早稲田大学大学院 理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論　文　題　目

一階様相 μ 計算の完全性と安定性理論に関する結果

Completeness of First-Order Modal μ-calculus and Some Results on Stability Theory

申　請　者

岡本	圭史
Keishi	Okamoto

2008 年　1 月

本論文は大きく分けて二つの研究結果により構成される。ひとつは、形式的検証に用いられる命題様相μ計算を一階へ拡張した新しい論理である一階様相μ計算に関する研究である。この研究では、この一階様相μ計算の完全性を証明することを主目的としている。もうひとつは安定性理論に関する研究として、二つの結果を証明する。最初の結果として、素モデルの存在定理の拡張を考える。すなわち、部分的安定を定義し、その条件の下で、任意の可算集合上に部分的に局所原始的なモデルが存在することを証明する。他方、安定性理論では、基本写像は非常に重要な概念である。次の結果として、ω-安定な理論においては、基本写像の拡張可能性と前出の三つ組みより弱い条件の三つ組みの存在が同値であることを証明する。

一階様相μ計算の完全性

情報システムを検証する手法として、数理論理学に基づく“形式的手法”と呼ばれる手法がある。従来の形式的検証では、しばしば命題様相μ計算とそのフラグメント達が用いられてきた。しかし、命題様相μ計算の表現力はそれほど高くない。そこで、より多くの対象を形式化するために、命題様相μ計算を一階へ拡張した論理を新たに構築する。また、それを“一階様相μ計算”と呼ぶ。

一階様相μ計算の構文は、命題様相μ計算と一階述語論理の構文を混合したものとして定義する。命題様相μ計算の論理式は、クリプキ構造と呼ばれる、集合 W “状態集合”(または可能世界集合)とその上の二項関係 R の組み $\langle W,R\rangle$ を用いて解釈される。しかし、クリプキ構造では一階の対象を解釈できないので、一階様相μ計算の論理式を解釈するためには、クリプキ構造を拡張する必要がある。一階様相μ計算の論理式の“標準意味論”では、一階述語論理の個体変数と述語記号を解釈するための集合 D “個体領域”と、述語記号の個体領域での解釈を定める函数 I をクリプキ構造に付加した“標準μ-構造” $\langle W,R,D,I\rangle$ を考える。さらに、標準μ-構造に自由変数を解釈する函数“付値”を加えた“標準μ-モデル”を用いて論理式を解釈する。特に μX.φの形の論理式の解釈は次のように定義される：

$$【\mu X.\phi】= \cap\{\ \alpha \in p(W)\ |\ 【\phi(\alpha)】\subseteq \alpha\ \}$$

標準意味論に対する自然な証明体系は、命題様相μ計算と一階述語論理の証明体系を合わせたものであり、それを一階様相μ計算の証明体系と呼ぶ。実際、この証明体系は標準μ-モデルに関し健全になる。しかし、標準μ-モデルに関し恒真な論理式全体が帰納的枚挙可能でなく、故に標準μ-モデルに関して完全な公理化は存在しない。

鹿島と佐藤はクリプキ構造を拡張して、(命題様相μ計算の)一般μ-構造および一般μ-モデルという概念を導入し、命題様相μ計算の証明体系が一般μ-モデルに関し完全になることを証明した。本論文では、これらの概念を拡張した一階様相μ計算の“一般μ-構造”および“一般μ-モデル”を定義し、一階様相μ計算の自然な証明体系が一般μ-モデルに関し完全になることを証明する。

一般μ-構造は標準μ-構造 $\langle W,R,D,I\rangle$ に命題変数の動く範囲“命題領域”を指定する集合 Q ($\subseteq p(W)$) を付け加えたものとして定義する。このように定義した一般μ-構造は、標準μ-構造の拡張になっている。ただし、標準μ-モデルと一般μ-モデルでは $\mu X.\phi$ の形の論理式の解釈の定義が異なる。具体的には、この論理式の一般μ-モデルでの解釈は次のように定義する：

$$【\mu X.\phi】 = \cap\{\ \alpha \in Q \mid 【\phi(\alpha)】 \subseteq \alpha\ \}$$

ただし Q は条件「任意の論理式 ϕ に対し【ϕ】$\in Q$」を満たしているとする。

本論文では、“カノニカルモデル”を用いて、一般μ-モデルに関する完全性を証明する。この証明における新規性は“*-無矛盾性”にある。様相論理のカノニカルモデルの状態集合は論理式の極大無矛盾な集合からなるが、カノニカルな一般μ-モデルの状態集合は論理式の極大*-無矛盾な集合からなる。

一階様相μ計算は形式的検証のための新しい論理であり、この論理による検証例を示すことはその有用性の証左となり、ひいては各種一階拡張による検証の知見を与えると考えられる。そこで、一階様相μ計算による形式的検証例として、非有界個のプロセスに対する相互排除を形式化し、相互排除が成り立つことを形式的に証明する。なお、この性質は命題様相μ計算では形式化できない。

安定性理論に関する結果

安定性理論はモデル理論研究の一分野である。本章では、節「部分局所モデル」において「部分局所素モデルの存在定理」を証明し、節「正規基本写像」において「基本写像の正規性とある種のモデルの三つ組の存在の同値性」を証明する。

部分局所素モデル 安定性理論でよく用いられるモデルに素モデルがある。集合 A 上の素モデルは A から生成されるモデルであると考えることができ、非常に有用な性質を持つ素モデルを用いて多くの定理が証明されている。しかし、常に素モデルが存在するとは限らず、素モデルの存在定理として、以下の事実が知られている：

- Tがω-安定ならば、任意の集合Aに対しA上の素モデルが存在する
- Tが超安定ならば、任意の集合Aに対しA上のa-素モデルが存在する
- Tが安定ならば、任意の集合Aに対しA上の局所素モデルが存在する

本節では、これらの定理の拡張を考える。すなわち、安定性を拡張した部分的な安定性を定義し、その仮定の下である種の素モデルが存在することを証明する。今Pは自由変数を含む論理式であるとし、安定性の拡張概念としてPに関する安定性と、それに対応するPに関する局所原子性を次のように定義する。

定義 任意の集合Aに対し、$|A|\leqq\lambda$ならば $|\{p(x)\in S(A) \mid P(x)\in p(x)\}|\leqq\lambda$となるとき、Tは“Pの中でλ-安定”であるという。Tがあるλで、Pの中でλ-安定となるとき、Tは“Pの中で安定”であるという。さらに$B\subseteq A$とする。集合P^Aが集合P^B上局所原子的であるとき、“AはPに関しB上局所原子的”であるという。

Tが安定ならば、Tはx=xの中で安定である。したがって、Pに関する安定性は明らかに安定性より弱い条件である。このとき、次の定理を証明する。

定理 理論 TはPの中で安定であるとし、Aは可算集合とする。P^Mの全てのL(A)-定義可能な部分集合が$L(P^A)$-定義可能であるとき、Aを含み、Pに関しA上局所原子的な可算モデルが存在する。

正規基本写像 構造Mの部分基本写像fが、その領域または値域がMと等しくなるようなM上の基本写像に拡大できるとき、fは“正規”であると呼ばれ、部分基本写像の正規性とある種のモデルの三つ組みの存在の同値性が証明されている。理論Tがω-安定であるとき、MをTのモデル、fをM上の極大部分基本写像とすると、fの領域と値域はMの基本部分モデルであることが証明できる。本節では、このようなω-安定な理論の特殊性を生かし、理論がω-安定なとき、部分基本写像の正規性と前出の三つ組みより弱い条件の三つ組みの存在の同値性、すなわち次の結果を証明する:

定理 理論Tはω-安定とする。このとき、以下は同値:

- Tは“弱特別”なの三つ組みを持たない
- Tは“殆特別”なの三つ組みを持たない
- Tの任意のモデル上の全ての部分基本写像は正規である

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

氏 名　岡本　圭史　　印

（２００７年１２月　現在）

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
○ 論文	Formal Verification in a First-Order Extension of Modal μ-calculus、コンピュータソフトウェア、(掲載決定)、Keishi Okamoto
○ 論文	General Models and Completeness of First-Order Modal mu-calculus、Journal of Logic and Computation、(掲載決定)、Ryo Kashima and Keishi Okamoto
○ 論文	Partially locally atomic models、Tsukuba Journal of Mathematics Vol.22, No.1, pp.235-240、1998年6月、Keishi Okamoto and Kentaro Wakai
○ 論文	Normal Elementary Maps、Tokyo Journal of Mathematics Vol.21, No.1, pp.153-158、1998年6月、Keishi Okamoto
講演	Formal Verification in a First-Order Extension of Modal μ-calculus、日本ソフトウェア科学会第４回ディペンダブルソフトウェアワークショップ、2006年12月、Keishi Okamoto
講演	一階様相μ計算、第三回システム検証の科学技術シンポジウム、2006年10月、岡本 圭史
講演	函数記号付一階様相μ計算、日本ソフトウェア科学会第23回大会、2006年9月、岡本圭史、木下佳樹
講演	一階様相μ計算、日本ソフトウェア科学会第22回大会、2005年9月、岡本圭史
講演	不動点付高階様相論理、情報処理学会第67回全国大会、2005年3月、岡本圭史
講演	Unstable cardinal and Indiscernible set、1996年度日本数学会年会、1996年4月、Kentaro Wakai、Keishi Okamoto
その他	Completeness Theorem of First-Order Modal mu-calculus、Research Reports on Mathematical and Computing Sciences C-244、2007年4月、Ryo Kashima and Keishi Okamoto
その他	Formalising Coffman Conditions in First Order Modal mu Calculus、Programming Science Technical Report PS-2006-010、2006年10月、Yoshiki Kinoshita、Koki Nishizawa、Keishi Okamoto
その他	A first-order extension of mu-calculus、Programming Science Technical Report PS-2006-003、2006年4月、Keishi Okamoto

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
その他	GROUP CONFIGURATIONS IN SIMPLE THEORIES (PART.2)、京都大学数理解析研究所講究録 1344、2003 年 10 月、Keishi Okamoto
その他	Is type-definable group ∩-definable in simple theories?、Proceedings -- Model Theory at St. Catherine's College Kobe Institute、1998 年 8 月、Keishi Okamoto
その他	On generic Kripke structures、RIMS 共同研究 モデル理論の手法による無限構造の構成法、007 年 10 月、池田宏一郎、岡本圭史
その他	On random Kripke frames、RIMS 共同研究 モデル理論の手法による無限構造の構成法、2007 年 10 月、池田宏一郎、岡本圭史
その他	Zero-One Law について、代数，論理，幾何と情報科学研究集会 (ALGI18)、2007 年 9 月、池田宏一郎、岡本圭史
その他	述語様相μ計算について(2)、第 40 回 MLG 数理論理学研究集会、2006 年 12 月、岡本圭史
その他	Model Checking a Modular-Structured Nonblocking Atomic Commitment Protocol for Asynchronous Distributed Systems、第４回ディペンダブルソフトウェアワークショップ、2006 年 12 月、Eun-Hye CHOI、Keishi OKAMOTO、Tatsuhiro TSUCHIYA、Tohru KIKUNO
その他	対話型定理証明支援系 Agda の紹介、日本ソフトウェア科学会第 23 回大会、2006 年 9 月、岡本圭史、湯浅能史
その他	First-order Modal mu-calculus, 2nd Workshop on Verification Technology (VERITE)、2006 年 5 月、Keishi Okamoto
その他	一階様相μ計算、第 39 回 MLG 数理論理学研究集会、2005 年 12 月、岡本圭史
その他	高階論理の完全性とその周辺について、第 21 回記号論理学と情報科学、2004 年 9 月、岡本圭史
その他	Generic 構造の飽和性、RIMS 研究集会 Generic 構造とその応用、2003 年 11 月、岡本圭史
その他	単純理論における群、RIMS 研究集会 モデル理論と代数幾何の交流、2003 年 3 月、岡本圭史
その他	体のモデル理論、Model Theory Summer Meeting、2002 年 8 月、岡本圭史
その他	eq 構造について、数学基礎論サマースクール、2000 年 8 月、岡本圭史

早稲田大学　博士（理学）　学位申請　研究業績書

種 類 別	題名、　発表・発行掲載誌名、　発表・発行年月、　連名者（申請者含む）
その他	Groups in Simple Theories、Model Theory Summer Meeting、1997年８月、Keishi Okamoto