早稲田大学大学院理工学研究科

# 博 士 論 文 概 要

## 論 文 題 目

厳密に正確な演算を用いた
ソリッドモデリングに関する研究

Solid modeling using exact arithmetic


申 請 者

山内 俊哉

TOSHIYA YAMAUCHI

機械工学専攻　CAD 工学研究


2003 年 12 月

近年，コンピュータによる機械設計においては，3 次元 CAD システムが広く利用されている．3 次元 CAD では 3 次元の立体をコンピュータ内で表現する必要があり，その表現方法にはワイヤーフレーム，サーフェス，ソリッドがある．システムにより用いている表現方法は異なるが，現在は，ソリッドモデルに基づいたシステムであるソリッドモデラが主流となっている．ソリッドモデラの主要な機能として，集合演算が挙げられる．集合演算の利用により，簡単な立体を組み合わせて複雑な形状の立体を設計することができる．しかし，数値誤差や複雑な処理などのために，集合演算の途中でシステムが破綻してしまう場合がある．ソリッドモデルの集合演算を完全に安定におこなうことは，非常に困難である．その原因は，主に以下の 2 つである．

(1)　浮動小数点演算による数値誤差

(2)　曲線・曲面を扱う際に利用する近似計算

現在，一般的に用いられているソリッドモデラでは，浮動小数点演算を用いて処理がおこなわれている．浮動小数点演算は，高速に処理をおこなうことが可能であるが，データ長の限られた固定精度演算であるため，丸め誤差やけた落ちなどの数値誤差を生じる．

曲線，曲面を持つ立体を扱うソリッドモデラでは，集合演算の際に曲線，曲面の干渉処理をおこなう必要がある．曲線，曲面の干渉処理を代数的におこなう場合，非常に高次の代数方程式を扱わなければならない．例えば，双 3 次 Bézier 曲面どうしの交差により生じる曲線は，324 次式となる．交点の座標値は，このような高次代数方程式の解である．代数方程式は，その次数が 5 次以上の場合には代数的に解くことができない．したがって，交点の正確な座標値を求めることはほとんどの場合において不可能である．そこで，一般的には，幾何的 Newton-Raphson 法などの近似計算を利用して交点算出をおこなっている．幾何的 Newton-Raphson 法は非常に高速に解を算出することができるが，その解は近似解であるため数値誤差を含んでいる．

ソリッドモデラでは，2 つのソリッドを干渉する位置に配置し，それらの集合演算をおこなうことによって形状を作成していく．集合演算処理では，幾何判定の結果を用いて，位相の変更をおこなう．浮動小数点演算や近似計算を用いた場合，それらに伴う数値誤差により，幾何情報と位相情報の間に矛盾が生じ，処理が破綻してしまう可能性がある．

本研究の目的は，ソリッドモデルの集合演算の安定化をおこなうことである．そのために，同次処理に基づく整数演算を利用して，厳密に正確な演算をおこなう．完全同次処理では，点は同次座標により表現される．同次座標の各成分を可変倍長整数型で表現することにより，必要十分な有理数の範囲において数値を完全に正確に表現することができる．同次処理では除算をおこなうことはないので，幾何演算を無誤差でおこなうことが可能である．

同次処理に基づく整数演算を利用することにより，数値的に破綻することのない多面体ソリッドモデラ理論が提案されている．この手法では，ソリッドの位相と幾何が矛盾することがないようにプリミティブの構築，座標変換をおこなう．これにより，安定な集合演算を実現することができる．本研究では，この理論に改良を加え，実際にソリッドモデリングシステムの作成をおこなう．以下に，従来提案されていた理論の問題点及びそれらの改良方法，本論文における新規点を述べる．

(1)　新たな最大データ長の制限手法の提案

整数演算を利用したソリッドモデラでは，座標変換及び集合演算が繰り返された場合には,整数値を表現するデータ長が際限なく増大するという問題が生じる．従来の理論では，この問題に対して，ソリッドの作成過程を保持し，プリミティブに対して 1 回だけ座標変換をおこなうように作成過程を変更することによって，最大データ長の制限をおこなっている．しかし，そのために集合演算を最初から繰り返しおこなう必要があり，計算量の多い処理となってしまう．そこで，集合演算を最初から繰り返す必要なく最大データ長を制限する手法を新たに提案する．この手法では，集合演算をおこなう一方のソリッドをプリミティブに限定し，プリミティブに対してのみ座標変換をおこなうことにより，ソリッドの整数値の最大データ長を制限する．

(2)　整数演算の効率化

同次処理に基づく整数演算では，演算が繰り返しおこなわれた場合には，数値のデータ長が増大してしまう．それに伴い，処理時間も増大し，処理効率が低下してしまう．従来提案されている理論は，整数演算を効率的におこなうために，適応的符号判定処理を導入している．適応的符号判定処理は，整数値のデータ長に関係なくほぼ一定の処理時間で符号判定をおこなうことができる処理である．本論文では，整数演算の効率化の手法として，FPU（Floating Point Unit）を利用した適応的符号判定処理，整数同次座標の正規化を示す．FPU を利用した適応的符号判定処理では，可変倍長整数型データをある一定の処理単位に分割し，分割された整数値を浮動小数点型で表現する．分割された数値は浮動小数点型の仮数部を超えないように表現され，そのため，無誤差で判定がおこなわれる．この手法は，従来の適応的符号判定処理に比べ高速に処理をおこなうことができる．整数同次座標の正規化は,同次座標の各成分を最大公約数で除算する処理であり,データ長の増加をある程度抑制することができる．

(3)　集合演算アルゴリズムの改良

従来の理論では，データ構造に稜線ループを導入することによって，集合演算アルゴリズムの簡潔化をおこなっている．この集合演算アルゴリズムでは，幾何要素どうしが接触した場合についても対応しているが，そのような場合には非多様体が生成されることがほとんどである．しかし，非多様体ソリッドは集合演算

の入力ソリッドとして認められておらず，そのようなソリッドを用いて集合演算をおこなうと，処理が破綻してしまう．そこで，出力ソリッドとして非多様体ソリッドが生じる場合には，それを複数の多様体ソリッドに分離する手法を提案する．また，従来の集合演算アルゴリズムは，簡単な干渉状態の場合には安定に処理をおこなうことができるが，様々な干渉状態には対応できていない．そこで，そのような場合でも処理が破綻しないように，集合演算アルゴリズムの改良をおこなう．

(4)　システムの作成及び安定性の評価

これまでの同次処理に基づく多面体ソリッドモデラに関する研究では，理論の構築及び試験的システムによる確認はおこなわれていたが，実際にソリッドモデリングシステムの作成はおこなわれていなかった．そこで，新たに提案する理論に基づいて実際にソリッドモデラを作成し,システムの安定性の評価をおこなう．浮動小数点演算を用いたソリッドモデラでは，幾何要素が非常に接近している場合，処理の破綻を招きやすい．本研究のソリッドモデラでは，そのような場合でも安定に集合演算をおこなうことができることを示す．

(5)　曲線・曲面の干渉処理に関する研究

従来おこなわれてきたソリッドモデラの安定化に関する研究では，多面体のみを対象としてきた．そこで，ソリッドモデラに曲線，曲面を導入するための研究をおこなう．曲面ソリッドを対象とした安定な集合演算アルゴリズムを構築することは，非常に困難である．本論文では，曲面ソリッドの集合演算を安定におこなうための方向性を示す．本研究では，処理を安定におこなうために，厳密に正確な演算（exact arithmetic）を利用する．曲線，曲面を含んだソリッドの干渉処理において，交点座標を正確に算出することはできない．集合演算アルゴリズムにおいて，位相に変更を加えるためには，交点の正確な値は必ずしも必要ではなく，交点の有無が正確に判定できればよい．そこで，代数方程式の実数解の個数を正確に判定することができる Sturm 列を利用して，3 曲面の交点の有無を正確に判定する手法を提案する．また，計算例を用いて，本論文で提案する手法により，3 曲面の交点の有無を正確に判定することができることを示す．

以上の研究から，多面体ソリッドモデラに関する研究においては，これまで提案されていたソリッドモデラ理論を改良することにより，安定な集合演算アルゴリズムを構築することができた．また，その理論に基づいて作成されたシステムを用いて，安定に処理がおこなえることを確認した．曲線，曲面の干渉処理に関する研究においては,曲線,曲面の交点の有無を正確に判定する手法を提案した．集合演算アルゴリズムにおいて，交点の有無の判定は，まず最初に必要となる幾何計算である．集合演算を完全に安定におこなうためには，この判定が正確におこなわれなければならない．この手法を応用することによって，曲線，曲面を対象とした安定な集合演算アルゴリズムの構築が期待できる．