

外 22-39

早稲田大学大学院理工学研究科

博 士 論 文 概 要

論 文 題 目

The q -analogue of the alternating group and \mathbb{Z}_2 -graded Clifford system in the Iwahori-Hecke algebra
交代群の q 変形と岩堀ヘッケ環における \mathbb{Z}_2 次数付き
クリフォード系

申 請 者

三 橋 秀 生

Hideo Mitsunashi



2002 年 12 月

本論文には2つの主題がある。第一は、 A 型の岩堀ヘッケ環の中に対称群と交代群の間の分規則と同様の現象が成り立つ交代群の q 類似を具体的に構成することであり、第二は、構成した部分代数の岩堀ヘッケ環内での特徴づけを行うことと B 型岩堀ヘッケ環へ拡張することである。

R を単位元を持つ commutative domain とし、 q を R の可逆元とする。 A 型岩堀ヘッケ環 $\mathcal{H}_{R,n}(q)$ を、生成元 g_1, g_2, \dots, g_{n-1} と以下の基本関係式を持つ R 上の代数とする。

$$\begin{aligned} (A1) \quad & g_i^2 = (q-1)g_i + q \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ (A2) \quad & g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2) \\ (A3) \quad & g_i g_j = g_j g_i \quad (|i-j| > 1) \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_{R,n}(q)$ はランク $n!$ の自由 R 加群であることが知られている。 $R_0 = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, (q+1)^{-1}, \frac{1}{2}]$ とし、 $\mathcal{H}_{R_0,n}(q)$ に対して、 $f_i = (q+1)^{-1}\{2g_i - (q-1)\}$ によって $f_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ を定義する。この時、 $\mathcal{H}_{R_0,n}(q)$ は $f_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ によって生成され、その基本関係式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} (A'1) \quad & f_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ (A'2) \quad & f_i f_{i+1} f_i = f_{i+1} f_i f_{i+1} - \left(\frac{q-1}{q+1}\right)^2 (f_i - f_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n-2) \\ (A'3) \quad & f_i f_j = f_j f_i \quad (|i-j| > 1) \end{aligned}$$

この関係式によって、 $f_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ の偶数個の積で表された元は、基本関係式を用いて他の表し方をしても、やはり偶数個の積の線型結合であることがわかる。

この集合中、 $f_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ の偶数個の積のものは $n!/2$ 個あることに注意し、 $x_i = f_1 f_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n-2)$ で生成される $\mathcal{H}_{R_0,n}(q)$ の R_0 部分代数 $\tilde{\mathfrak{A}}_{R_0,n}(q)$ を考える。

定義 1 (部分代数の定義). $n > 2$ とし、 $q \neq -1$ とする。このとき、 $\tilde{\mathfrak{A}}_{R_0,n}(q)$ を $x_i = f_1 f_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n-2)$ で生成される $\mathcal{H}_{R_0,n}(q)$ の R_0 部分代数として定義する。 $n = 2$ に対しては、 $\tilde{\mathfrak{A}}_{R_0,2}(q)$ は単位元のみから生成される $\mathcal{H}_{R_0,n}(q)$ の R_0 部分代数とする。

このとき、 $\tilde{\mathfrak{A}}_{R_0,n}(q)$ は $f_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ の偶数個の積の線型結合全体からなる $\mathcal{H}_{R_0,n}(q)$ の R_0 部分代数に一致し、ランクが $n!/2$ であることが本論文によって示される。

一方、 $\mathfrak{A}_{R_0,n}(q)$ を以下のとおり定義する。

定義 2 (生成元と基本関係式). $n > 1$ に対し $\mathfrak{A}_{R_0,n}(q)$ は生成元 y_1, y_2, \dots, y_{n-2} と以下の基本関係式を持つ R_0 上の代数とする。

$$\begin{aligned} (D1) \quad & y_1^3 = -\left(\frac{q-1}{q+1}\right)^2 (y_1^2 - y_1) + 1 \\ (D2) \quad & y_i^2 = 1 \quad (i > 1) \\ (D3) \quad & (y_{i-1} y_i)^3 = -\left(\frac{q-1}{q+1}\right)^2 \left\{ (y_{i-1} y_i)^2 - y_{i-1} y_i \right\} + 1 \quad (i = 2, 3, \dots, n-2) \\ (D4) \quad & (y_i y_j)^2 = 1 \quad (|i-j| > 1) \end{aligned}$$

ただし、 $n = 2$ に対しては、 $\mathfrak{A}_{R_0,2}(q)$ は単位元のみから生成されるものとする。

このとき、 $\mathfrak{A}_{R_0,n}(q)$ と $\tilde{\mathfrak{A}}_{R_0,n}(q)$ は R_0 代数として同型であることが示される。

$\mathcal{H}_{R_0,n}(q)$ には、Goldman's involution と呼ばれる次のような自己同型があることが知られている。

$$\begin{aligned} \wedge : \mathcal{H}_{R_0,n}(q) &\longrightarrow \mathcal{H}_{R_0,n}(q) \\ g_i^\wedge &= (q-1) - g_i \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

\wedge は $\wedge^2 = \text{id}_{\mathcal{H}_{R_0,n}(q)}$ を満たしており、さらに $f_i^\wedge = -f_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) である。よって、 $\mathfrak{A}_{R_0,n}(q)$ は \wedge の固有値 1 の固有空間、即ち $\mathfrak{A}_{R_0,n}(q) = \{g \in \mathcal{H}_{R_0,n}(q) \mid g^\wedge = g\}$ として定義できることが分かる。つまり、 $\mathfrak{A}_{R_0,n}(q)$ は Goldman's involution の不変環である。

$\mathcal{H}_{R_0,n}(q)$ の表現は対称群の場合と同様、 n 次のヤング図形でパラメトライズされることが知られている。Young の orthonormal form 表現の q 類似を π_λ (λ は n 次ヤング図形) と表すことにし、複素数体 \mathbb{C} 上での $\mathcal{H}_{\mathbb{C},n}(q)$ の表現を考える。また、 π_λ の $\mathfrak{A}_{\mathbb{C},n}(q)$ への制限を $\tilde{\pi}_\lambda$ とおくことにする。

$q \neq 0$ かつ $1 < k \leq n$ なる k に対し、 q が 1 の k 乗根でないとき、 $\{\pi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は $\mathcal{H}_{\mathbb{C},n}(q)$ の既約表現の完全代表系であることが知られており、本論文によって、これらの表現の $\mathfrak{A}_{\mathbb{C},n}(q)$ への制限は対称群の既約表現の交代群への制限と同様であることが示される。すなわち、

- (1) ${}^t\lambda \neq \lambda$ のとき、 $\tilde{\pi}_\lambda$ は $\mathfrak{A}_{\mathbb{C},n}(q)$ の既約表現であり、 $\tilde{\pi}_\lambda \cong \tilde{\pi}_{{}^t\lambda}$ である。
- (2) ${}^t\lambda = \lambda$ のとき、 $\tilde{\pi}_\lambda$ の次数は偶数であり、 $\tilde{\pi}_\lambda$ は次数が $\tilde{\pi}_\lambda$ の半分である互いに非同値な 2 つの既約表現 $\tilde{\pi}_\lambda^+$ と $\tilde{\pi}_\lambda^-$ に既約分解する。

そして $q = 1$ のときは対称群と交代群の群環の場合であるとして、以下の定理が成り立つ。

定理 3 (A 型部分代数の既約表現). q を $q^k \neq 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を満たす 0 でない複素数とする。 $\{\lambda_i, {}^t\lambda_i, \mu_j\}_{j=1,2,\dots,q}^{i=1,2,\dots,p}$ を n 次ヤング図形全体のなす集合で、 $\lambda_i \neq {}^t\lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$)、 $\mu_j = {}^t\mu_j$ ($j = 1, 2, \dots, q$) とする。このとき、 $\{\tilde{\pi}_{\lambda_i}, \tilde{\pi}_{\mu_j}^+, \tilde{\pi}_{\mu_j}^-\}_{j=1,2,\dots,q}^{i=1,2,\dots,p}$ は $\mathfrak{A}_{\mathbb{C},n}(q)$ の既約表現の完全代表系をなす。さらに、 $\mathfrak{A}_{\mathbb{C},n}(q)$ の次元は $n!/2$ であり、半単純である。

以上の議論を B 型の場合に拡張する前に S -graded Clifford system の定義を述べる。

S を有限群とし、 R を単位元を持つ可換環とする。 A を R 上の代数であって、加群として R 上有限生成であるとする。また、 $\{A_s\}_{s \in S}$ を A の R -部分加群の族とする。

定義 4 (S -graded Clifford system). $\{A_s\}_{s \in S}$ が A における S -graded Clifford system であるとは、以下の 4 条件を満たす場合を言う。

- (C1) $s, t \in S$ に対して、 $A_s A_t = A_{st}$
- (C2) 各 $s \in S$ に対して、可逆元 $a_s \in A$ が存在し、 $A_s = a_s A_1 = A_1 a_s$ を満たす。
- (C3) $A = \bigoplus_{s \in S} A_s$
- (C4) $1 \in A_1$

定義からわかるように、 A_1 は A の部分代数である。

R は単位元を持つ commutative domain とし、 u, q を R の可逆元とする。このとき、 B 型岩堀ヘッケ環 $\mathcal{H}_{R,n}(u, q)$ は生成元 a_1, a_2, \dots, a_n と基本関係式

- (B1) $a_1^2 = (u-1)a_1 + u$
- (B2) $a_i^2 = (q-1)a_i + q$ if $i = 2, 3, \dots, n$
- (B3) $a_1 a_2 a_1 a_2 = a_2 a_1 a_2 a_1$
- (B4) $a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}$ if $i = 2, 3, \dots, n$
- (B5) $a_i a_j = a_j a_i$ if $|i-j| > 1$

を持つ R 上の代数である。 u, q を不定元とし、 $R_1 = \mathbb{Z}[u^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$ とする。このとき、 $\mathcal{H}_{R_1,n}(u, q)$ は R_1 -自由加群としてランク $2^n n!$ を持つことが知られている。また、 $\hat{a}_1 = (u-1) - a_1, \hat{a}_i = (q-1) - a_i$ ($i > 1$) とし、これを代数準同型に拡張したものが Goldman's involution である。

$R_2 = \mathbb{Z}[u^{\pm 1}, q^{\pm 1}, (u+1)^{-1}, (q+1)^{-1}, \frac{1}{2}]$ とし、 $\mathcal{H}_{R_2, n}(u, q)$ に新しい生成元として、 $b_1 = (u+1)^{-1}(a_1 - \hat{a}_1)$, $b_i = (q+1)^{-1}(a_i - \hat{a}_i)$ ($i > 1$) をとる。この時、 $\hat{b}_i = -b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) が成り立つ。また、 b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) は $\mathcal{H}_{R_2, n}(u, q)$ を生成し、基本関係式は以下の通りである。

- (B'1) $b_i^2 = 1$ if $i = 1, 2, \dots, n$
(B'2) $b_1 b_2 b_1 b_2 = b_2 b_1 b_2 b_1 - 2 \frac{(u-1)(q-1)}{(u+1)(q+1)} (b_1 b_2 - b_2 b_1)$
(B'3) $b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} - \left(\frac{q-1}{q+1} \right)^2 (b_i - b_{i+1})$ if $i = 2, 3, \dots, n$
(B'4) $b_i b_j = b_j b_i$ if $|i - j| > 1$

$i = 1, 2, \dots, n$ に対して、 $\mathcal{H}_{R_2, n}(u, q)$ の部分集合

$$S_i = \{1, b_i, b_i b_{i-1}, \dots, b_i b_{i-1} \cdots b_2 b_1, b_i b_{i-1} \cdots b_2 b_1 b_2, \dots, b_i b_{i-1} \cdots b_2 b_1 b_2 \cdots b_{i-1} b_i\}$$

を定める。このとき、 $\mathcal{H}_{R_2, n}(u, q) = \bigoplus_{U_i \in S_i} R_2 U_1 U_2 \cdots U_n$ が成り立つ。 $\{U_1 U_2 \cdots U_n\}_{U_i \in S_i}$ の要素の中で、 b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) の偶数個の積のもの全体を \mathcal{E} とし、 $\mathcal{H}_{R_2, n}(u, q)$ の R_2 -部分加群 $\mathcal{H}_{R_2, n}^1(u, q)$ を $\mathcal{H}_{R_2, n}^1(u, q) = \bigoplus_{M \in \mathcal{E}} R_2 M$ で定義する。この時、 $\text{rank}_{R_2} \mathcal{H}_{R_2, n}^1(u, q) = 2^{n-1} n!$ である。さらに、 $n > 1$ とするとき、 $\mathcal{H}_{R_2, n}^1(u, q)$ は $\mathcal{H}_{R_2, n}(u, q)$ の部分代数であり、 $\mathcal{H}_{R_2, n}^1(u, q) = \{b \in \mathcal{H}_{R_2, n}(u, q) \mid \hat{b} = b\}$ である。また、 $\mathcal{H}_{R_2, n}(u, q)$ のもう一つの R_2 -部分加群 $\mathcal{H}_{R_2, n}^{-1}(u, q)$ を $\mathcal{H}_{R_2, n}^{-1}(u, q) = \bigoplus_{M \in S \setminus \mathcal{E}} R_2 M$ によって定めると、次が成り立つ。

命題 5 (\mathbb{Z}_2 -graded Clifford system). $\{\mathcal{H}_{R_2, n}^t(u, q)\}_{t \in \{1, -1\}}$ は $\mathcal{H}_{R_2, n}(u, q)$ における \mathbb{Z}_2 -graded Clifford system を成す。

$K_0 = \mathbb{Q}(u, q)$ とし、 \bar{K}_0 を K_0 の代数閉包とする。この時、 $\mathcal{H}_{K_0, n}(u, q)$ の (絶対) 既約表現はトータルサイズが n である 2 つのヤング図形の組によってパラメトライズされることが知られている。 $\lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ を 2 つのヤング図形 $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ からなる組とし、 $|\lambda|$ を $\lambda^{(1)}$ と $\lambda^{(2)}$ の箱数の総和とする。 $\lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ に対し $\bar{\lambda} = ({}^t \lambda^{(2)}, {}^t \lambda^{(1)})$ とする。また、 (π_λ, V_λ) を $\mathcal{H}_{K_0, n}^1(u, q) \curvearrowright$ 制限したものを $(\bar{\pi}_\lambda, \bar{V}_\lambda)$ と記す。この時、以下の事 (分規則) が成り立つ。

- (1) $\bar{\lambda} \neq \lambda$ のとき、 $\bar{\pi}_\lambda$ は $\mathcal{H}_{K_0, n}^1(u, q)$ の既約表現であり、 $\bar{\pi}_\lambda \cong \bar{\pi}_{\bar{\lambda}}$ である。
- (2) $\bar{\lambda} = \lambda$ のとき、 $\bar{\pi}_\lambda$ の次数は偶数であり、基礎体を \bar{K}_0 に拡大すれば、 $\bar{\pi}_\lambda$ は次数が $\bar{\pi}_\lambda$ の半分である互いに非同値な $\mathcal{H}_{K_0, n}^1(u, q)$ の 2 つの既約表現 $\bar{\pi}_\lambda^+$ と $\bar{\pi}_\lambda^-$ に既約分解する。

さらに $S = \mathbb{Z}_2$ の場合の S -graded Clifford system の一般論および半単純環の一般論を用いると、次の結果が得られる。

定理 6 (B 型部分代数の既約表現). $\{\lambda_i, \bar{\lambda}_i, \mu_j\}_{j=1, 2, \dots, q}^{i=1, 2, \dots, p}$ をトータルサイズが n である 2 つのヤング図形の組全体のなす集合で、 $\lambda_i \neq \bar{\lambda}_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$)、 $\mu_j = \bar{\mu}_j$ ($j = 1, 2, \dots, q$) とする。この時、 $\{\bar{\pi}_{\lambda_i}, \bar{\pi}_{\mu_j}^+, \bar{\pi}_{\mu_j}^-\}_{j=1, 2, \dots, q}^{i=1, 2, \dots, p}$ は $\mathcal{H}_{K_0, n}^1(u, q)$ の \bar{K}_0 上の既約表現の完全代表系をなす。さらに、 $\mathcal{H}_{K_0, n}^1(u, q)$ は半単純である。