して 2 階、 t に関して 1 階の偏微分方程式を拡散方程式という。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}[a_1(x, t)f(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[a_2(x, t)f(x, t)] \quad (2.10)$$

である [3]。

(2.10) を用いて待ち時間の分散を求めている近似式について、以下に述べる。

2.6 M/G/1 に於ける待ち時間の分散拡散近似式

1976 年に Kleinrock [4] が (2.10) を用いて客の到着間隔分布がポアソン過程に従う場合である M/G/1 システムにおける待ち時間の分散に関する近似式を拡散近似を用いて提案している。また、システムのサービス規律を FIFO(First-in-First-out) としている。

\bar{x}^k = サービス時間の k 次モーメント

λ = 客の到着率

μ = サービス率

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

とするとき、M/G/1 における分散 σ^2 は以下で近似することができる。また、サービス率は $\mu = 1$ として計算されている。

$$\sigma^2 = \left[\frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1 - \rho)} \right]^2 + \frac{\lambda \bar{x}^3}{3(1 - \rho)} \quad (2.11)$$

2.7 GI/GI/1 に於ける待ち時間の分散拡散近似式

2011 年には高橋 [5] が残余仕事量に拡散近似を用いて解析することにより、GI/GI/1 における待ち時間の分散に関する近似式を提案している．待ち行列システムの拡散近似には、拡散方程式に支配されるという制限のほかに、待ち時間が負にならないための境界条件が必要である．この際、対象システムのサービス規律は FIFO としている．

客の到着率を λ 、サービス率を μ としたとき、トラフィック密度 ρ は $\rho = \lambda/\mu$ で表される．また、客の到着間隔に関する平方変動係数を C_a^2 、サービス時間に関する平方変動係数を C_b^2 とすると、ドリフト係数 α と拡散係数 β は以下で表される．

$$\alpha = \rho - 1 \quad (2.12)$$

$$\beta = \rho \frac{C_a^2 + C_b^2}{\mu} \quad (2.13)$$

ここで、二種類の境界について考える．Newell や Heyman らが扱った反射壁境界 (Reflect barrier: RB) と、Feller や Gelenbe らが扱った基本復帰境界 (Elementary return: ER) である．反射壁境界は、拡散方程式に支配されるサンプルパスが原点 ($x = 0$) から負の領域へ行くことを禁じるものである．しかし原点に滞在する確率が存在しないため、light traffic において近似精度が劣るという欠点がある．また基本復帰境界は、原点 ($x = 0$) に拡散粒子が達した際に指数分布に従う間、拡散粒子が原点に滞在し、指数分布時間が経過したのち、到着客がシステムにもたらすサービス時間確率密度関数で、拡散粒子は x へ飛ぶ．反射壁境界を考慮した拡散過程の確率密度関数を f_{RB} 、基本復帰境界を考慮した拡散過程の確率密度関数を f_{ER} とすると、それぞれ以下のように表される．

$$f_{RB}(x) = -\frac{2\alpha}{\beta} e^{\frac{2\alpha x}{\beta}} \quad (2.14)$$

$$f_{ER}(x) = -\frac{2\alpha}{\beta} \lambda e^{\frac{2\alpha x}{\beta}} \int_0^\infty (1 - B(y)) e^{-\frac{2\alpha y}{\beta}} dy \quad (2.15)$$

ここで $B(y)$ はサービス時間の累積分布関数である．式 (2.14), (2.15) に Brumelle の式を用いることにより、それぞれの平均待ち時間は以下の式で表される．

$$E_0(W_{RB}) = \frac{(C_a^2 - 1) + \rho(C_b^2 + 1)}{2(1 - \rho)\mu} \quad (2.16)$$

$$E_0(W_{ER}) = \frac{\rho(C_a^2 + C_b^2)}{2(1 - \rho)\mu} \quad (2.17)$$

2.7 GI/GI/1 に於ける待ち時間の分散拡散近似式

(2.16), (2.17) を用いると, それぞれの分散 $Var(W_{RB})$ と $Var(W_{ER})$ は以下のように計算される.

$$Var(W_{RB}) = \frac{\{E(V_{RB}^2) - \lambda E_0(W_{RB})E_0(B^2) - \frac{\lambda}{3}E_0(B^3)\}}{\rho - \{E_0(W_{RB})\}^2} \quad (2.18)$$

$$E(V_{RB}^2) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho(C_a^2 + C_b^2)}{(1-\mu)\rho} \right\}^2 \quad (2.19)$$

$$Var(W_{ER}) = \left[\frac{\rho(C_a^2 + C_b^2)}{2(1-\rho)\mu} \right]^2 \quad (2.20)$$

これらを踏まえ, 高橋は Kleinrock の分散近似式 (2.11) を $GI/GI/1$ へ拡張した分散近似式を提案している.

$$Var(W_{HR}) = \left[\frac{\rho(C_a^2 + C_b^2)}{2(1-\rho)\mu} \right]^2 + \frac{\lambda(C_a^2 + 1)b^{(3)}}{6(1-\rho)} \quad (2.21)$$

(2.21) において, $b^{(3)} = E_0(B^3)$ であり, サービス時間の 3 次モーメントである. (2.18), (2.20), (2.21) をシミュレータを用いて精度比較を行うと, (2.21) の近似精度が一番高く, 次に (2.20), もっとも精度が悪かったのが (2.18) となることが確認されている.

第 3 章

GI/GI/1 システムに於ける高精度近似式の提案

3.1 提案近似式

本章では、 $GI/GI/1$ システムに於ける新たな待ち時間の分散近似式を提案する．新たな近似式を提案するに当たり，高橋が提案する式 (2.21) をベースに，改善を加えることで精度を向上させた近似式を展開する．式 (2.21) では，客の到着過程がポアソン分布 ($C_a^2 = 1$) の時には Kleinrock の提案する $M/G/1$ システムにおける分散の近似式と一致し，高い精度を持つことが知られている．また，客の到着過程が 2 次の超指数分布に従う場合 ($C_a^2 = 2$) の場合も高い精度を持つ．一方で客の到着過程が 2 次のアーラン分布 ($C_a^2 = 0.5$) の場合や，一定分布 ($C_a^2 = 0$) の場合に精度が悪くなる傾向がある．そこで，客の到着過程がポアソン分布，2 次の超指数分布に従う場合の精度を落とすことなく，2 次のアーラン分布，一定分布に従う場合の精度を向上させることを試みる．また，サービス規律は FIFO に従うものとする．

精度を向上させるにあたり，着目した点が客の到着過程，サービス時間分布がともに一定分布に従う $D/D/1$ ($C_a^2 = 0, C_b^2 = 0$) の場合である．本来，常に一定の間隔で客が到着し，一定のサービス時間で順次処理されていく場合，サービスが破綻していない ($0 \leq \rho < 1$) ならば待ち時間の分散は 0 になる．しかし，(2.21) に ($C_a^2 = 0, C_b^2 = 0$) を代入すると，

$$Var(W) = 0 + \frac{\lambda b^{(3)}}{6(1-\rho)} \quad (\rho < 1) \quad (3.1)$$

となり，その分散は 0 にならない．そこで，(2.21) を $D/D/1$ の際に 0 になるべく考慮し，かつ $M/GI/1$ および $H_2/GI/1$ の近似精度を崩さないよう改善を行う．以下に提案近似式を示す．

$$Var(W) = \left[\frac{\rho(C_a^2 + C_b^2)}{2(1-\rho)\mu} \right]^2 + \frac{\lambda(C_a^2 + 1)b^{(3)}}{6(1-\rho)} - \frac{\lambda b^{(3)}|C_a^2 - 1|}{6(1 + C_b^2 - \rho)} \quad (3.2)$$

(3.2) では， $D/D/1$ において待ち時間の分散が 0 となることを確認している．

$$\begin{aligned} Var(W) &= 0 + \frac{\lambda b^{(3)}}{6(1-\rho)} - \frac{\lambda b^{(3)}}{6(1-\rho)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

また, $M/GI/1(C_a^2 = 1)$ では (2.21) と同様, Kleinrock の $M/G/1$ に於ける待ち時間の分散拡散近似式 (2.11) と一致することを以下に示す.

$$\begin{aligned}
 Var(W) &= \left[\frac{\rho(1 + \frac{Var(x)}{(E(x))^2})}{2(1-\rho)\mu} \right]^2 + \frac{\lambda(1+1)b^{(3)}}{6(1-\rho)} - 0 \\
 &= \left[\frac{\lambda(\frac{(E(x))^2 + E(x^2) - (E(x))^2}{(E(x))^2})}{2(1-\rho)\mu^2} \right]^2 + \frac{\lambda b^{(3)}}{3(1-\rho)} \\
 &= \left[\frac{\lambda E(x^2)}{2(1-\rho)\mu^4} \right]^2 + \frac{\lambda b^{(3)}}{3(1-\rho)}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで, $E(x^2)$ はサービス時間の 2 次モーメント, $b^{(3)}$ はサービス時間の 3 次モーメントであり, $\mu = 1$ とすれば,

$$= \left[\frac{\lambda \bar{x}^2}{2(1-\rho)} \right]^2 + \frac{\lambda \bar{x}^3}{3(1-\rho)} \tag{3.5}$$

となり, (2.11) に一致することがわかる. 第 4 章にて, シミュレータを用いて改善前の (2.21) と (3.2) の精度比較をした結果を示す.

第 4 章

シミュレーションによる評価実験

本章では第 3 章で提案した待ち時間の分散近似式について，シミュレーションを用いて評価実験を行った結果を示す．

4.1 実験概要

シミュレーション実験ではモンテカルロ法を用いて作成したシミュレータを用いて実験を行う．システムに到着する客の確立分布と，その客を処理するのにかかる時間の確立分布それぞれに沿った標本値を乱数を用いて生成し，システムに到着した客が処理され，システムから退去するまで系内に滞在している時間をシミュレーション時間から求める．その時間をシミュレーションにおける待ち時間とし，その分散を求める．対象システムは客の到着分布，サービス時間分布がそれぞれ一定分布 D ，2 次のアーラン分布 E_2 ，指数分布 M ，2 次の超指数分布 H_2 の組み合わせ 16 通りについてシミュレーションを実施，高橋の提案する近似式 (2.21) と本論文にて提案する近似式 (3.2) との精度比較をおこなった．また，各組み合わせにおけるシミュレーションの試行回数は 10 回であり，サービス規律を FIFO とする．

4.2 モンテカルロ式シミュレータ構築

モンテカルロ法とは，確率分布に沿った標本値を乱数を用いて大量に生成し，複数回演算をすることで求める分布を近似する手法である．コンピュータにおける数値実験では擬似乱数を使用する．たとえばモンテカルロシミュレーションによって円周率を求める場合，Fig.4.1 のように一辺が L の正方形の中にランダムに点を打つ場合，その点が直径 L の円内にある確率は，

$$\frac{\text{円内の点の数}}{\text{全体の点の数}} \quad (4.1)$$

となる．また，

$$\begin{aligned} \frac{\text{直径 } L \text{ の円の面積}}{\text{一辺 } L \text{ の正方形の面積}} &= \frac{((L/2) * (L/2) * \pi)}{L * L} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (4.2)$$

と表すこともできる. (4.1), (4.2) より, π を求めることができる. 打つ点の数が多いほど正確な円周率に近づいていき, 確率なので打つ点の数が同じでも計算結果が異なることもある.

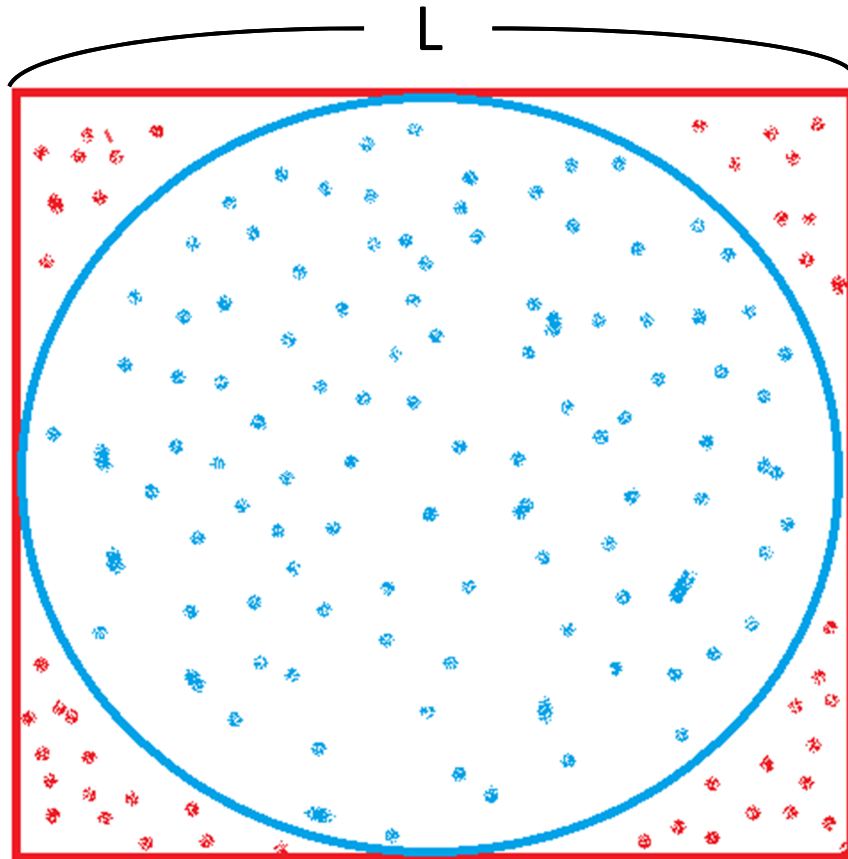


Fig.4.1 calculating π by Monte Carlo method

このように解析的に計算をすることで解を求めることが困難な場合に近似的に解を求めることができるが, 近似の精度を1桁上げるために, それまでよりも100倍近くの演算時間がかかるため, 実行時間が遅くなってしまう欠点がある.

4.3 実験結果

4.3 実験結果

シミュレーションによる実験結果を以下に示す. 4.3.1 に $H_2/H_2/1$, 4.3.2 に $H_2/E_2/1$, 4.3.3 に $M/M/1$, 4.3.4 に $E_2/E_2/1$, 4.3.5 に $D/D/1$ について示し, 残りの実験結果については付録 A に記載する. 各グラフの縦軸は待ち時間の分散を, 横軸はトラフィック密度 ($\rho = \lambda/\mu$) を示す. また, 平均サービス時間は常に $1(\mu = 1)$ とする.

4.3.1 $H_2/H_2/1$

客の到着間隔分布, サービス時間分布が共に 2 次の超指数分布 $H_2(C_a^2 = 2, C_b^2 = 2)$ に従う $H_2/H_2/1$ に於ける待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を, Fig.4.2 に示す.

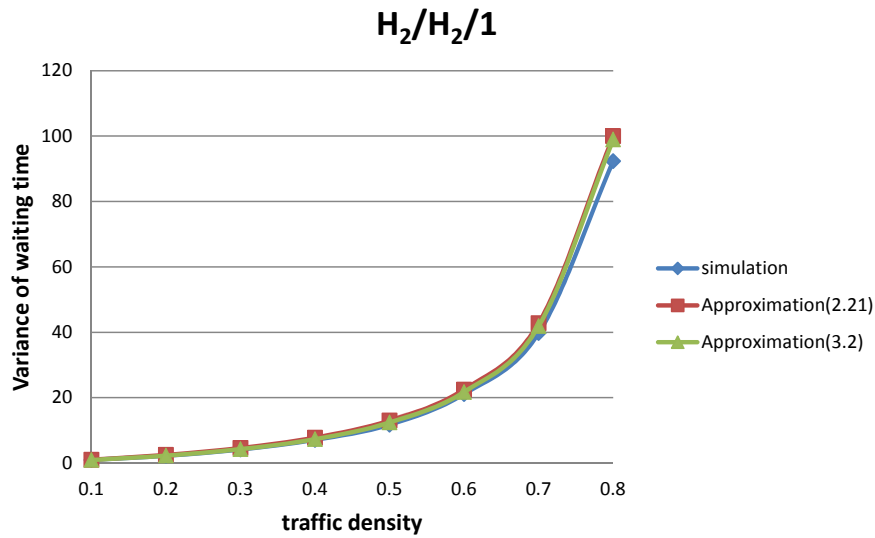


Fig.4.2 Variance of waiting time in the $H_2/H_2/1$ system

Fig.4.2 より, (2.21) でもともと近似精度が高かったが, その精度を保っていることがわかる.

4.3.2 $H_2/E_2/1$

客の到着間隔分布が2次の超指数分布 $H_2(C_a^2 = 2)$ に従い、サービス時間分布が2次のアーラン分布 $E_2(C_b^2 = 0.5)$ に従う $H_2/E_2/1$ に於ける待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を、Fig.4.3 に示す。

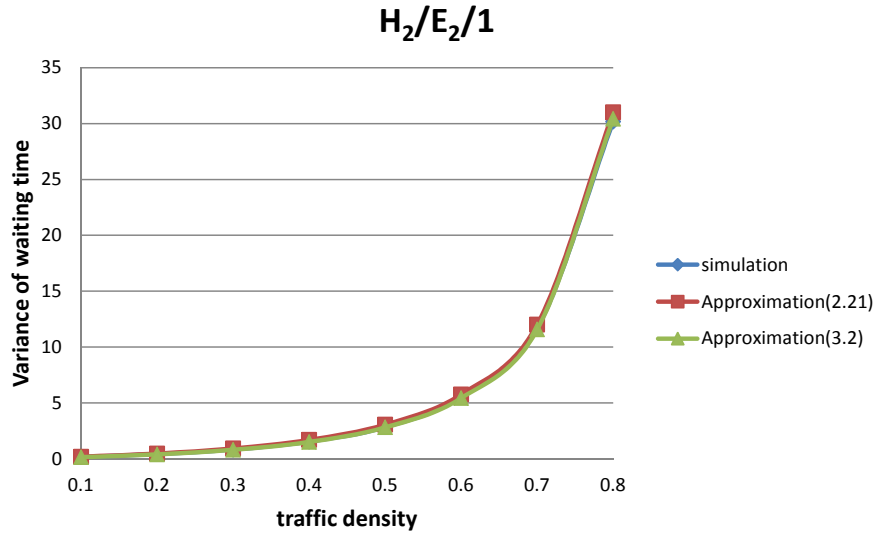


Fig.4.3 Variance of waiting time in the $H_2/E_2/1$ system

Fig.4.3 より、 $H_2/H_2/1$ の時と同様、シミュレータに対して高い近似精度を保っていることがわかる。シミュレーションの値は (2.21), (3.2) と近い値をとっており、曲線の下部に存在する。

4.3.3 $M/M/1$

客の到着間隔分布、サービス時間分布が共に指数分布 $M(C_a^2 = 1, C_b^2 = 1)$ に従う $M/M/1$ に於ける待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を、Fig.4.4 に示す。

4.3 実験結果

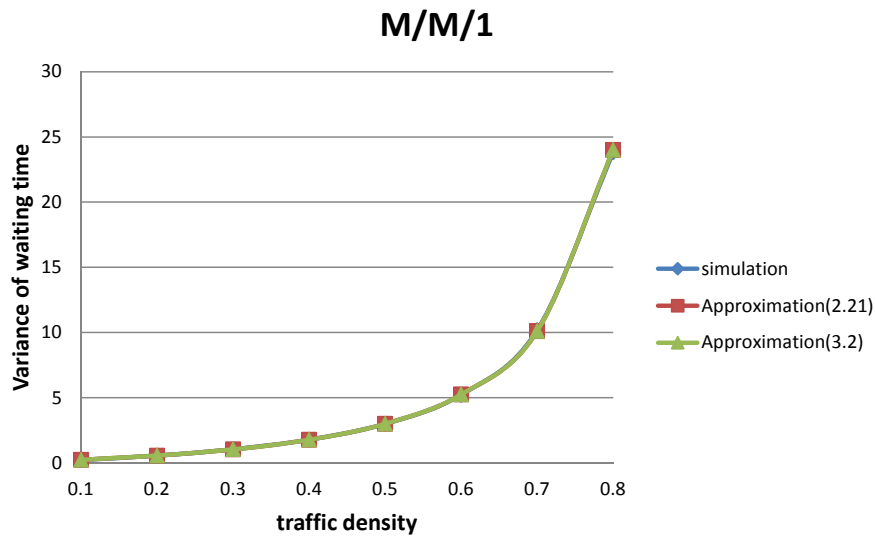


Fig.4.4 Variance of waiting time in the $M/M/1$ system

Fig.4.4 より, (2.21), (3.2) とともに, ほぼシミュレーションの曲線状に乗っており, 高い近似精度を持っていることがわかる. これは (2.21), (3.2) とともに Kleinrock の $M/G/1$ に於ける分散拡散近似式 (2.11) と一致するためである.

4.3.4 $E_2/E_2/1$

客の到着過程分布, サービス時間分布が共に 2 次のアーラン分布 $E_2(C_a^2 = 0.5, C_b^2 = 0.5)$ に従う $E_2/E_2/1$ に於ける待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を, Fig.4.5 に示す.

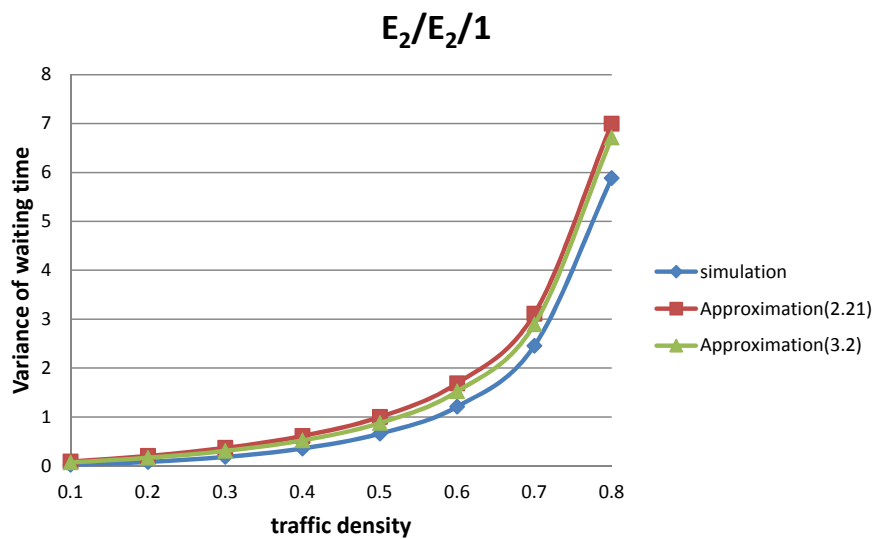


Fig.4.5 Variance of waiting time in the $E_2/E_2/1$ system

Fig.4.5 より, (3.2) が従来の (2.21) よりも高い近似精度を持っていることわかる.

4.3.5 $D/D/1$

客の到着過程分布, サービス時間分布が共に一定分布 $D(C_a^2 = 0, C_b^2 = 0)$ に従う $D/D/1$ に於ける待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を, Fig.4.6 に示す.

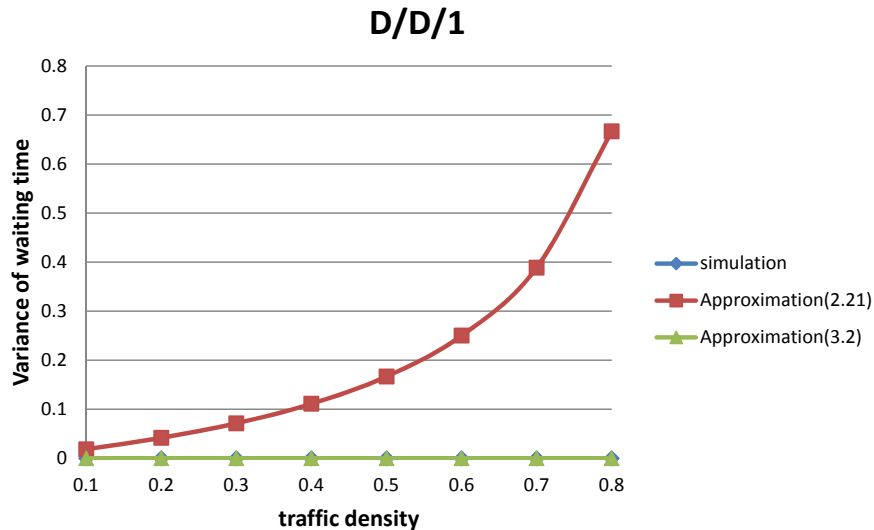


Fig.4.6 Variance of waiting time in the $D/D/1$ system

Fig.4.6 より, (2.21) では分散が 0 とならなかったが, (3.2) では常に 0 となっているのがわかる. シミュレーションの値も常に 0 となっており, (3.2) と同直線上にある.

4.4 まとめ

(3.2) では $D/D/1$ における分散が常に 0 となるよう改善した結果, 特に客の到着間隔分布の平方変動係数が 1 未満 ($C_a^2 < 1$) の範囲で待ち時間の分散の近似精度が向上していることが確認できる. また, 客の到着間隔分布の平方変動係数が 1 以上 ($C_a^2 \geq 1$) の範囲では, 従来より近似精度が高かったが, その近似精度を維持していることがわかる.

シミュレーションにおいては全体的に精度を改善することができた. では実環境において本近似式の精度はどの程度保たれているのか. 本研究室で取得しているトラヒックデータを用いて, 実環境における近似式の精度評価実験の結果を次章に示す.

第 5 章

実環境における近似式の評価実験

本章では提案した近似式を実際のインターネットトラフィックデータを用いて評価実験を行った結果を示す。

5.1 実験概要

実際のトラフィックデータを用いて、提案する待ち時間の分散近似式の精度を評価する。トラフィックデータには、早稲田大学小松研究室で wireshark を用いて取得したグローバル ID のトラフィックデータを用いる。使用するトラフィックデータは一年分である。また、客の到着間隔、サービス時間、待ち時間を定義するモデルを作成し、モデルに基づいてトラフィックデータから近似式に代入するパラメータ、および実際の待ち時間の分散を求め、近似式の計算結果と比較することで評価する。

5.2 トラフィックデータ

本実験では大学内の研究室で取得したトラフィックデータを用いる。Fig.5.1 に取得環境を示す。

本実験では研究室内で発生したすべてのトラフィックを対象とする。研究室内の各端末 (個人の所有する PC 等) で発生したトラフィックがルータ 1 を、研究室内のメールサーバやファイルサーバで発生したトラフィックがルータ 2 を通り、ルータ 3 を介して学内ネットワーク、外部ネットワークへと流れていく。ルータ 3 では NAT 機能を有効にしており、IP アドレスは一つにまとめられている。本実験ではルータ 3 と学内ネットワークの間にてパケットをキャプチャし、トラフィックデータを収集している。これにより、研究室内で発生するパケットはほぼ網羅できているといえる。

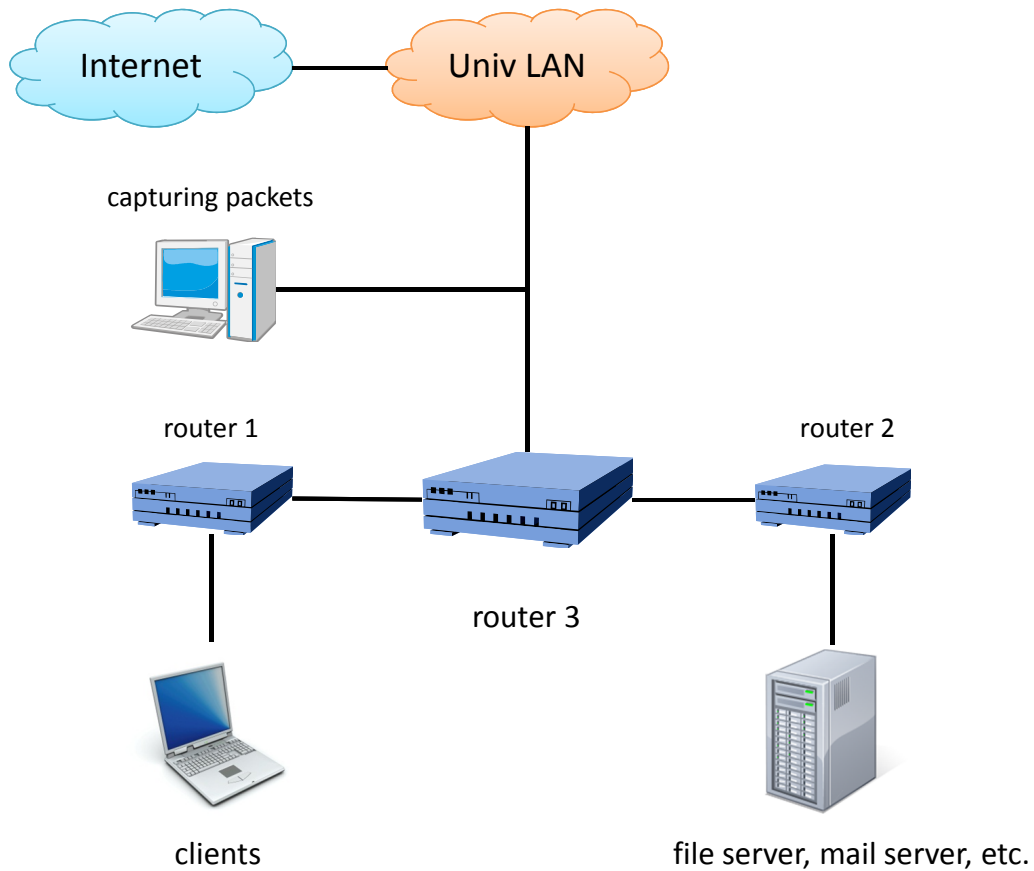


Fig.5.1 Situation of the traffic data acquisition

5.3 モデルの定義

客の到着，サービス，待ち時間を定義するモデルを作成する．Fig.5.2 に本実験で用いるモデルを示す．

本実験では客の到着間隔をパケットの到着間隔とし，サービス時間はパケットサイズを回線速度で割ったものとする．求める待ち時間（遅延時間）は RTT(Round Trip Time:往復伝搬遅延) とし，RTT の分散を評価する．

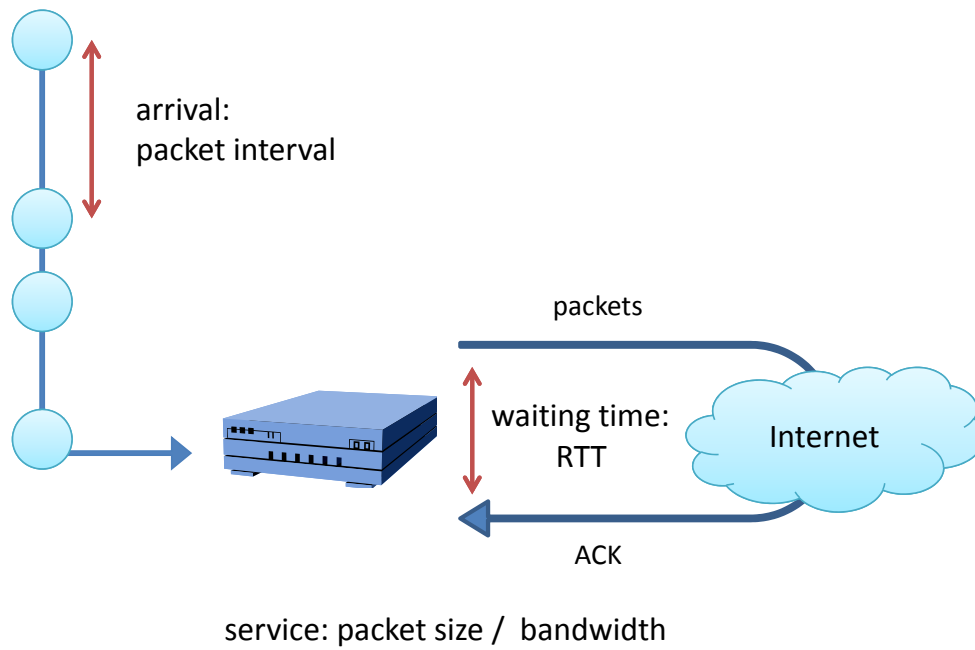


Fig.5.2 RTT model

5.4 実験諸元

Table 5.1 に実験諸元を示す.

data acquisition period	1 year
software	wireshark
file format	pcap
protocol	TCP/IP

Table 5.1 The experiment specification

5.5 実験結果

Table 5.2 にトラヒックデータより得た各パラメータを示す．また，各パラメータは一年分の平均値である．

average of inter-arrival time : $E(a)$	0.024(sec)
inter-arrival rate : $\lambda = 1/E(a)$	41.7
variance of inter-arrival time : $Var(a)$	280.79
squared coefficient of variation of inter-arrival : C_a^2	487482.6
average of service time : $E(b)$	0.000051(sec)
service rate : $\mu = 1/E(b)$	19607.8
variance of service time : $Var(b)$	2.5×10^{-9}
squared coefficient of variation of service time : C_b^2	0.96
traffic density : $\rho = \lambda/\mu$	0.002
average of RTT	0.049(sec)
variance of RTT	0.055

Table 5.2 Parameters of traffic data

5.6 サービス時間分布

提案する近似式を用いて，待ち時間の分散を計算するに当たり，サービス時間分布の 3 次モーメントを求めるため，まずはサービス時間分布を求める．実際のトラヒックデータから取得したサービス時間の確率分布を Fig.5.3 に示す．グラフ上のプロットは，サービス時間が， $x - 0.0001$ 以上 x 未満である確率を表したものである．

5.6 サービス時間分布

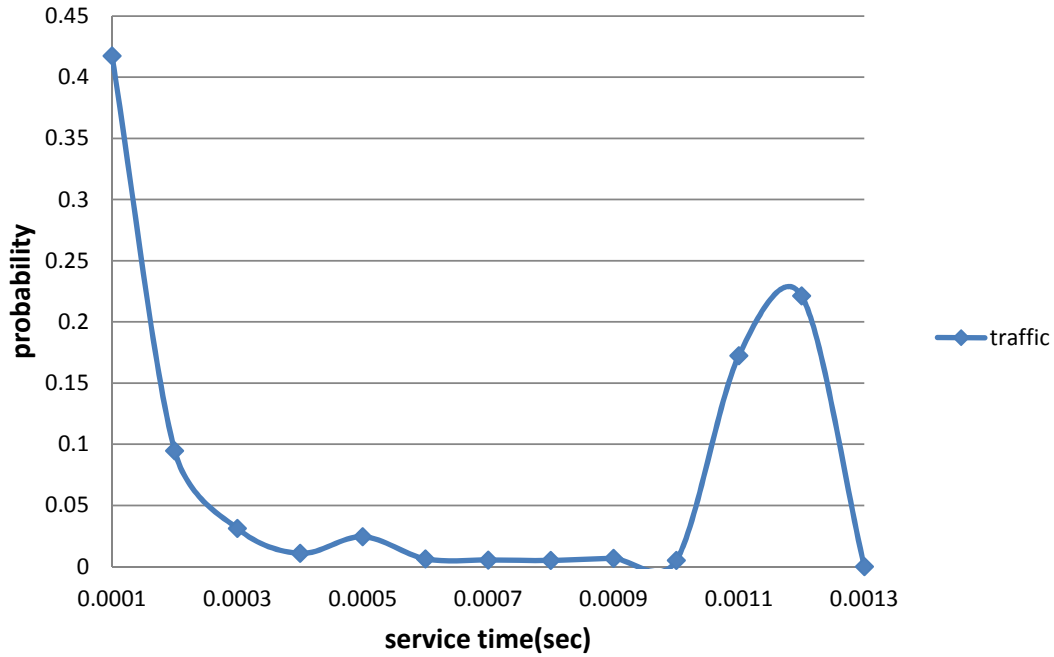


Fig.5.3 Probability of service time

Table 5.2 より，サービス時間の平方変動係数が $C_b^2 \simeq 1$ であることから，指数分布での近似が考えられる．一方で Fig.5.3 より，サービス時間の確率分布には二つのピークがみられるのがわかる．最初のピークは，syn パケット等のデータグラムにデータが入っていない，小さいパケットの山であり，次のピークは MTU のサイズに分割されたパケットの山であると考えられる．このことから，単純に指数分布で近似することが難しい．そこで，本論文ではこの二つのピークを近似するために，指数分布と正規分布の混合分布による近似を試みる．また，比較のために 2 次のアーラン分布による近似も示す．求める指数分布は，(B.11) より，

$$\begin{aligned} 0.000051 &= \frac{1}{\lambda} \\ \lambda &\simeq 19607.8 \end{aligned} \quad (5.1)$$

よって，確率密度関数 $f(x)$ ，累積分布関数 $F(x)$ は，

$$f(x) = 19607.8e^{-19607.8x} \quad (5.2)$$

$$F(x) = 1 - e^{-19607.8x} \quad (5.3)$$

となる．また，Fig.5.3 より，加えるのに最適な正規分布を求め，重みをつけることで求めた混合

分布の確率密度関数 $g(x)$ と累積分布関数 $G(x)$ を示す.

$$g(x) = 0.5 \cdot 19607.8e^{-19607.8x} + 0.5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.00007^2}} e^{-\frac{(x - 0.0012)^2}{2 \cdot 0.00007^2}} \quad (5.4)$$

$$G(x) = 0.5 (1 - e^{-19607.8x}) + 0.5 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - 0.0012}{\sqrt{2 \cdot 0.00007^2}} \right) \right) \quad (5.5)$$

(5.2), (5.4) は確率密度関数であることから, 一定の範囲を積分することで確率を計算することができる. 計算された確率を用いてサービス時間分布の近似した結果を Fig.5.4 に, また累積確率を近似したものを Fig.5.5 に示す. 正規分布の積分を計算するには数値計算が必要となり, 容易に計算することができない. そこで本実験では簡単のため, 台形の面積による近似を用いた,

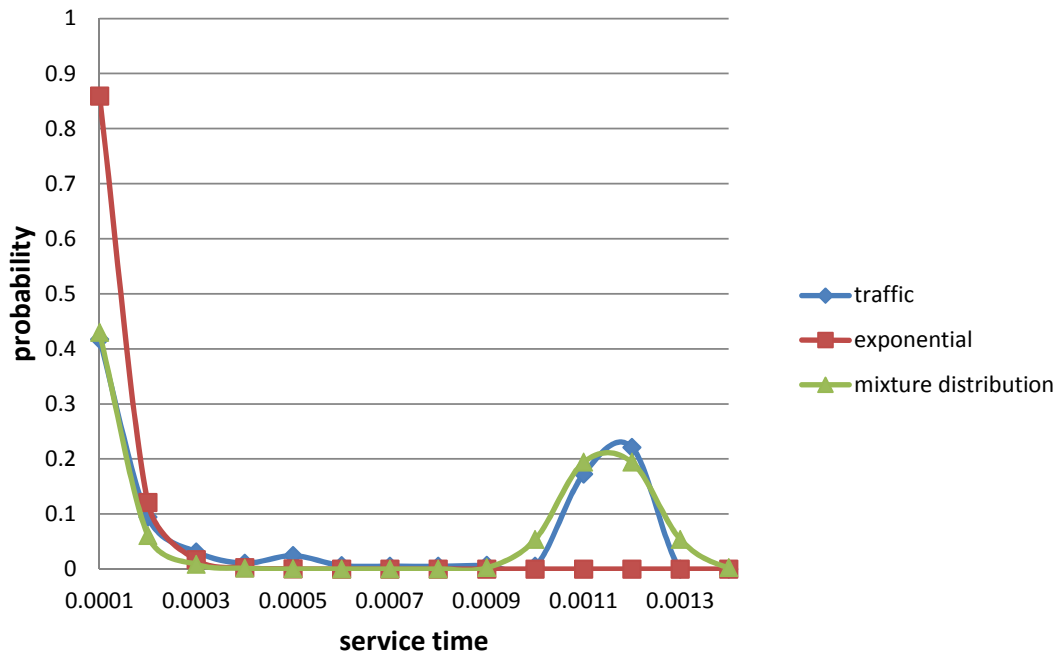


Fig.5.4 Approximate probability of service time

5.7 精度評価

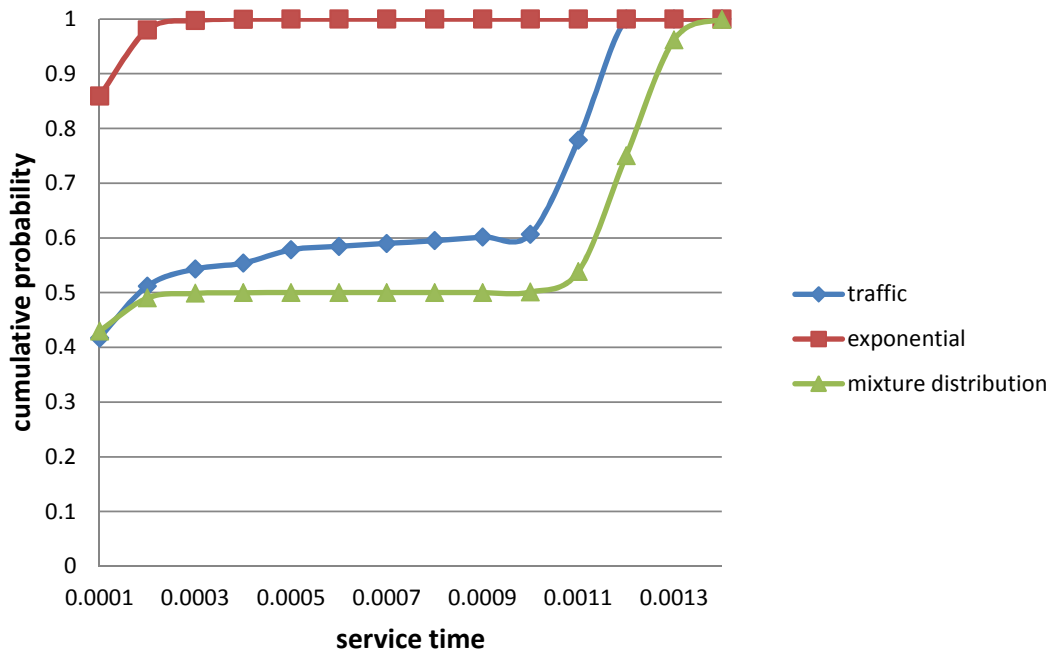


Fig.5.5 Approximate cumulative probability of service time

Fig.5.4 より，混合分布を用いることで，サービス時間分布をよく近似できていることが確認できる．また，Fig.5.5 より，混合分布の累積確率は，実際のトラヒックより小さくなる結果となった．

5.7 精度評価

実験結果より得られたパラメータ，およびサービス時間分布を用いて待ち時間の分散の精度を評価する．まず，(5.4) のサービス率 μ ，平方変動係数 C_b^2 と 3 次モーメントを求める．混合分布のサービス率，平方変動係数，3 次モーメントは，混合している指数分布と正規分布それぞれのサービス率，平方変動係数，3 次モーメントの加重平均を用いることにする．Table 5.2 より，サービス率 μ は，

$$\begin{aligned}\mu &= 0.5 \times 19607.8 + 0.5 \times \frac{1}{0.0012} \\ &= 10220.6\end{aligned}\tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\lambda}{\mu} \\ &= 0.004\end{aligned}\tag{5.7}$$

また、平方変動係数 C_b^2 は、(B.7) より、

$$\begin{aligned} C_b^2 &= 0.5 \times 1 + 0.5 \times \frac{0.00007^2}{0.0012^2} \\ &\simeq 0.502 \end{aligned} \quad (5.8)$$

また、3 次モーメント $b^{(3)}$ は、(B.8), (B.15) より、

$$\begin{aligned} b^{(3)} &= 0.5 \cdot \left(\frac{6}{19607.8^3} \right) + 0.5 \cdot (3 \times 0.0012 \times 0.00007^2 + 0.0012^3) \\ &\simeq 8.73 \times 10^{-10} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Table 5.2, (5.8), (5.9) より、求めたパラメータを、(3.2) に代入することで値を求め、サービス時間分布を指数分布、混合分布とした場合の待ち時間の分散の精度を示す。

	variance	accuracy(%)
actual environment(RTT)	5.5×10^{-2}	100
approximation (service : exponential distribution)	7.02×10^{-4}	1.27
approximation (service : mixture distribution)	1.05×10^{-2}	19.1

Table 5.3 Accuracy of the variance of the waiting time

5.8 考察

Table 5.3 より、サービス時間分布の近似に指数分布を用いる場合よりも、混合分布を用いた場合に比較的精度よく近似することができた。これは、トラフィックデータが持つ 2 つのピークを考慮した結果、うまく分布を近似できたためと考えられる。しかし実際の RTT の分散と比較すると、どちらの分布でサービス時間を近似した場合でも、その分散値は小さくなっていることがわかる。原因として考えられるのは、中継するルータでの処理遅延である。モデル化の際には、途中で中継するルータは無視する (ルータでの処理は十分早い) ものとしてモデル化している。現実にはルータ内でもパケットが処理されるまでに待ちが発生し、遅延が生じるため、定義したモデルで求める RTT よりも大きくなるためだと考えられる。これを解決するには、ルータによる遅延を考慮したモデルを定義することが考えられるが、ルーティングはその時々によって異なり、またスループットもルータにによって大きく異なるのでモデル化することが難しいと考えられる。また、ルータ内でのパケットの待ち時間自体をモデル化する必要もある。

第 6 章

結論

6.1 まとめ

本論文では高橋 [5] が提案している，残余仕事量を拡散近似を用いて近似することにより，GI/GI/1 待ち行列システムの待ち時間の分散を求める近似式を改良し，より精度を高めた待ち時間の分散を求める近似式を提案した．また，提案した近似式を，シミュレータと実トラヒックデータからその精度を評価した．結果として，シミュレータ実験において近似の精度を高めることに成功した．実トラヒックデータを用いた実験では，RTT を待ち時間とし，その分散について精度を評価した．結果としてはシミュレータの際のようには，よい近似精度を持つに至らなかったが，モデルを改善することにより，精度の向上が見込める．

6.2 今後の検討課題

本論文では実トラヒックを用いて近似式の精度評価をする際，用いるトラヒックデータは大学内の一研究室にて取得したトラヒックデータを用いていた．今後は，大学内全体の大規模トラヒックデータを対象に，その近似精度を評価し，近似式の精度をさらに向上させるため，改善していく．

謝辞

本研究は私が早稲田大学理工学術院基幹理工学研究科情報理工学専攻修士課程に在籍中の研究成果をまとめたものです。本研究を進めるにあたり、終始懇切丁寧な御指導、御助言を賜りました甲藤二郎教授、小松尚久教授、高橋敬隆教授に心から深く感謝の意を表します。また、一緒に有意義な検討及び討論をして頂いた、星健太郎氏を始め、甲藤研究室の皆様に深く感謝いたします。

2013 年 2 月 8 日

田村 健範

参考文献

- [1] W.Kraemer and M.Langenbach-Belz, “Approximation formulae for the delay in the queueing system GI/G/1,” Congressbook, Eighth International Teletraffic Congress, pp.235.1–235.8, 1976.
- [2] 馬場裕, “GI/G/1 待ち行列の待ち時間の分散の近似式,” 経営情報学部論集, vol.2, pp.72–76, 1986.
- [3] 高橋敬隆, “拡散近似法 (非マルコフモデル近似式導出法),” http://www.ieice-hbkb.org/portal/doc_487.html, 2010.
- [4] L.Kleinrock, Queueing systems, volumeII: Computer applications, John Wiley and Sons, 1976.
- [5] Y. Takahashi, Y. Shikata, and A. Frey, “Approximate formula of delay-time variance in renewal-input general-service-time single-server queueing system,” Operations Research Proceedings 2011, pp.502–508, 2012.
- [6] J.-Q. Hu, “Analyticity of single-server queues in light traffic,” Queueing Systems, vol.19, no.1-2, pp.63–80, 1995.
- [7] Vasanthakumar N.Bhat, “APPROXIMATION FOR THE VARIANCE OF THE WAITING TIME IN A GI/G/1 QUEUE,” Microelectronics Reliability, vol.33, no.13, pp.1997–2002, 1993.
- [8] S.J. Peter B. Danzig, “tcplib: A library of internetwork traffic characteristics,” Technical report, University of Southern California, 1991.
- [9] C.Walack, “Hand-book on statistical distributions for experimen-talists, internal report suf-pfy/96-01,” School of Stockholm, 2007.
- [10] 木村俊一, “拡散近似：離散と連続のはざままで,” オペレーションズリサーチ：経営の科学, vol.42, no.8, pp.540–546, 1997.
- [11] 高橋敬隆, “次世代ネットワーク (ngn) 時代におけるウェブサーバシステム応答遅延評価法～拡散過程による確率モデル化と解析～,” 産業経営, 第 43 巻, pp.3–13, 早稲田大学産業経営研究所, 2008.
- [12] V.Paxson and S.Floyd, “Wide area traffic: the failure of poisson modeling,” IEEE/ACM Transactions on Networking, vol.3, no.3, pp.226–244, 1995.
- [13] J.Cao, William S.Cleveland, D.Lin, and Don X.Sun, “Internet traffic tends toward poisson and independent as the load increases,” Nonlinear Estimation and Classification, pp.83–110, 2002.
- [14] 滝根哲哉, 村田正幸, “通信網における待ち行列：理論の応用と課題,” オペレーションズリ

サーチ：経営の科学, vol.43, no.5, pp.264–271, 1998.

- [15] W.Whitt, “The queueing network analyzer,” THE BELL SYSTEM TECHNICAL JOURNAL, vol.62, no.9, pp.2779–2815, 1983.

付録 A

シミュレーション評価実験結果

モンテカルロ法にて作成したシミュレータを用いて、(2.21) と (3.2) の待ち時間の分散の近似精度を評価した。客の到着過程分布，サービス時間分布を一定分布 D ，2 次のアーラン分布 E_2 ，指数分布 M ，2 次の超指数分布 H_2 の組み合わせで評価実験をした結果のうち，第 4 章にて掲載しなかった組み合わせについて，以下に示す。グラフの縦軸は待ち時間の分散を，横軸はトラフィック密度を示す。また，サービス規律は FIFO とし，平均サービス時間は常に $1(\mu = 1)$ である。

客の到着間隔分布が一定分布 $D(C_a^2 = 0)$ ，サービス時間分布が指数分布 $M(C_b^2 = 1)$ に従う場合の待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を Fig.A.1 に示す。

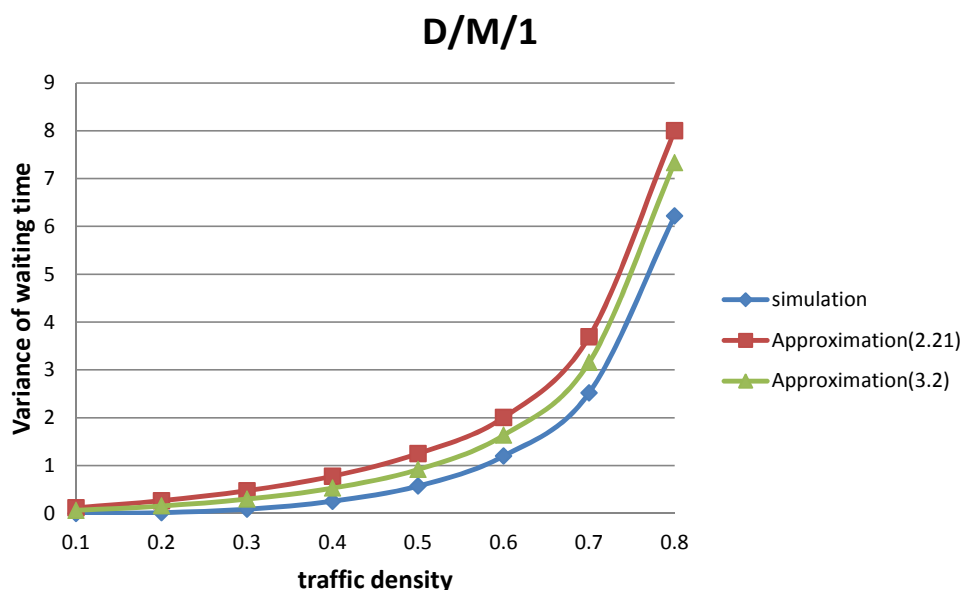


Fig.A.1 Variance of waiting time in the $D/M/1$ system

客の到着間隔分布が一定分布 $D(C_a^2 = 0)$, サービス時間分布が 2 次のアーラン分布 $E_2(C_b^2 = 0.5)$ に従う場合の待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を Fig.A.2 に示す.

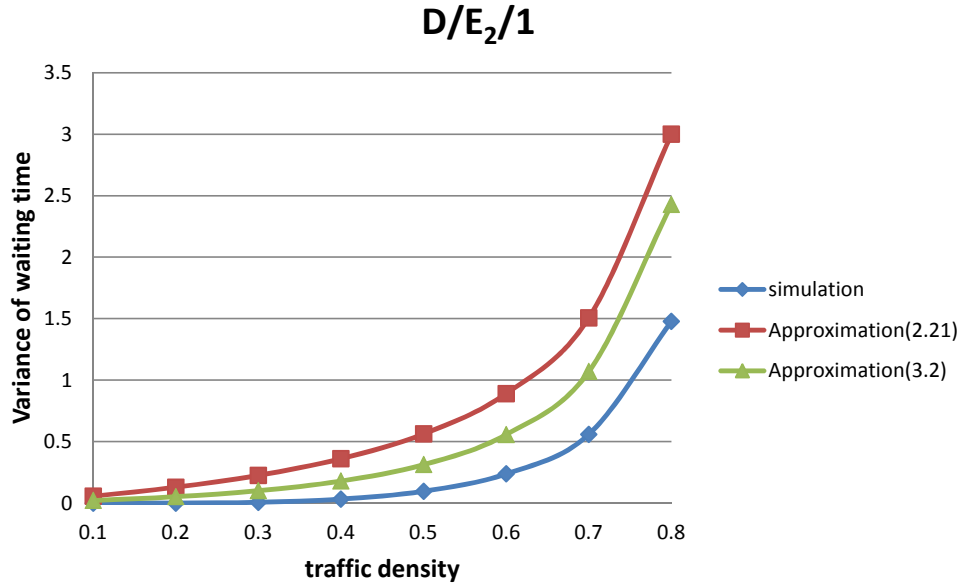


Fig.A.2 Variance of waiting time in the $D/E_2/1$ system

客の到着間隔分布が一定分布 $D(C_a^2 = 0)$, サービス時間分布が 2 次の超指数分布 $H_2(C_b^2 = 2)$ に従う場合の待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を Fig.A.3 に示す.

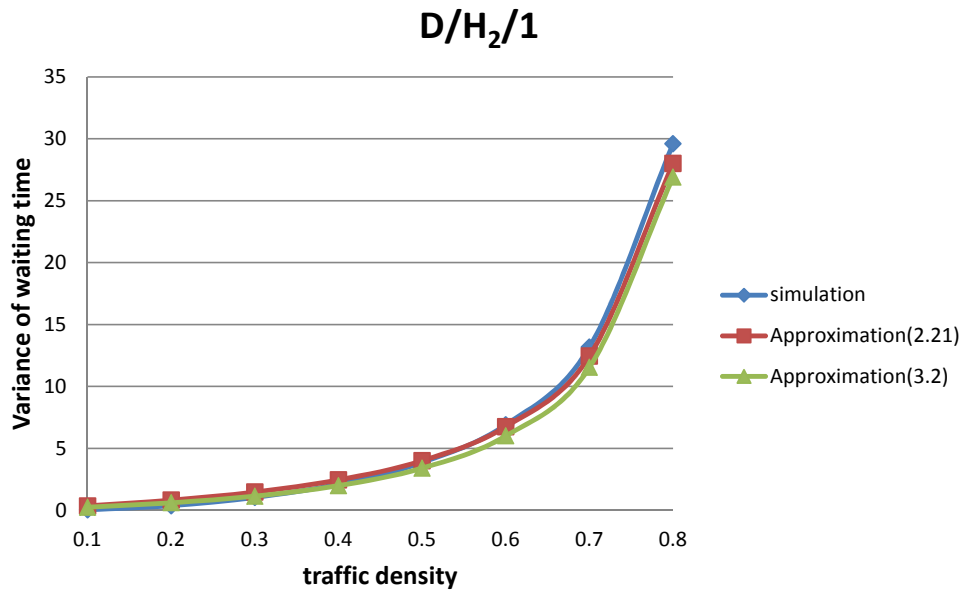


Fig.A.3 Variance of waiting time in the $D/H_2/1$ system

客の到着間隔分布が指数分布 $M(C_a^2 = 1)$, サービス時間分布が一定分布 $D(C_b^2 = 0)$ に従う場合の待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を Fig.A.4 に示す.

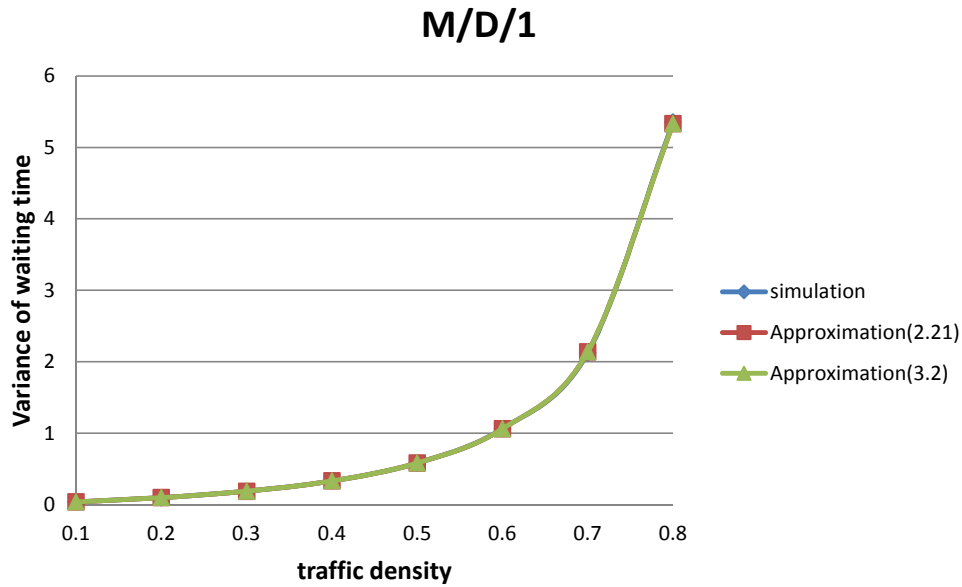


Fig.A.4 Variance of waiting time in the $M/D/1$ system

客の到着間隔分布が指数分布 $M(C_a^2 = 1)$, サービス時間分布が2次のアーラン分布 $E_2(C_b^2 = 0.5)$ に従う場合の待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を Fig.A.5 に示す.

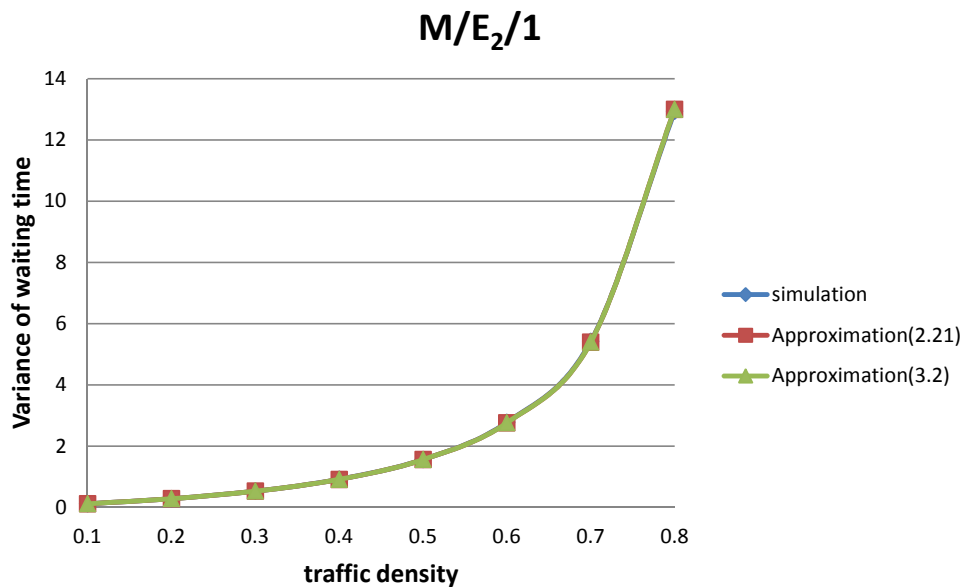


Fig.A.5 Variance of waiting time in the $M/E_2/1$ system

客の到着間隔分布が指数分布 $M(C_a^2 = 1)$, サービス時間分布が 2 次の超指数分布 $H_2(C_b^2 = 2)$ に従う場合の待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を Fig.A.6 に示す.

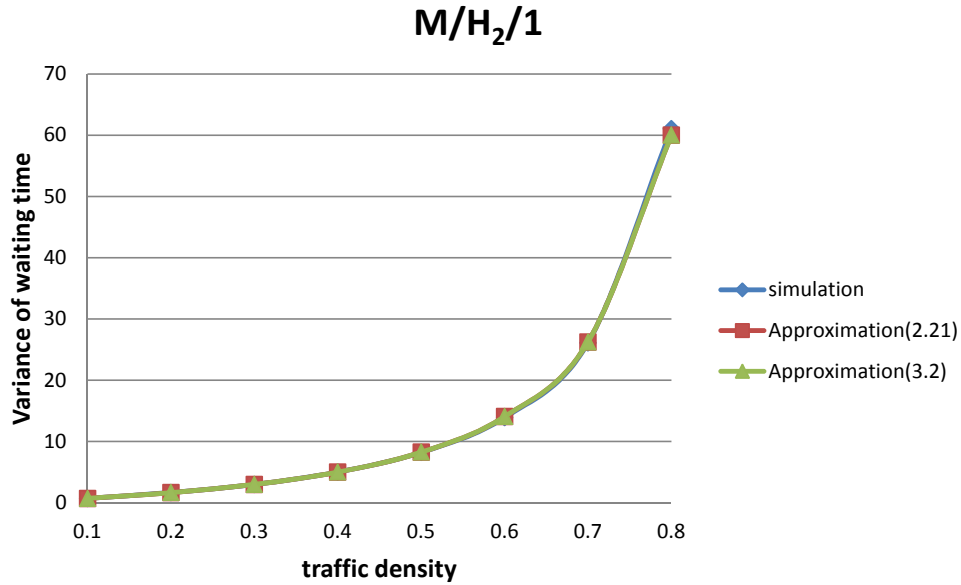


Fig.A.6 Variance of waiting time in the $M/H_2/1$ system

客の到着間隔分布が 2 次のアーラン分布 $E_2(C_a^2 = 0.5)$, サービス時間分布が一定分布 $D(C_b^2 = 0)$ に従う場合の待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を Fig.A.7 に示す.

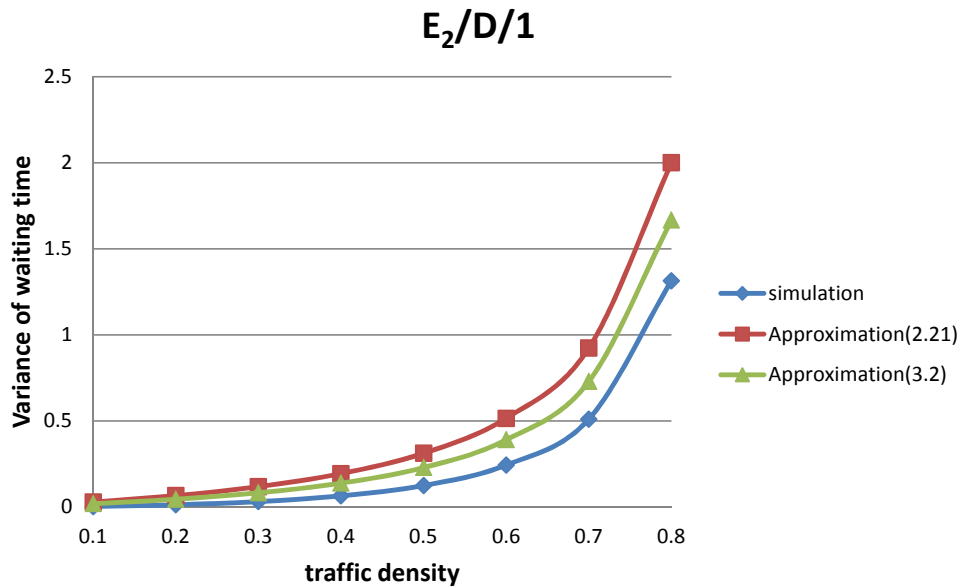


Fig.A.7 Variance of waiting time in the $E_2/D/1$ system

客の到着間隔分布が2次のアーラン分布 $E_2(C_a^2 = 0.5)$, サービス時間分布が指数分布 $M(C_b^2 = 1)$ に従う場合の待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を Fig.A.8 に示す.

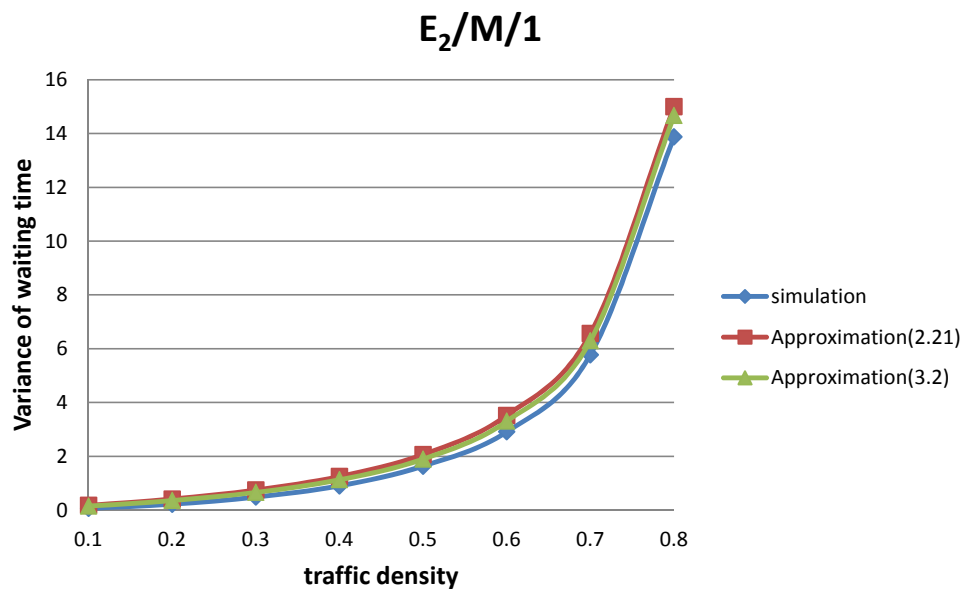


Fig.A.8 Variance of waiting time in the $E_2/M/1$ system

客の到着間隔分布が2次のアーラン分布 $E_2(C_a^2 = 0.5)$, サービス時間分布が2次の超指数分布 $H_2(C_b^2 = 2)$ に従う場合の待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を Fig.A.9 に示す.

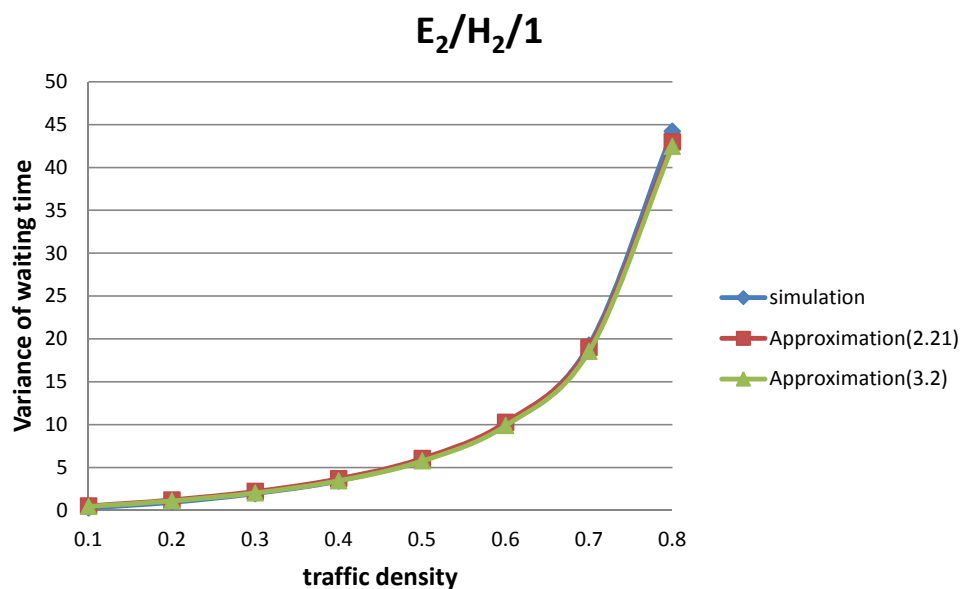


Fig.A.9 Variance of waiting time in the $E_2/H_2/1$ system

客の到着間隔分布が 2 次の超指数分布 $H_2(C_a^2 = 2)$, サービス時間分布が一定分布 $D(C_b^2 = 0)$ に従う場合の待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を Fig.A.10 に示す.

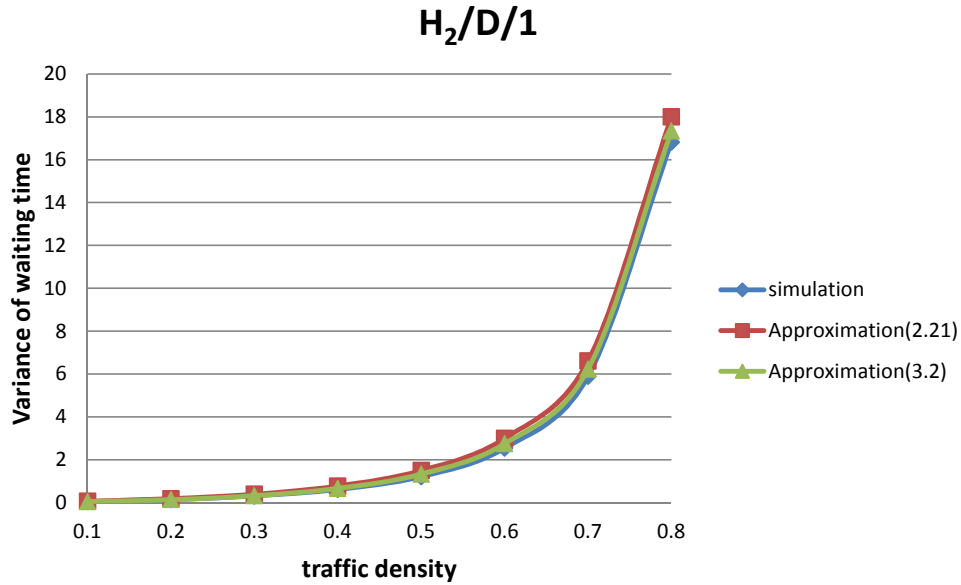


Fig.A.10 Variance of waiting time in the $H_2/D/1$ system

客の到着間隔分布が 2 次の超指数分布 $H_2(C_a^2 = 2)$, サービス時間分布が指数分布 $M(C_b^2 = 1)$ に従う場合の待ち時間の分散に関するシミュレーション結果を Fig.A.11 に示す.

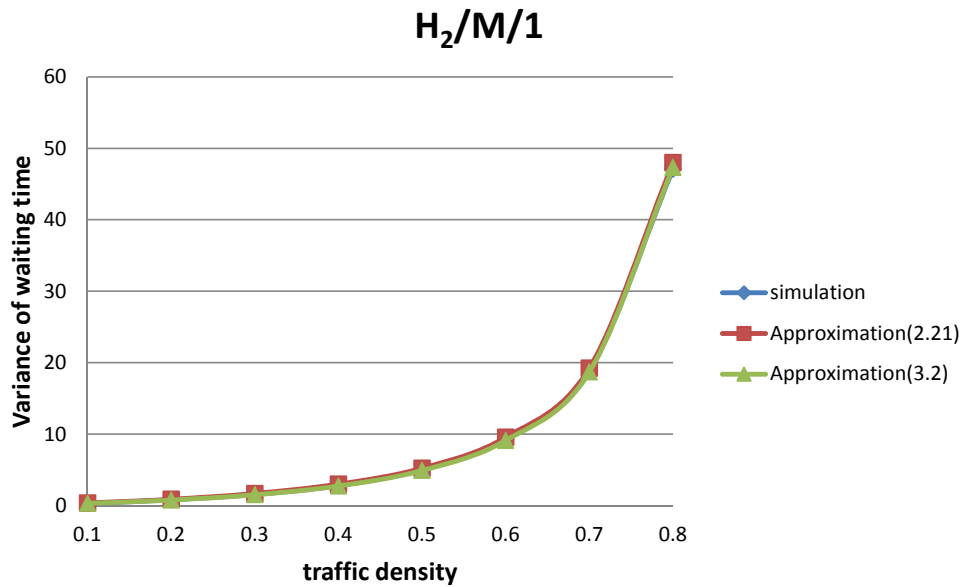


Fig.A.11 Variance of waiting time in the $H_2/M/1$ system

付録 B

確率分布

B.1 正規分布

正規分布の確率密度関数 $f(x)$ を以下に示す.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{B.1})$$

また, 累積分布関数 $F(x)$ を以下に示す.

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \quad (\text{B.2})$$

正規分布のモーメント母関数 $M_t(x)$ を以下に示す.

$$M_x(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right)} \quad (\text{B.3})$$

(B.3) を用いて, 平均 $E(x)$, 分散 $\operatorname{Var}(x)$, 平方変動係数 C^2 は以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{dM_x(t)}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \mu \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \frac{d^2 M_x(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} \\ &= \mu^2 + \sigma^2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(x) &= E(x^2) - (E(x))^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{\operatorname{Var}(x)}{(E(x))^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{\mu^2} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

正規分布の 3 次モーメントも (B.3) を用いることで求められる.

$$\begin{aligned} E(x^3) &= \frac{d^3 M_x(t)}{dt^3} \Big|_{t=0} \\ &= \mu\sigma^2 + \mu^3 \end{aligned} \tag{B.8}$$

B.2 指数分布

指数分布 M の確率密度関数 $f(x)$ を以下に示す.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{B.9}$$

また, 累積分布関数 $F(x)$ を以下に示す.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{B.10}$$

平均 $E(x)$, 分散 $Var(x)$, 平方変動係数 C^2 は以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= [x(-e^{-\lambda x})]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\lambda x}) dx \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} + 0 \cdot e^0 - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^\infty \end{aligned}$$

ロピタルの定理より, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} = 0$. よって,

$$\begin{aligned} &= - \left(0 - \frac{e^0}{\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \tag{B.11}$$

B.2 指数分布

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= [x^2(-e^{-\lambda x})]_0^\infty - \int_0^\infty 2x(-e^{-\lambda x}) dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx \end{aligned}$$

B.11 より,

$$E(x^2) = \frac{2}{\lambda^2} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= E(x^2) - (E(x))^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{\text{Var}(x)}{(E(x))^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{\lambda^2}{1} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

3 次モーメントは以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} E(x^3) &= \int_0^\infty x^3 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= [x^3(-e^{-\lambda x})]_0^\infty - 3 \int_0^\infty x^2(-e^{-\lambda x}) dx \end{aligned}$$

(B.12) より,

$$\begin{aligned} E(x^3) &= 3 \cdot \frac{2}{\lambda^3} \\ &= \frac{6}{\lambda^3} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

B.3 2 次アーラン分布

k 次のアーラン分布の確率密度関数 $f(x)$ を以下に示す.

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \quad (\text{B.16})$$

また, 累積分布関数 $F(x)$ を以下に示す.

$$F(x) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} \quad (\text{B.17})$$

2 次のアーラン分布の平均 $E(x)$, 分散 $Var(x)$, 平方変動係数 C^2 は以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_0^{\infty} x \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda^2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx \end{aligned}$$

(B.12) より,

$$\begin{aligned} E(x) &= \lambda^2 \cdot \frac{2}{\lambda^3} \\ &= \frac{2}{\lambda} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$E(x^2) = \int_0^{\infty} x^3 \lambda^2 e^{-\lambda x} dx$$

(B.15) より,

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \lambda^2 \cdot \frac{6}{\lambda^4} \\ &= \frac{6}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} Var(x) &= E(x^2) - (E(x))^2 \\ &= \frac{6}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda^2} \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

B.4 2 次の超指数分布

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{Var(x)}{(E(x))^2} \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \cdot \frac{\lambda^2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{B.21}$$

2 次アーラン分布の 3 次モーメントは以下のようにして計算できる.

$$\begin{aligned} E(x^3) &= \int_0^\infty x^3 \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx \\ &= -\frac{1}{\lambda} [x^4 \lambda^2 e^{-\lambda x}]_0^\infty + \frac{4}{\lambda} \int_0^\infty x^3 \lambda^2 e^{-\lambda x} dx \end{aligned}$$

(B.19) より,

$$\begin{aligned} E(x^3) &= \frac{4}{\lambda} \cdot \frac{6}{\lambda^2} \\ &= \frac{24}{\lambda^3} \end{aligned} \tag{B.22}$$

B.4 2 次の超指数分布

k 次の超指数分布の確率密度関数 $f(x)$ を以下に示す.

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i x} \quad (x > 0) \tag{B.23}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_i = 1 \tag{B.24}$$

また, 累積分布関数 $F(x)$ は, 以下のようになる.

$$F(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (1 - e^{-\lambda_i x}) \tag{B.25}$$

本研究で扱う超指数分布はバランスの取れた平均を持つ 2 次の超指数分布とし, 次の条件を満たすものとする.

$$f(x) = p\mu_1 e^{-\mu_1 x} + q\mu_2 e^{-\mu_2 x} \quad (x > 0) \tag{B.26}$$

$$p + q = 1 \tag{B.27}$$

$$p \frac{1}{\mu_1} = q \frac{1}{\mu_2} \tag{B.28}$$

このとき、2 次の超指数分布の平均 $E(x)$ 、分散 $Var(x)$ 、平方変動係数 C^2 を以下のように計算できる。

$$E(x) = p \int_0^\infty x \mu_1 e^{-\mu_1 x} dx + q \int_0^\infty x \mu_2 e^{-\mu_2 x} dx$$

(B.11) より,

$$= p \frac{1}{\mu_1} + q \frac{1}{\mu_2}$$

ここで (B.28) を用いると,

$$E(x) = 2p \frac{1}{\mu_1} \quad (\text{B.29})$$

$$E(x^2) = p \int_0^\infty x^2 \mu_1 e^{-\mu_1 x} dx + q \int_0^\infty x^2 \mu_2 e^{-\mu_2 x} dx$$

(B.12) より,

$$= p \frac{2}{\mu_1^2} + q \frac{2}{\mu_2^2}$$

(B.29) を変形すると,

$$\mu_1 = \frac{2p}{E(x)} \quad (\text{B.30})$$

であるから, (B.28), (B.30) より,

$$\begin{aligned} E(x^2) &= p \frac{2E(x)^2}{4p^2} + (1-p) \frac{2E(x)^2}{4(1-p)^2} \\ &= \frac{E(x)^2}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} Var(x) &= E(x^2) - E(x)^2 \\ &= \frac{E(x)^2}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \right) - E(x)^2 \\ &= \frac{E(x)^2}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} - 2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$= \frac{2p^2}{\mu_1^2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} - 2 \right) \quad (\text{B.33})$$

B.4 2 次の超指数分布

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{\text{Var}(x)}{E(x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} - 2 \right) \end{aligned} \tag{B.34}$$

また、2 次の超指数分布の 3 次モーメントは、

$$E(x^3) = p \int_0^\infty x^3 \mu_1 e^{-\mu_1 x} dx + q \int_0^\infty x^3 \mu_2 e^{-\mu_2 x} dx \tag{B.35}$$

(B.15) より、

$$E(x^3) = 6 \left(\frac{p}{\mu_1^3} + \frac{q}{\mu_2^3} \right) \tag{B.36}$$

関連業績

【学会発表】

GI/GI/1 モデルにおける待ち時間の分散に関する一考察

2011 年 12 月 電子情報通信学会 IN 研究会

田村健範，星健太郎，高橋敬隆，小松尚久

GI/GI/1 待ち行列における待ち時間の分散近似式の実環境評価に関する一考察

2013 年 3 月 電子情報通信学会 IN 研究会 (発表予定)

田村健範，星健太郎，甲藤二郎，高橋敬隆