早稲田大学大学院理工学研究科

博士論文概要

論文題目

Constructive Aspects of Inverse Galois Problem

(ガロア逆問題に対する構成的研究)

申 請 者
陸 名 雄 一
Yūichi Rikuna

数理科学 保型函数論

2002 年 11 月

ガロア理論は代数方程式の解法理論を起源とし, 現在では体の正規分離拡大 L/K からそのガロア群 $\mathrm{Gal}(L/K) := \mathrm{Aut}_K L$ への対応を与える理論として定式化されて代数学に於ける最も重要な理論のひとつとなっている. ガロア逆問題の研究とは上記の逆対応についての研究, 即ち「与えられた体 K と有限群 G に対し, G をガロア群とする K 上のガロア拡大は存在するか」という問題を扱うものである. この問題は「体 K の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ は如何なる (有限) 商群を持つか」と言い換えることができる. 有限次代数体, 特に有理数体 $\mathbf{Q}$ に対して, その絶対ガロア群の構造を調べることは整数論に於ける最も重要な問題であり, その核心となる部分が上記の問題である.

D. Hilbert 及び E. Noether による先駆的な仕事 (1892, 1918) の後多くの研究者の努力によって種々の有限群 G に対してこの問題が肯定的に解かれ,「$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ は任意の有限群を商群に持つ, 即ち任意の有限群は $\mathbf{Q}$ 上のガロア群になり得る」と予想されるに至った. このような, 各有限群に対するガロア拡大の存在性に関する研究がガロア逆問題に対する研究の第一段階である. 有限単純群の分類理論の完成に伴ってこの予想の正当性が確実視されている現在, ガロア逆問題の第二の段階 — 構成的研究 — が注目され始めている.

ガロア逆問題の構成問題は一般的には「与えられた体 K と有限群 G の組に対し, K 上 G をガロア群とする拡大体を全て記述せよ」と述べることができる. 申請者の研究は上記の拡大体をパラメーター付多項式 — 生成的多項式 — によって記述する問題に関するものである. この生成的多項式は正確には次のように定義される.

定義 1. 有限群 G に対し, 体 k 上の n 変数有理函数体 $k(t_1,\ldots,t_n)$ 上の以下の条件を満たすモニックな多項式 $f(t_1,\ldots,t_n;X) \in k(t_1,\ldots,t_n)[X]$ は「G に対する k 上の生成的多項式」であるという. 1. $f(t_1,\ldots,t_n;X)$ の $k(t_1,\ldots,t_n)$ 上のガロア群は G と同型である. 2. $K \supset k$ かつ $\#K=\infty$ を満たす任意の体 K と任意の G-ガロア拡大体 L/K に対して, K の元 $a_1,\ldots,a_n$ が存在して L が $f(a_1,\ldots,a_n;X) \in K[X]$ の K 上の分解体となる.

これは生成的多項式が基礎体 k の拡大体 K に対し, 全ての G-ガロア拡大 L/K をパラメトライズすることを意味する. 従って任意の K, G に対する生成的多項式の構成を司る一般理論の構築は可換及び非可換類体論の構成問題をも含むものであり, 極めて困難な問題である. 現在のガロア逆問題に対する構成的研究は比較的小さな, 或いは構造が簡単な個々の有限群に対して上記問題を考えるという形で行われている. 当論文では以上の背景の基に, より多くの有限群に対する生成的多項式を具体的に構成する研究を行うものである.

当論文は全 5 章から成り, 各章の構成は以下の通りである.

1. Introduction

本章では当研究のテーマである「ネーターの問題と生成的多項式の構成」についてその背景を含めて論じる.

体 k 上の n 変数有理函数体 $k(x) := k(x_1,\ldots,x_n)$ への有限群 G による k-作用 (k の元を動かさない作用) を考える. この作用による不変体 $k(x)^G$ を調べる問題は代数幾何学に於ける主要な問題のひとつであるが, 特に $k(x)^G$ の k-有理性 (純超越性) を調べる問題を「一般ネーター問題」という. この問題が肯定解を持てば G-ガロア拡大 $k(x)/k(x)^G$ から有理函数体 $k(t) := k(t_1,\ldots,t_n)$ 上の正則 G-ガロア拡大を構成することができる. この拡大のモニックな定義多項式 $F_G(t;X) \in k(t)[X]$ は一般には k 上生成的とはならない. しかし, G. Kemper と E. Mattig の結果 (2000) によって上記の G-作用が線型であれば $F_G(t;X)$ が G に対する k 上の生成的多項式であることが示される. ここでは上記の「線型ネーター問題」の肯定解から生成的多項式を具体的に構成する手法について詳しく述べている.

2. Simple families of cyclic polynomials

最も構造が簡単な有限群は位数 n の巡回群 $\mathcal{C}_n$ である. $\mathcal{C}_n$ に対する生成的多項式は基礎体が 1 の n 分体 $k_n := \mathbb{Q}(\zeta_n)$ (ただし $\zeta_n \in \mathbb{C}$ は 1 の原始 n 乗根) であれば $X^n - t \in k_n(t)[X]$ で与えられることがクンマー理論より導かれる. この生成的多項式 (巡回多項式) の基礎体をより小さくすることが従来から試みられており, n が奇数の場合については $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ の最大実部分体 k_n^+ 上生成的な巡回多項式が知られている. 当論文ではこの結果を次のように n が任意の自然数である場合へ拡張し, k_n^+ 上の巡回多項式族の簡明な表示を与えている.

定理 2. 任意の自然数 $n \geq 3$ に対し, 多項式

$$(\zeta_n^{-1} - \zeta_n)^{-1}((\zeta_n^{-1} - t)(X - \zeta_n)^n - (\zeta_n - t)(X - \zeta_n^{-1})^n) \in k_n^+(t)[X]$$

の $k_n^+(t)$ 上のガロア群は $\mathcal{C}_n$ と同型である. 特に n が奇数の場合, この多項式は k_n^+ 上 生成的 である.

この多項式の根は全て対応する巡回拡大体の単数になっている. また, この多項式の (X についての) 判別式は $n^n(4 - \omega_n^2)^{(n-1)(n-2)/2}(t^2 - \omega_n t + 1)^{n-1}$ という簡明な式で与えられている. さらにこの n 次巡回多項式を用いて, 対応する n 次巡回体の各部分体の定義多項式を与えている.

定理 3. 上記の n 次巡回多項式の生成する n 次巡回体に対して, その $k_n^+(t)$ 上 d 次の部分体は

$$(\zeta_n^{-1} - \zeta_n)^{-1}((\zeta_n^{-1} - t)(X - \zeta_n)^d - (\zeta_n - t)(X - \zeta_n^{-1})^d) \in k_n^+(t)[X]$$

によって与えられる.

実代数体上の巡回拡大は従来のアプローチが困難とされる研究対象である. 以上の性質は, これら巡回体の数論的性質が与えられた巡回多項式によって具体的に研究できることを示している. ここで与えられる巡回多項式は n が偶数の場合 k_n^+ 上生成的にはならないが, 次章ではこの結果を用いて k_n^+ 上生成的な巡回多項式を構成している.

3. Generic families of cyclic and dihedral polynomials with even degree

ここでは $n \geq 4$ を偶数とし, 位数 $2n$ の二面体群 $\mathcal{D}_{2n}$ 及び位数 n の巡回群 $\mathcal{C}_n$ に対する k_n^+ 上の生成的多項式を構成する. まず, 前章の結果を利用して $\mathcal{D}_{2n}$ に対する線型ネーター問題の肯定解を具体的に求める.

定理 4. 偶数 $n \geq 4$ に対して $\alpha_n, \beta_n \in \mathrm{Aut}_{k_n^+} k_n^+(x_1, x_2)$ を $\alpha_n := (x_1 \mapsto x_2,\ x_2 \mapsto -x_1 + \omega_n x_2)$, $\beta_n := (x_1 \mapsto x_1,\ x_2 \mapsto \omega_n x_1 - x_2)$ で定めると $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle \cong \mathcal{D}_{2n}$ であり, 不変体 $k_n^+(x_1, x_2)^{\langle \alpha_n, \beta_n \rangle}$ は k_n^+ 上 $(x_1^2 - \omega_n x_1 x_2 + x_2^2)^{n/2}((x_1 - \zeta_n x_2)^{n/2} - (x_1 - \zeta_n^{-1} x_2)^{n/2})^{-2}$ と $((x_1 - \zeta_n x_2)^{n/2} - (x_1 - \zeta_n^{-1} x_2)^{n/2})^2 (x_1^2 - \omega_n x_1 x_2 + x_2^2)^{-(n-2)/2}$ によって生成される.

この結果から $\mathcal{D}_{2n}$ に対する k_n^+ 上の生成的多項式を求めることができる.

定理 5. $n \geq 4$ を偶数とすると

$$F_n(t_1, t_2; X) := X^n + \sum_{j=1}^{(n-2)/2} B(n, j)(t_1 t_2)^j X^{n-2j} - (\omega_n^2 - 4) t_1^{(n-2)/2} t_2^{n/2} \in k_n^+(t_1, t_2)[X]$$

は $\mathcal{D}_{2n}$ に対する k_n^+ 上の生成的多項式である. ただし $B(n, j) := \binom{n-j-1}{j-1} + \binom{n-j}{j}$ とする.

有理函数体 $k(t)$ 上有限群 G をガロア群に持つモニックな多項式を $F_G(t;X) \in k(t)[X]$ とする. $F_G(t;X)$ は「G の任意の部分群 H に対して, 任意の H-ガロア拡大 M/K ($K \supset k$, $\#K = \infty$) が $F_G(t;X)$ からパラメーターの特殊化によって得られる」という条件を満たすとき「G に対する k 上の降下生成的多項式」と呼ばれる. G. Kemper は生成的多項式が常に降下生成的であることを示した (2001). 当研究では G に対する (線型ネーター問題の肯定解から生じる) 生成的多項式からその部分群 H に対する生成的多項式を具体的に得る方法を一般的に与えた. この結果は単に生成的多項式を求めるだけではなく, 降下生成性という新しい概念に初めて具体的な研究手法を導入したという点においてこれまでの生成的多項式の研究には無い特徴を持っている. 本章ではこの結果を用いて偶数次巡回群 $\mathcal{C}_n$ に対する k_n^+ 上の生成的多項式を上記定理から導いた.

定理 6. $n \geq 4$ を偶数とするとき, $F_n(t_1^2 - \omega_n t_1 + 1, t_2; X) \in k_n^+(t_1, t_2)[X]$ は $\mathcal{C}_n$ に対する k_n^+ 上の生成的多項式である.

この結果は従来のクンマー理論に対してその基礎体を k_n^+ に降下させることが偶数次の場合でも可能であることを示しており, 同理論の二次元化に相当する.

4. Generic polynomials for some towers of 2-groups

本章では重要な (巡回群, 二面体群以外の) 2-群の系列として一般四元数群 $\mathcal{Q}_{2^{n+1}}$, モジュラー型 2-群 $\mathcal{M}_{2^{n+2}}$, 準二面体群 $\mathcal{QD}_{2^{n+1}}$ (各添字は位数) 及びそれらの定義の拡張として得られる有限群を取り上げ, 各系列に属する (パラメーター付けされた) 有限群全体に対して生成的多項式を統一的に構成している. その結果は膨大なものであるため, 一例として $\mathcal{Q}_{2^{n+1}}$ 及び $\mathcal{M}_{2^{n+2}}$ についての結果を記すにとどめる.

定理 7. 整数 $n \geq 2$ について

$$X^{2^{n+1}} - t_1(t_1t_2)^{2^{n-1}}(t_1^2-4)^{-2^{n-2}}X^{2^n} + (t_1t_2)^{2^n}(t_1^2-4)^{-2^{n-1}} \in k_{2^n}(t_1,t_2)[X]$$

は $\mathcal{Q}_{2^{n+1}}$ に対する k_{2^n} 上の生成的多項式である.

定理 8. $n \geq 1$ を整数とし $\Phi^+(Y)$ を $2\cos(2\pi/2^{n+1})$ の $\mathbf{Q}$ 上最小多項式とする. このとき

$$X^{2^{n+1}} + (\Phi^+(t_1)-2)t_2X^{2^n} - (\Phi^+(t_1)-2)t_2^2 \in k_{2^n}(t_1,t_2)[X]$$

は $\mathcal{M}_{2^{n+2}}$ に対する k_{2^n} 上の生成的多項式である.

また上記の系列に現れる各 2-群に対して降中心列等の正規列を考え, その各 layer に対する生成的多項式間の関係を前章で構築した降下生成性の理論を用いて明らかにしている.

5. Generic polynomials for small groups

本章では位数の比較的小さい有限群に対する生成的多項式に関するデータを, 対応するネーター問題に関するデータを含めて詳細に記述している. 特に位数が 16 以下の有限群に対しては, その殆んど全てについて生成的多項式の構成が当研究の方法によって成功している. また本章の結果には, 一般には肯定解の存在証明が難しい 3 次元以上の次数に対する線型ネーター問題に対するものも含まれている. このように生成的多項式に関する詳細なデータを網羅的にまとめたものは当論文が初めてである.

当研究では計算代数幾何学を援用した現代的な不変式論を全般にわたって有効に用いており, 計算機による不変式等の具体的計算に関するデータ (プログラム・アルゴリズム等) についてもその詳細を記述している.