

## 2017 年度 修士論文

# シーケンス情報を用いて 幾何学の手書き解答データを 解答パターンに分類する手法

提出日： 2018 年 1 月 30 日

指導： 山名 早人 教授

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科

情報理工・情報通信専攻

学籍番号： 5116F085-4

森山 優姫菜

# 概 要

近年、論理的思考力の育成が初等教育から重要視されてきている。従来から論理的思考力の育成には数学が大きな役割を担っている。しかし、論理的思考力の育成を目指していても、義務教育中に論理的思考力自体を測る機会ほとんどないのが現状である。そこで、本研究では、幾何学を対象とした論理的思考力判定の初期段階として、手書き解答データを解答パターンに分類する手法を提案する。具体的には、19人の被験者に3題の幾何学問題を解答してもらい、事前に想定していた2～3種類の解答への自動分類を試みた。手法としては、SVMで、手書きから得られるストロークデータを用い、分類を行った。しかし、手書き解答データ数の少なさから、本来の目的であった解法の分類は困難であった。そこで、問題1～3の正解した手書き解答データを合わせたものの中から「勘で解いたかどうか」の分類を行ったところ、SVMを用いて0.83の正解率を得た。

# 目次

第 1 章	はじめに .....	1
第 2 章	関連研究 .....	3
2.1	論理的思考力に関する研究 .....	3
2.2	手書き文字認識をする研究 .....	3
2.3	図形問題に関する研究 .....	4
2.4	まとめ .....	4
第 3 章	手書き解答データ収集方法について .....	6
3.1	データ収集アプリケーション .....	6
3.2	図形問題の調査 .....	9
3.2	予備実験 .....	9
3.2.1	予備実験の方法 .....	9
3.2.2	予備実験の結果 .....	13
3.3	本実験 .....	14
3.3.1	本実験の方法 .....	14
3.3.2.1	被験者への説明 .....	14
3.3.2.2	アンケート .....	19
3.3.2.3	本実験で用いた問題 .....	22
3.3.2	本実験の結果 .....	24
3.3.2.1	手書き解答データの分析 .....	24
3.4	図への書き込みの種類 .....	26
3.5	解答に使われた定理や図形の調査 .....	26
第 4 章	幾何学解答分類の手法と評価 .....	31
4.1	特徴量抽出方法 .....	31
4.2	分類方法 .....	34
4.3	評価 .....	35
第 5 章	まとめ .....	45

## 第1章 はじめに

平成 28 年 4 月，文部科学省に「小学校段階における論理的思考力や創造性、問題解決能力等の育成とプログラミング教育に関する有識者会議」が設置[1]され，初等教育の段階から論理的思考力や創造性，問題解決能力等の育成が重要であることが示された．こうした論理的思考力の育成においては，プログラミング教育だけでなく，従来から数学が大きな役割を担っている．中学校指導要領・数学[2]においても「図形の相似，円周角と中心角の関係や三平方の定理について，… 理解し，… 図形について見通しをもって論理的に考察し表現する能力を伸ばす」と示されている通り，幾何学は論理的思考力の育成を掲げている．

しかし，義務教育に数学の試験はあるものの論理的思考力として測る機会はない場合が多く，生徒がどれほどの論理的思考力を持っているのかが分からない状況である．加えて，論理的思考力を数学で測るためには，生徒の思考過程(解法)を判断する必要がある．従来，数学の採点では教育者が生徒の解答から目視で思考過程を判断していたが，幾何学等の図形を扱った問題では式を書かずに図を描くだけで答えを導く場合もあるため，目視で思考過程を判断するのは困難である．

一方，近年では教育現場のデジタル化が進み，情報共有の方法の幅が広がった．具体的には，小学校から大学までの講義にタブレット端末や電子ペンを導入することで生徒の解答をデータとして扱いやすくなった．また，従来は対面での教育が普通であったが，最近ではオンライン上で教育を行う機会も得られるようになった．例えば，オンライン上で無料講義が受けられる MOOC(massive open online course)として代表的な早稲田大学も参画している edX[3]をはじめ，Coursera[4]，日本では JMOOC[5]などがある．これらは，オンライン上で講義も試験も行うため，受講者の解答はデジタル化されて管理されることになる．

このように，デジタル化した手書きデータを扱う機会が増えたことで，解答データを自動で採点し分析できるようになった．例えば，教育者の負担を減らすための採点システムが複数の企業により開発されてきている[6][7]．しかし，現在開発されているのは解答の正誤のみの採点であることが多く，解答過程を分析し解法を明かにできているものは存在していない．

そこで，本研究では，幾何学図形問題を対象に，手書き解答データのシーケンス情報を用いて生徒の解法を推定し解答パターンに分類することを試みる．これによって，学習者の論理的思考力を判断できる仕組みを構築することを目指す．本研究では，幾何学図形問題の初段階として，解答に式を書くことが必須でない「角度を求める問題」を対象とする．また，本研究での論理的思考力の定義は，「正解への見通しをもって筋道を立てて考えることができること(素早く解ける)」と「問題解決法を考えたあと，自分の考えを検討

しよりよい考えを構成することができるか(応用力)」とする．入力としては，時系列の手書きデータ(オンライン手書きデータ)を収集できる iPad Pro と Apple Pencil を用いる．

なお，論理的思考力に関する研究においては，プログラミング教育から論理的思考力の育成を試みた研究[8]や数学教育から論理的思考力の育成を試みた研究[9]など，論理的思考力の育成に関する研究は多い．しかし，我々が調べた限り，論理的思考力を測る研究は存在しない．また，手書きデータを活用した研究では，手書き文字認識をする研究[10][11]や図形問題の手書き解答データを扱っている研究[12][13]などがあるものの，解答分類を行う研究や論理的思考力の測定に生かすことを目的とした研究は存在していない．

以下，第 2 章で関連研究をまとめ，第 3 章で図形問題の問題に関する調査について説明し，第 4 章で提案手法と評価について考察を行い，最後に第 5 章でまとめを述べる．

## 第2章 関連研究

本章では，論理的思考についての研究と手書きデータを扱っている研究について述べる．

### 2.1 論理的思考力に関する研究

プログラミング教育から論理的思考力の育成を試みた Dennis らの研究[8]がある．

Dennis らはタンジブルユーザインタフェースを利用して物理的なブロックによるプログラミングが可能な初心者向けプログラミング学習システムを開発した．本システムは迷路を題材としており，迷路のゴールまでの手順を，ブロックを用いてプログラミングすることで順次処理について学ぶことができる．また，作成するプログラムに条件を与えることでプログラミングに必要となる論理的な思考力を身につけることができる．

数学教育から論理的思考力の育成を試みた Carina らの研究[9]がある．Carina らは EMATIC プロジェクト(Mathematics Education through ICT)という教育困難な子供向けに数学演算を教えるマルチデバイスのインテリジェントなチュートリアルシステムを開発した．本システムは，論理的思考と基本的な数学とは違う面を学習することが目的である．

しかし，Dennis らと Carina らの研究は論理的思考力の育成に関する研究であり，論理的思考力を測る研究は，我々が調べた限りでは存在しない．

### 2.2 手書き文字認識をする研究

手書き文字認識に関する例として坂東らの研究[10]がある．坂東らは，文字記入枠のない枠なし手書き認識方式における誤認識の訂正インターフェースと認識結果を表示するインターフェースを提案した．この論文では，各文字の誤認識訂正方法，文字区切り位置の訂正方法，認識結果の表示方法を複数提示し，比較実験を行った．結果として，各文字の誤認識訂正は，訂正候補を手書き文字の上にメニュー表示し選択させる方法が良いこと，文字分割操作は区切りジェスチャ，文字結合操作は小さい文字の場合囲みジェスチャ，大きい文字の場合は接続ジェスチャが適切であることが示された．

数式の認識を目的とした研究として，Eugene らの研究[11]がある．Eugene らは，手書きの難しい数式を簡約する新しいインターフェース，マスボックスがある．複雑な数式から上付き文字や下付き文字，分数などの副次式を判別し，バウンディングボックスを生成した．ユーザ評価として簡単な式においては既存の手法のほうが好まれたが，複雑な式においては本手法が好まれる傾向にあった．まだ誤判定があったりや特定の式のみの対応となっているため，今後あらゆる式に対応させていくと述べられている．

## 2.3 図形問題に関する研究

幾何学証明における手書き解答に関する例として Yingying らの研究[12]がある。

Yingying らは効率的に手書きの図と文字を認識し正確に図の部分と証明ステップを対応させることができるペンベースの幾何学証明システムを提案した。さらに、ユーザが証明の過程を理解できるよう動的で知的な視覚ヒントを作り、ストロークではなくストラクチャーベースで証明のスクリプトと図の一部を操作できるようにした。Yingying らが用いた図の認識方法は、まずストロークをサンプリングし、ターニングポイントによってサブストロークに分けた。ターニングポイントとは、ある点  $P_i$  とその両隣( $P_{i-1}, P_{i+1}$ )を結ぶ線の間の角度  $\theta$  が閾値より小さいときに、ある点  $P_i$  のことを表す。次に、分けたサブストロークが点・線・円のどれかを判別した後、サブストローク同士を結合させた。これによって、手書きの図を認識した。

物理学における手書き解答に関する例として Salman らの研究[13]がある。Salman らは、描かれた物理の図形を識別しアニメーションする方法を提示した。出題問題からシナリオと必要条件を理解し、この情報と生徒の手書き解答のコンピュータモデルを合わせる手法を使った。また、出題問題の領域を識別するために自然言語処理を用いた。これにより、生徒は自身の解答を使って挙動アニメーションができ、Salman らは生徒の解答をチェックする新しいアルゴリズムを表現した。また、Salman らは、ユニストローク(円・多角形・ポリライン・螺旋・線)とマルチストローク(矢・点線・インターバル・滑車)をヒューリスティックに判別することで図を認識した。

## 2.4 まとめ

2.1 から 2.3 項で述べた論理的思考についての研究と手書きデータを扱っている研究をまとめたものを表 1 に示す。

表 1 関連研究のまとめ

提案者	研究内容	目的	対象データ
Dennis ら[8]	フィジカルプログラミングを用いた初心者向けプログラミング学習システムの開発	論理的思考力の育成	

Carina ら[9]	数学演算を教えるマルチデバイスのインテリジェントなチュートリアルシステム	論理的思考力と基本的な数学とは違う面の学習	
坂東ら[10]	文字記入欄なしの手書き文字認識をするインターフェースの提案	自然な手書き入力促進	手書き文字データ
Eugene ら[11]	手書きの数式を簡約するインターフェースの提案	デジタル上での数式の入力の難しさの改善	手書きの数式データ
Yingying ら[12]	幾何学証明システムの提案	生徒の学習の向上	生徒の手書き証明解答データ
Salman ら[13]	物理学の問題における手書き解答データの図の認識とアニメーションシステムの提案	知的個別指導システムの向上	手書きの物理学解答データ



## 第3章 手書き解答データ収集方法について

本章では，自動分類で扱うデータの収集方法を述べる．3.1 項でデータを収集するために作ったアプリケーションの説明をし，3.2 項で出題する図形問題の選択方法を，3.3 項で実際に行った被験者実験について説明し，3.4 項にて図への描き込みの種類について分析し，3.5 項にて解答に使われた定理や図形について述べる．

### 3.1 データ収集アプリケーション

手書き解答データを収集するために iPad Pro 上で動作するアプリケーションを作成した．アプリケーションには 2 画面ある．1 つ目は図 1 のメニュー画面であり，二つ目は図 2 の問題解答画面である．画面の遷移について図 3 に示す．それぞれの画面について説明をする．

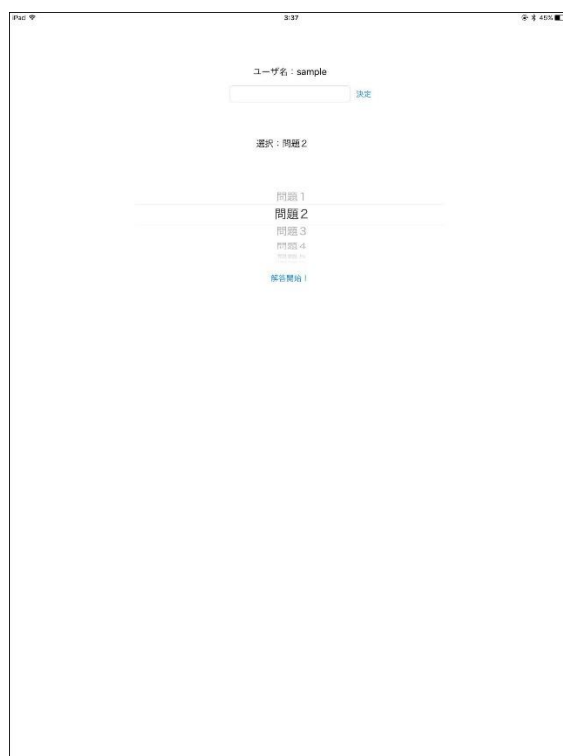


図 1 アプリケーションのメニュー画面

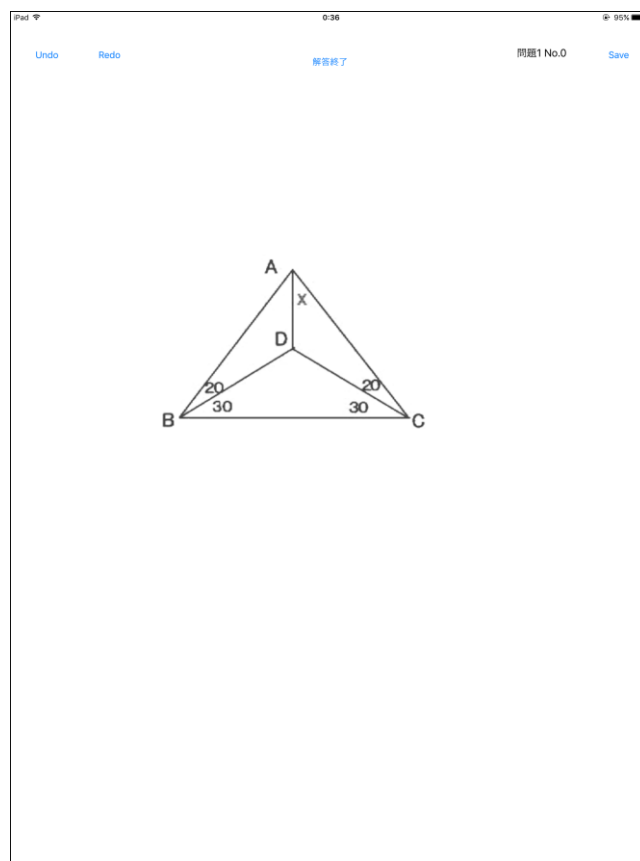


図 2 アプリケーションの問題解答画面例(問題 1)

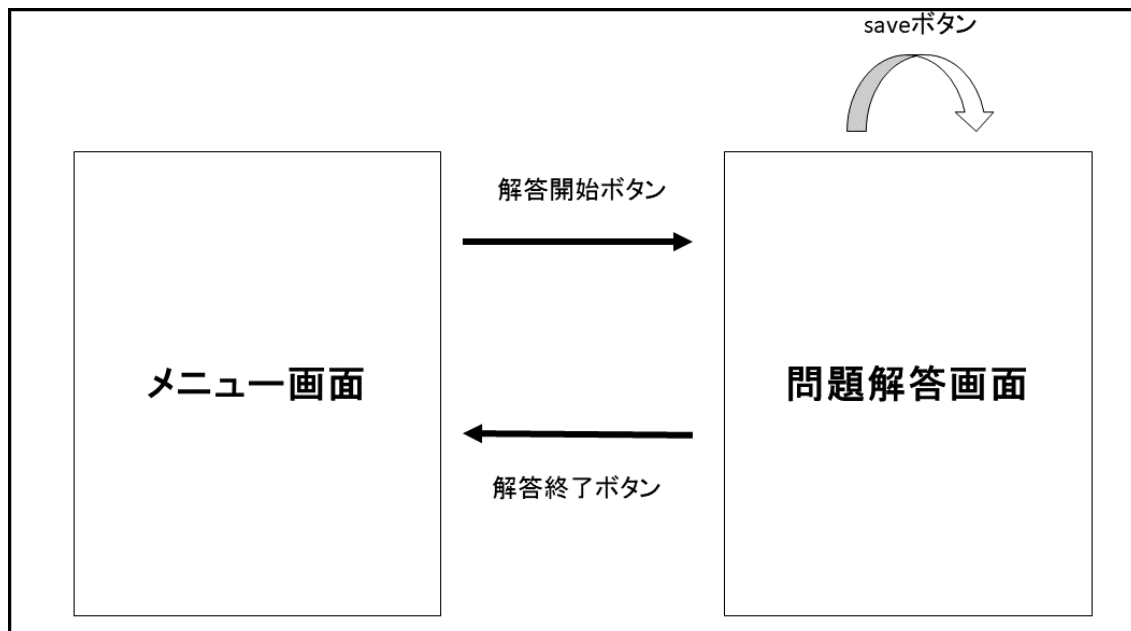


図 3 アプリケーションの画面遷移図

## メニュー画面(図 1)

ユーザ名をキーボード入力し、複数ある問題の中から解く問題を選択する画面である。「解答開始」ボタンを押すと問題解答画面に遷移する。

## 問題解答画面(図 2)

出題された問題図が中央に表示されている画面である。ユーザは Apple Pencil を用いて画面上を自由に描画することができる。ユーザが描写した線は青色で表示される。また、右上には現在が何ページ目の問題解答画面かが表示されている。

「undo, redo」ボタンは現在から前後に 5 つのストロークだけ元に戻したり繰り返したりすることができる。「Save」ボタンは現在描画中の問題解答画面を保存し、何も描かれていない新しい問題解答画面に遷移する。「解答終了」ボタンを押すと問題回答画面は保存され、メニュー画面に遷移する。

次に、本アプリケーションで収集するデータについて説明する。本アプリケーションでは、1 つの問題に対して 2 種類の JSON ファイルでデータが出力される。収集するデータ例 1 を図 4 に、データ例 2 を図 5 に示す。

```
1 [{"stroke":{"page":0,"time":"1507315072557","question":1,"force":0,"user":"sample","x":272,"y":787,"pointNum":0},{"page":0  
2 [{"stroke":{"page":0,"time":"1507315076383","question":1,"force":0,"user":"sample","x":465.5,"y":581,"pointNum":0},{"page"  
3 [{"stroke":{"page":0,"time":"1507315078055","question":1,"force":0,"user":"sample","x":453.5,"y":592,"pointNum":0},{"page"  
4 [{"stroke":{"page":0,"time":"1507315081372","question":1,"force":0,"user":"sample","x":542.5,"y":501,"pointNum":0},{"page"  
5 [{"stroke":{"page":0,"time":"1507315081915","question":1,"force":0,"user":"sample","x":554,"y":542,"pointNum":0},{"page":0
```

図 4 収集データ例 1

```
1 {"action":"start","time":"1507645248701"}  
2 {"action":"change","time":"1507645250794"}  
3 {"action":"change","time":"1507645252084"}  
4 {"action":"change","time":"1507645253537"}  
5 {"action":"end","time":"1507645255951"}  
6  
7
```

図 5 収集データ例 2

## 収集するデータ 1 (図 4)

問題ごとにそれぞれの座標に対して、以下の 8 項目をストローク毎に管理する。1 ストロークが 1 行になるように出力される。

1. ユーザ名
2. ページ番号
3. 問題番号
4. 描画された時間
5. ペンの圧力

6. x 座標
7. y 座標
8. 1 ストローク内の座標の順番

## 収集するデータ 2 (図 5)

問題ごとに解答画面の時間を管理する。以下の 2 項目を収集する。

1. アクション
2. 時間

アクションは 3 種類ある。

Start : 「解答開始」ボタンが押され、解答が開始された時間

Change : 「save」ボタンが押され、問題解答画面が新しくされた時間

End : 「解答終了」ボタンが押され、解答が終了された時間

## 3.2 図形問題の調査

図形を使った問題には、多種多様なものがある。たとえば、面積・体積を求めるものや、角度・辺の長さを求めるもの、証明するものなどである。本研究の目的は数式ではなく図形への書き込みによって解答パターンを分類させることなので、図への書き込みが多い問題がふさわしい。そこで、式を使わずに解ける角度の問題を選択した。

角度を求める問題で解答パターンを分類するためには、複数の解答方法がなければならない。そこで、図形問題特有の補助線に注目し、分類するためには複数パターンの補助線の引き方がある問題が適切だと考えた。本研究で分類する問題を決めるために、1 回の予備実験を行った。3.3 に予備実験を、3.4 に本実験について述べる。

## 3.2 予備実験

### 3.2.1 予備実験の方法

第 1 段階として、スウガクとくガウス[14]から図 6,7,8,9,10,11,12 の 7 問を選択した。問題設定としては、補助線を使って複数解法があることが前提で、今回は特に三角形に注目して解く問題に絞った。問題の順番は、解答者が解きやすいよう著者が簡単だと思った順に並べている。特に問題 1,2 は幾何学の問題に慣れてもらうために簡単になっている。

データ収集の方法として、大学生の被験者 5 名に iPad Pro のアプリケーション上に Apple Pencil を使って解いてもらった。このとき、制限時間はない。

問題 1

点  $A$  を頂角とする二等辺三角形  $\triangle ABC$   
 $\angle CAD$  を求めよ

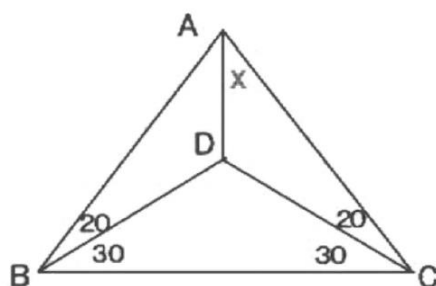


図 6 予備実験問題 1 ([14]を基にトレース)

問題 2

四角形  $ABCD$  は正方形で、 $\triangle QAD$  は正三角形として、  
 $\angle Y$  を求めなさい。

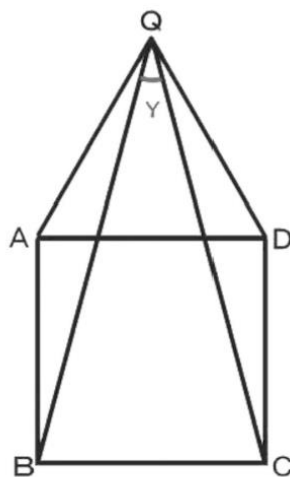


図 7 予備実験問題 2 ([14]を基にトレース)

問題 3

正方形  $ABCD$  の  $BC$  を底辺とし、図のような  
 $\angle BQC = 30^\circ$   
 の二等辺三角形  $BQC$  があるとき  
 $\angle AQD$  は？

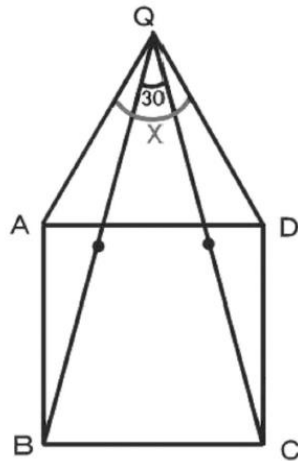


図 8 予備実験問題 3 ([14]を基にトレース)

問題 4

正方形  $ABCD$  において、  
 $BC$  上の点  $E$ 、 $DC$  上の点  $F$  は  
 $\angle DAF = 15^\circ$ 、 $\angle BAE = 30^\circ$   
 をみたすとき、  
 $\angle AFE$  の大きさを求めよ。

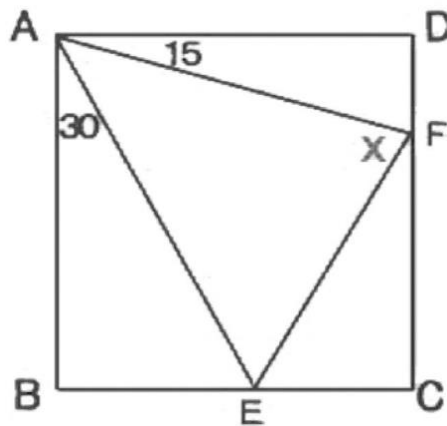


図 9 予備実験問題 4 ([14]を基にトレース)

問題 5

$\triangle ABC$ において  
 $AB=2$ 、 $AC=1$   
 とし、 $\angle BAC$ の二等分線と辺  $BC$ の交点を  $D$ とする。  
 $AD=BD$   
 となるとき、 $\angle B$ の大きさを求めよ。

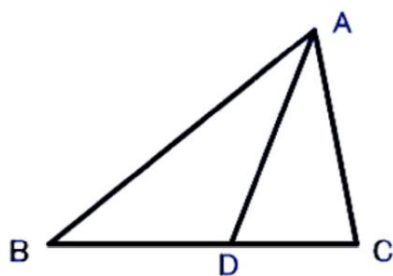


図 10 予備実験問題 5 ([14]を基にトレース)

問題 6

$AB=DC$ として、  
 $\angle ACD$ を求めなさい。

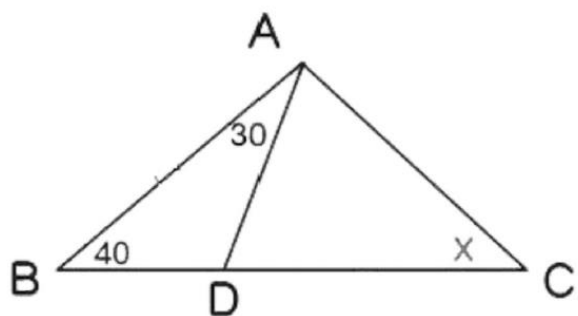


図 11 予備実験問題 6 ([14]を基にトレース)

問題 7

$\angle BAC = 45^\circ$   
 $\angle ACB = 45^\circ$   
 $\angle DAC = 30^\circ$   
 $\angle ACD = 105^\circ$   
 $\angle ADB$  は？

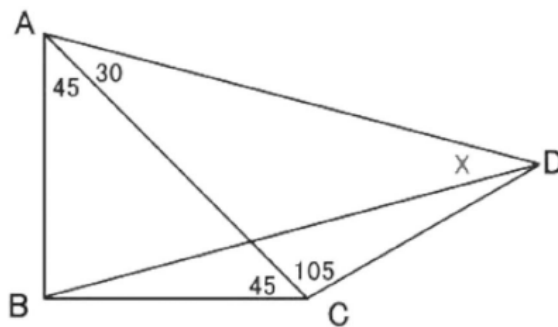


図 12 予備実験問題 7 ([14]を基にトレース)

### 3.2.2 予備実験の結果

大学生の被験者 5 名による解答結果を表 2 に示す。

問題 1,2 に関しては，図形問題に慣れてもらうために簡単な問題に設定したため，全員が正解できている。問題 3,5,7 に関しては 2 パターン以上の解法に分かれたため，本実験で使う問題は問題 3,5,7 に決定した。

表 2 予備実験の正誤結果

問題	正解率
1	100%
2	100%
3	80%
4	0%
5	40%
6	0%
7	60%



### 3.3 本実験

#### 3.3.1 本実験の方法

被験者として、早稲田大学生 19 名(男性 11 名女性 8 名)を集め、幾何学の問題 3 問を解いてもらった。実験の内容は、実験概要・アプリケーションの説明→数学解答データ収集→アンケートの記入の三段階で行った。

##### 3.3.2.1 被験者への説明

実験の前に被験者に以下の点を説明した。実験説明時に被験者に見せたものを図 13,14 に示す。公式集を図 15,16,17,18,19,20 に示す

1. 問題は 3 問ある。各問題の制限時間は 13 分とする。ただし、早く解き終わった場合はその時点で解答をやめ、次の問題へと進む。
2. 問題用紙は別紙で用意してあるが、問題用紙には何も記入しない。
3. 問題の解答はすべて iPad 上で Apple Pencil を用いて行ってもらう。
4. 別紙にて公式集を用意してある。解答の参考にしても良い。ただし、この公式集には解答に関係ない公式も含まれている。
5. 問題解答画面には問題図と同じ図が中央に載せてある。
6. 問題解答画面では自由に描き込み、解答をやり直したいときに「save」ボタンを押して新しい解答画面に遷移する。
7. 問題解答画面では、できるだけ思考過程のデータを取りたいので「redo, undo」ボタンはむやみに使用せず、「save」ボタンを使って新しい問題解答画面を使うこと。
8. 式は自由に記入して構わない。答えは見て分かるように記述すること。

問題一問ごとの実験の流れを以下に示す。

1. 被験者がメニュー画面にユーザ名を入力する。
2. 被験者がメニュー画面で問題選択をする。
3. 被験者がメニュー画面の「解答開始」ボタンを押す。
4. 問題解答画面上に解答する。
5. 被験者が解答を完了した場合もしくは制限時間(13 分)に達した場合、問題解答画面上の「解答終了」ボタンを押す。

## 実験内容

全行程：一時間

### ①説明タイム（約5分）

- 実験概要説明
- アプリケーション説明

### ②問題解答タイム（39分）

- 問題1（13分）
- 問題2（13分）
- 問題3（13分）

### ③実験アンケート（6分）

- 解き方アンケート（5分）
- やり方アンケート（1分）

### ④事務手続き（5分）

- 被験者実験リストに名前・判子（2分）
- 解いた紙に名前・判子（3分）  
（※解答してもらった画面を印刷するのに時間がかかる場合があります。  
自由に過ぎていてください）

図 13 実験説明

## アプリケーション説明

### 【アプリケーションの開き方】

iPad Pro の電源をつける（iPad 右上のボタン）  
パスワード：123456  
ツバメのアイコンのアプリを開く  
問題の sample を選択し、自由に書いてみてください。

### 【アプリケーションの使い方】

画面内は自由に書いたりボタン押したりなど試して構いません。  
問題文は別紙で用意していますが、アプリの画面中央に問題図があります。

左上のボタン：undo、redo は5回分だけ「元に戻す」「次に進む」が使えます  
右上のボタン：save は新しいページに切り替えます  
真ん中のボタン：「解答終了」はその問題の解答を終了します。

解答できた→即解答終了ボタンを押す

解答できない→制限時間が来たら解答終了ボタンを押す

### 【問題の解き方】

どのように問題を解いたかを知りたいので、  
できるだけ redo、undo を使わずに、新しいページ(save ボタン)を存分に使って  
解答してください。

（undo、redo は「線が曲がってしまった」などで使ってください）  
時間内であっても解き終わったら「解答終了ボタン」を押してください。  
解答終了ボタン押したら、手を上げて教えてください。

図 14 アプリケーション説明

公式集（ここに載っている公式を使うか使わないかは自由です）

#### 錯角・同位角・対頂角

2つの直線が平行のとき、錯角・同位角の関係にある角度は等しい。また、2つの直線が交わる時、向かい合っている角度は等しくなる。

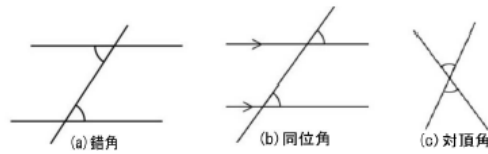


図 1 錯角・同位角・対頂角

#### 正弦定理

$\triangle ABC$  において  $BC=a$ ,  $CA=b$ ,  $AB=c$ , 外接円の半径を  $R$  とすると、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

#### 余弦定理

$\triangle ABC$  において、 $a=BC$ ,  $b=CA$ ,  $c=AB$ ,  $\alpha=\angle CAB$ ,  $\beta=\angle ABC$ ,  $\gamma=\angle BCA$  としたとき、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

## 図 15 公式集 1

#### 三角形の内角の和

三角形での式は  $a+b+c=180$  となる。

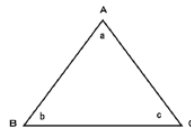


図 2 三角形

#### 多角形の内角の和

$n$  角形の内角の和は、 $180^\circ \times (n-2)$

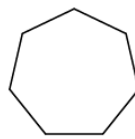


図 3 多角形

#### 円周角の定理

円があるとき、同じ弧に対する円周角は等しい。

また、中心角と円周角の関係として、ひとつの弧に対する円周角は、同じ弧に対する中心角の半分に等しい。

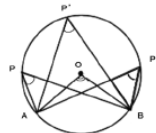


図 4 円周角の定理

## 図 16 公式集 2

#### 内接四角形の定理

円に内接する四角形の向かい合う内角の和は  $180^\circ$  に等しい。

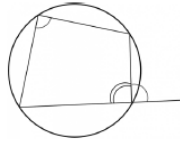


図 5 内接四角形の定理

#### 接弦定理

円の接線とその接点を通る弦の角は、その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。

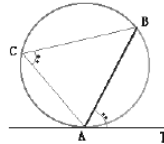


図 6 接弦定理

#### 角の二等分線の定理

$$AB \cdot AC = AD \cdot CD$$

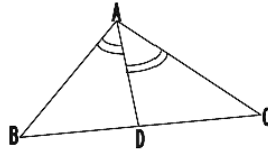


図 7 角の二等分線の定理

## 図 17 公式集 3

#### 中線定理

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

※  $BD = CD$  でもよい

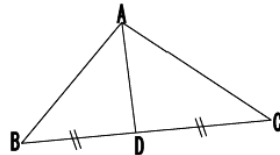


図 8 中線定理

#### 正三角形

3 辺が等しい三角形のこと。正三角形の 3 つの角度は等しい。

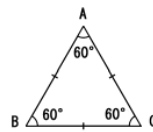


図 9 正三角形

#### 二等辺三角形

3 辺のうち 2 辺の長さが等しい三角形のこと。等しい 2 辺の間の角を頂角、それ以外を底角という。底角は等しい。



図 10 二等辺三角形

## 図 18 公式集 4

#### 直角三角形

3つの内角のうち他のどの角よりも大きい角は直角であること、直角以外の角のことを鋭角と呼ぶ、それらの和は直角に等しい、 $c$ を斜辺と呼ぶ、斜辺と他の2辺の関係はピタゴラスの定理と呼ばれる。

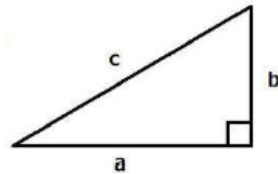


図 11 直角三角形

ピタゴラスの定理（直角三角形の三辺の長さの関係）

上記の図から、斜辺の長さを  $c$ 、他の二辺の長さを  $a, b$  とすると、

$$a^2 = b^2 + c^2$$

#### 三角形の合同条件

2つの三角形は次の各場合に合同である。

1, 3辺がそれぞれ等しい

$$AB=A'B'$$

$$BC=B'C'$$

$$CA=C'A'$$

2, 2辺とその間の角がそれぞれ等しい

$$AB=A'B'$$

$$BC=B'C'$$

$$\angle B=\angle B'$$

3, 1辺とその両端の角がそれぞれ等しい。

$$BC=B'C'$$

$$\angle B=\angle B'$$

$$\angle C=\angle C'$$

図 19 公式集 5

#### 三角形の相似条件

2つの三角形は次の各場合に相似である。

1, 3組の辺の比がすべて等しいとき

2, 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいとき

3, 2組の角が、それぞれ等しいとき

図 20 公式集 6

### 3.3.2.2 アンケート

2 種類のアンケートを行った。1 種類は「解き方アンケート」で、各問題でどのような解き方をしたかについて、被験者に自己評価してもらうためのものである。もう 1 種類は「実験のやり方アンケート」で、問題の難易度・時間配分・アプリケーションの描き心地等を問うためのものである。解き方アンケートの例と実際に書いてもらう用紙を図 21,22, に、実験のやり方アンケートを図 23 に示す。

解き方アンケートについては、問題解答画面の 1 画面ずつどのように解いたかを自由に記述してもらった。注意書きは以下の通りである。

=====

それぞれの問題に対して、

- ①それぞれのページでどういう意図で解いていったか（補助線、角度記入など）
  - ②特殊な図形を見つけて解いたか（正三角形、二等辺三角形等）
- を自分の解答用紙を見て思い出しながら簡潔に書いてください。

例)

問題 1

1 ページ目

とりあえず分かる角度を記入していった。  
辺 BC の二等分線を引いた。

2 ページ目

三角形 ADQ が正三角形だとわかったので解けた。

=====

実験のやり方アンケートについては、アンケート上に書いてある選択肢に丸をつけてもらった。質問と選択肢は以下の 6 項目である。

=====

Q1 問題を解く前に幾何学の公式の復習動画があるといいと思いますか？

はい                      どちらでもいい                      いいえ

Q2 各問題の難易度はどうでしたか？

問題 1 (13 分)	難しい	ちょうどいい	簡単
問題 2 (13 分)	難しい	ちょうどいい	簡単
問題 3 (13 分)	難しい	ちょうどいい	簡単

Q3 各問題の時間配分はどうでしたか？

問題 1 (13 分)    長い    ちょうどいい    短い

問題 2 (13 分)    長い    ちょうどいい    短い

問題 3 (13 分)    長い    ちょうどいい    短い

Q4 アプリケーションの書き心地はどうでしたか？

満足    特になにも思わない    不十分

Q5 Q4 で不十分とした方の理由（改善・追加した方がいい機能等）

（自由記述）

Q6 実験に対して何かあればお願いします。

（自由記述）

=====

アンケート

それぞれの問題に対して

①それぞれのページでどういう意図で解いていったか（補助線、角度記入など）

②特殊な図形を見つけて解いたか（正三角形、二等辺三角形等）

を自分の解答用紙を見て思い出しながら簡潔に書いてください。

例)

問題   1  

1 ページ目

とりあえず分かる角度を記入していった。

辺  $BC$  の二等分線を引いた。

2 ページ目

三角形  $ADQ$  が正三角形だとわかったので解けた。

図 21 解き方アンケート例

アンケート

ID:

実験日時:

問題\_\_\_\_\_

図 22 解き方アンケート(白紙)

実験やり方アンケート

Q1 問題を解く前に幾何学の公式の復習動画があるといいと思いますか？

はい      どちらでもいい      いいえ

Q2 各問題の難易度はどうでしたか？

問題 1 (13 分)	難しい	ちょうどいい	簡単
問題 2 (13 分)	難しい	ちょうどいい	簡単
問題 3 (13 分)	難しい	ちょうどいい	簡単

Q3 各問題の時間配分はどうでしたか？

問題 1 (13 分)	長い	ちょうどいい	短い
問題 2 (13 分)	長い	ちょうどいい	短い
問題 3 (13 分)	長い	ちょうどいい	短い

Q4 アプリケーションの書き心地はどうでしたか？

満足      特になにも思わない      不十分

Q5 Q4 で不十分とした方の理由 (改善・追加した方がいい機能等)

Q6 実験に対して何かあればお願いします。

図 23 実験やり方アンケート



### 3.3.2.3 本実験で用いた問題

この実験で用いた問題 3 種を図 24,25,26 に示す.

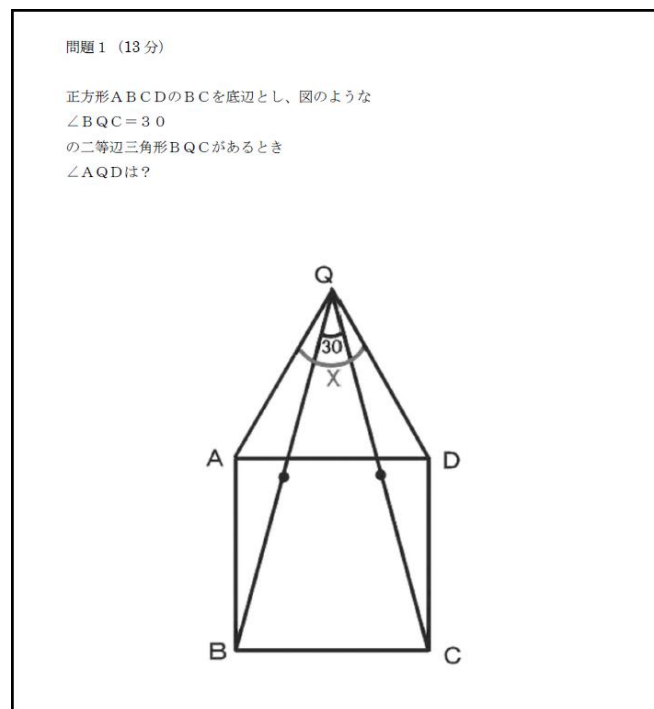


図 24 本実験問題 1

問題 2 (13 分)

$\triangle ABC$  において  
 $AB=2$ 、 $AC=1$   
 とし、 $\angle BAC$  の二等分線と辺  $BC$  の交点を  $D$  とする。  
 $AD=BD$   
 となるとき、 $\angle B$  の大きさを求めよ。

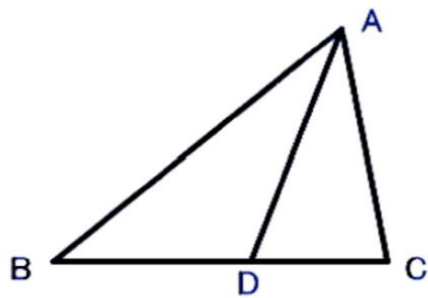


図 25 本実験問題 2

問題 3 (13 分)

$\angle BAC = 45^\circ$   
 $\angle ACB = 45^\circ$   
 $\angle DAC = 30^\circ$   
 $\angle ACD = 105^\circ$   
 $\angle ADB$  は？

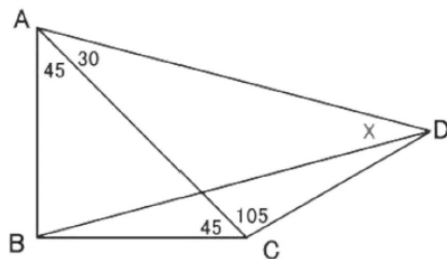


図 26 本実験問題 3

### 3.3.2 本実験の結果

#### 3.3.2.1 手書き解答データの分析

収集したデータから解答の正誤を表 3 にまとめた。

解き方アンケート結果から解法を調べたところ、正解者の中に論理的に考察して答えにたどり着かず勘で解答していると自覚している者が数名いた。正解者中の勘で解いた人の割合を表 4 に示す。勘の例としては、

「問題 1： $\triangle ADQ$  が正三角形だと思ったので  $\angle x$  は  $60^\circ$  だと思った」

「問題 1：もし  $AB=AQ$  なら  $\triangle ABQ$  は二等辺三角形なので  $\angle x$  は  $60^\circ$  だと思った」

など問題図から特殊な図形を予想し論理的に説明できずに答えを書いていた。ただし、問題 2 のみ勘が少ないのは、問題図自体が実際の角度・辺の長さと同じでないため、解答者は図形を予想しづらかったと考えられる。さらに、勘で解いている人は同じ人なのかどうか調べるために、表 5 に問題 3 つ中何個勘で解いているかを被験者の数でまとめた。表 5 から、同じ人が何度も勘で解いているわけではなく、どんな人も勘で解く可能性があることがわかった。

また、実験アンケート結果から出題問題の難易度・時間配分について表 6 に示す。時間配分においては、適切であったとわかる。難易度は難しく感じる人が多かった。

勘を除く正解者の解法パターンを問題ごとに表 7,8,9 に示す

表 3 本実験の正誤結果

問題	正解率	誤答	無解答
1	68%	0%	32%
2	32%	26%	42%
3	58%	0%	42%

表 4 正解中の勘の割合と数

問題	勘の割合	正解数	勘数
1	31%	13	4
2	17%	6	1

3	36%	11	4
---	-----	----	---

表 5 被験者の勘の数

	勘の数			
	0	1	2	3
被験者の数	11	7	1	0

表 6 出題問題に関するアンケート結果

問題	難易度			時間配分		
	難しい	ちょうどいい	簡単	長い	ちょうどいい	短い
1	63%	16%	21%	16%	74%	11%
2	42%	47%	11%	16%	68%	16%
3	74%	21%	5%	11%	74%	16%

表 7 問題 1 の解法

解法	個数
上部に四角形を作り外側の三角形に注目した	2
$\triangle ABQ$ と $\triangle DCQ$ が二等辺三角形に注目	7

表 8 問題 2 の解法

解法	個数
$\triangle ABC \sim \triangle DAC$	1
点 D から辺 AB に垂線	2
余弦定理	1
正弦定理	1

表 9 問題 3 の解法

解法	個数
三角比から $\triangle BCD$ が二等辺三角形	1
点 C から辺 AD に垂線を引き $\triangle BCD$ が二等辺三角形	3
点 C から辺 BD に垂線を引き $\triangle BCD$ が二等辺三角形	1
長方形を書いて外側の三角形に注目	2

### 3.4 図への書き込みの種類

予備実験と本実験で集めたデータから手書きの解答で行われている図への書き込みの種類を調査した．その結果，被験者が行った図への書き込みは以下のいずれかに当てはまることが分かった．また，図 27 に実際の例を示す．

- (a) 補助線を引く
- (b) 角度を記入する
- (c) 辺上へのマーク（平行・同じ長さ等）
- (d) 線の長さの比もしくは長さ

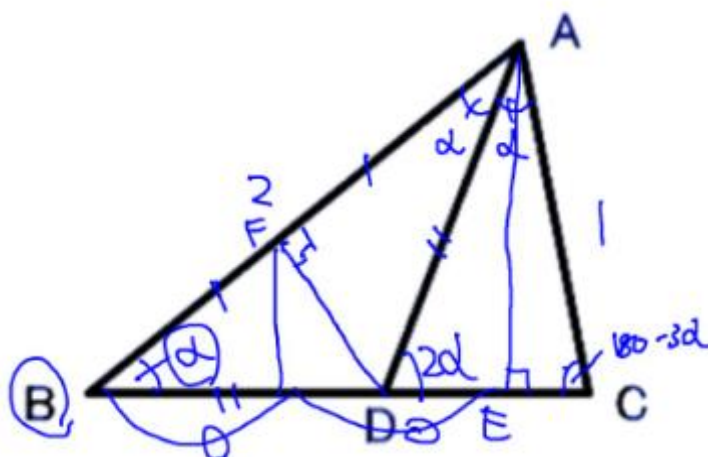


図 27 図への書き込み例

### 3.5 解答に使われた定理や図形の調査

実験にて解答を解くときに使われた定理や図形の調査を行った．その結果，主に使われた定理や図形は以下に当てはまることがわかった．

- (a) 錯角・同位角・対頂角

2つの直線が平行のとき，錯角・同位角の関係にある角度は等しい．また，2つの直線が交わる時，向かい合っている角度は等しくなる．

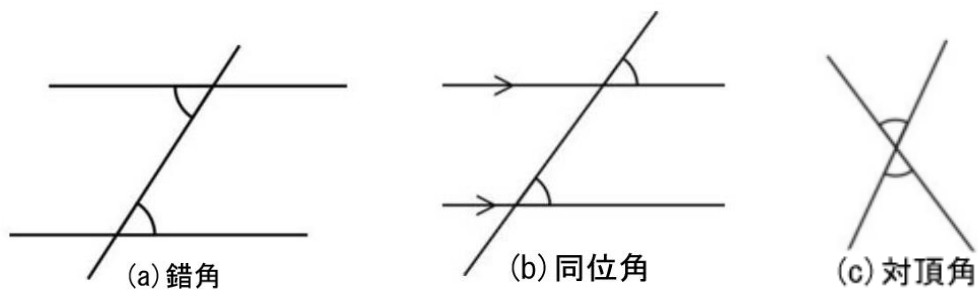


図 28 錯角・同位角・対頂角の図

(b) 正弦定理

△ABC において  $BC=a$ ,  $CA=b$ ,  $AB=c$ , 外接円の半径を  $R$  とすると、

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(c) 余弦定理

△ABC において、 $a=BC$ ,  $b=CA$ ,  $c=AB$ ,  $\alpha=\angle CAB$ ,  $\beta=\angle ABC$ ,  $\gamma=\angle BCA$  としたとき、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(d) 三角形の内角の和

三角形の内角の和は 180 度になる。

図 17 の三角形での式は  $a+b+c=180$  となる。

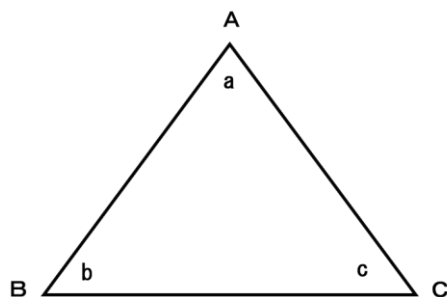


図 29 三角形の内角の和

(e) 多角形の内角の和

n 角形の内角の和は,  $180 \times (n-2)$  で表される.



図 30 多角形

(f) 角の二等分線の定理

$$AB : AC = BD : CD$$

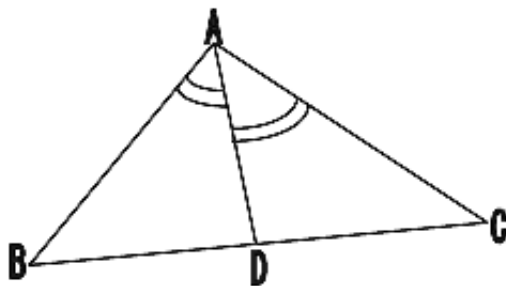


図 31 角の二等分線の定理

(g) 中線定理

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

※  $BD = CD$  でもよい

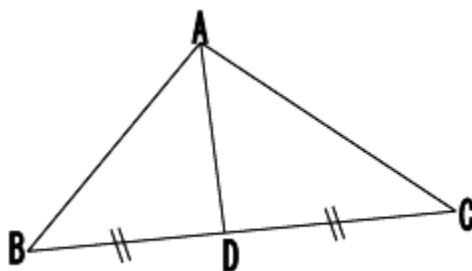


図 32 中線定理

(h) 正三角形

3 辺が等しい三角形のこと. 正三角形の 3 つの角度は等しい.

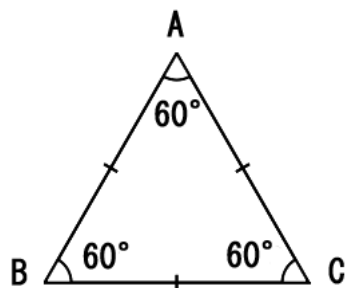


図 33 正三角形

(i) 二等辺三角形

3 辺のうち 2 辺の長さが等しい三角形のこと。等しい 2 辺の間の角を頂角，それ以外を底角という。底角は等しい。

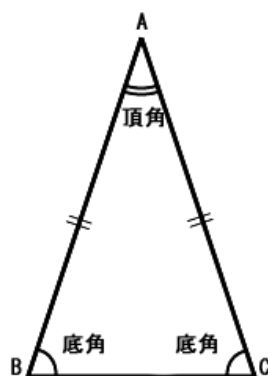


図 34 二等辺三角形

(j) 直角三角形

3 つの内角のうち他のどの角よりも大きい角は直角であること。直角以外の角のことを鋭角と呼ぶ。それらの和は直角に等しい。c を斜辺と呼ぶ。斜辺と他の 2 辺の関係はピタゴラスの定理と呼ばれる。

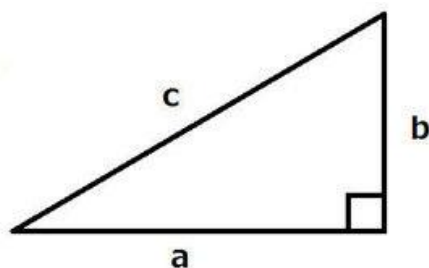


図 35 直角三角形

(k) ピタゴラスの定理 (直角三角形の三辺の長さの関係)



図 35 の図から，斜辺の長さを  $c$ ，他の二辺の長さを  $a, b$  とすると、

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(1) 三角形の相似条件

2つの三角形は次の各場合に相似である。

1. 3組の辺の比がすべて等しいとき
2. 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいとき
3. 2組の角が、それぞれ等しいとき

## 第4章 幾何学解答分類の手法と評価

本章では，収集した幾何学図形問題の手書き解答データを基に特徴量を抽出し，分類を試みた．特徴量抽出方法を 4.1 項で説明し，4.2 項で分類方法について述べる．4.3 項では分類結果を評価し考察する．

### 4.1 特徴量抽出方法

幾何学の手書き解答データをパターン分類するための特徴量抽出方法を述べる．

本研究では，3.1 項にて述べた収集したデータから，各問題の 1 人の解答データごとに以下の手書きデータ特徴量を設定した．

また，特徴量に関しては値のスケールを揃えるために分類器に入れる前に **z-score normalization** で正規化した．

1. 解答時間に関する特徴量
  - 全体の解答時間
2. ストロークの時間に関する特徴量
  - 書き始めるまでの時間
  - ストロークの時間間隔の総和
  - ストロークの時間間隔の最大値
  - ストロークの時間間隔の最小値
  - ストロークの時間間隔の標準偏差
3. ストロークの筆圧に関する特徴量
  - ストロークの筆圧の最大値
  - ストロークの筆圧の最小値
  - ストロークの筆圧の平均
  - ストロークの筆圧の標準偏差
4. ストロークの速度に関する特徴量
  - ストロークの速度の最大値
  - ストロークの速度の最小値
  - ストロークの速度の平均
  - ストロークの速度の標準偏差
5. 座標に関する特徴量
  - $n$  ブロックに分けたストローク内の座標の「画面の問題図の周囲を囲った  $m_x \times m_y$  のメッシュ」中の密度と，メッシュ外の密度

特徴量抽出で用いる言葉の定義を以下に示す.

- 正規化(z-score normalization)

全員分のそれぞれの特徴量に対して, 各特徴量の値から平均を引きその値を標準偏差で割っている. 正規化を行うと, どの変数もその母集団が平均 0, 分散 1 の標準正規分布に従うことになる.  $x^i$  を  $i$  番目の解答データの特徴量  $x$ ,  $\mu$  を特徴量の平均,  $\sigma$  を特徴量の標準偏差とすると, 以下の数式で表現できる.

$$x_{z-score}^i = \frac{x^i - \mu}{\sigma}$$

- ストローク

解答者が描いた線のこと. 1 ストロークは複数の点が存在している. 1 つの点ごとに 3.1 項で述べた「収集するデータ 1」の 8 つの情報を保持している.

- 全体の解答時間

アプリケーションのメニュー画面の「解答開始」ボタンが押された時間から, 問題解答画面の「解答終了」ボタンが押された時間までのこと.

- 書き始めるまでの時間

アプリケーションのメニュー画面の「解答開始」ボタンが押された時間から, 初めて解答者がストロークを書き始めるまでの時間のこと.

- ストロークの時間間隔

$k$  番目のストロークを書き終わってから  $k+1$  番目のストロークを書き始めるまでの時間のこと.

- ストロークの速度

1 ストロークの終点時間から始点の時間を引き, それをストロークの長さで割った値のこと.

- $n$  ブロックに分けたストローク

全体の解答時間を  $n$  等分し, それぞれの時間内に書かれたストロークのこと.

- 画面の問題図の周囲を囲ったメッシュ

アプリケーションの問題解決画面上に載せてある問題図の周囲を囲い,  $m_x$  個  $\times$   $m_y$  個の格子状にしたもの. 各問題に対してのメッシュの設定を図 36,37,38 に示す. メッシュの原点を左上に設定した.

横幅は、問題図の最左点の 30 だけ左側の x 座標と最右点の 30 だけ右側の x 座標の差で、縦幅は問題図の最上点の 30 だけ上側の y 座標と最下点の 30 だけ下側の y 座標の差とした。  
各図に示してある四角い枠の中を  $m\_x * m\_y$  の格子状にしたものを今回のメッシュとする。

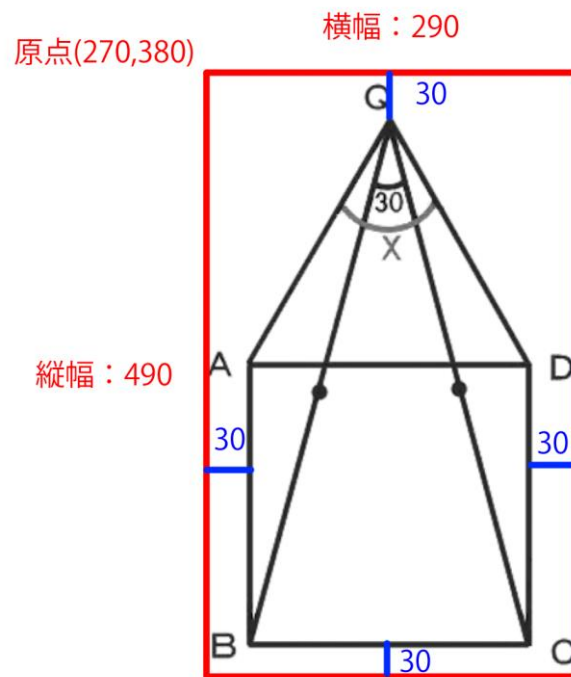


図 36 問題 1 のメッシュの外枠

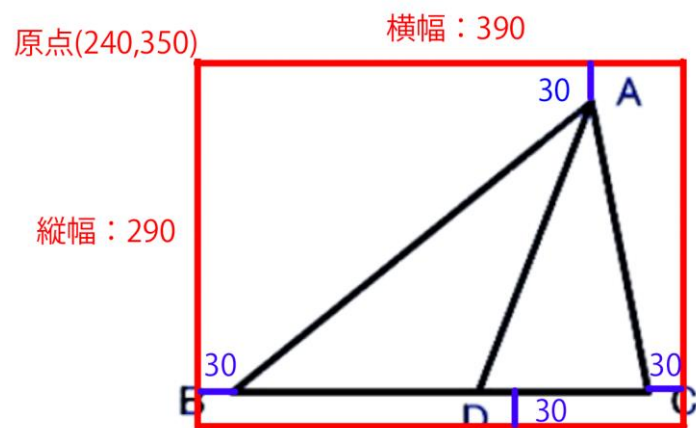


図 37 問題 2 のメッシュの外枠

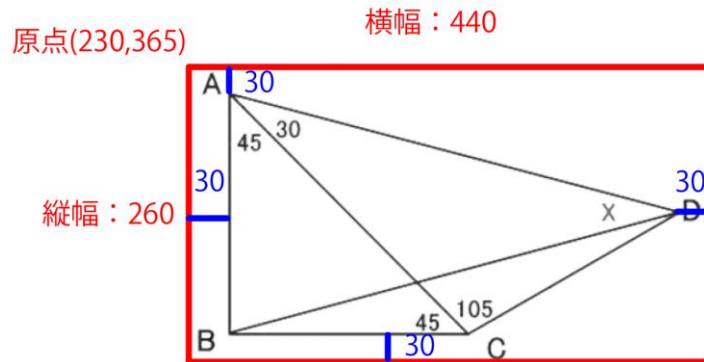


図 38 問題3のメッシュの外枠

- メッシュの密度

図 36,37,38 で設定した  $m_x$  個 $\times m_y$  個のそれぞれのメッシュ内に対して，点があるか数え，その数を全ての点の数で割ったもの． $m_x \times m_y$  の個数分の密度データが取れる．また， $m_x \times m_y$  のメッシュ外の点も数え，メッシュ外密度として取得した．今回は  $n$  ブロックで分けたストロークに対してそれぞれのメッシュの密度を求めた．

一つの解答データに対してメッシュの密度の特徴量の要素は，

$$(m_x \times m_y + 1 \text{ 個}) \times n \text{ ブロック}$$

の長さとなっている．

## 4.2 分類方法

4.1 項にて求めた特徴量から SVM を用いて以下の分類を試みる．

1. 正誤(1:正解, 0:不正解)
2. 勘で解いたかどうか(1:勘で解いた, 0:勘ではない)
3. 被験者の感じた難易度(2:難しい, 1:適切, 0:簡単)
4. 解法(3.3.2.1 項で述べた表 7,8,9 に分ける)

正解ラベルは，アンケートから表 10 の通り作成した．解法のラベルについて，勘であるデータと不正解のデータはアンケートを調査しても解法を定義できなかったため，今回の分類からは外した．

表 10 正解ラベル

	ユーザ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
--	-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

問題1	正誤	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
	勘	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	解法	-	0	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	1	-	1	-	1	0	-
	難易度	2	2	2	2	1	2	0	2	2	1	2	1	0	2	0	2	0	2	2
問題2	正誤	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
	勘	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	解法	0	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	2	-	-	-	-
	難易度	1	1	0	2	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	1	2	0	1	2
問題3	正誤	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0
	勘	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
	解法	0	-	-	-	-	1	2	3	-	-	-	-	-	1	1	-	-	3	-
	難易度	1	2	2	2	2	2	0	1	2	1	2	2	2	1	2	2	2	2	2

また、データ数が少ないため、今回はテストデータを leave-one-out cross-validation に分割した。leave-one-out cross-validation とは、サンプル集合  $X$  から 1 つだけ抜き出してテストデータとし、残りの  $X-1$  を学習用データにする。これを全サンプルが 1 回ずつテストデータとなるように繰り返し汎化誤差を推定する方法である。

表 11 の 7 個の SVM にてアンサンブルで多数決を試みた。

表 11 SVM の設定

SVM	kernel	C	gamma	penalty	loss	dual	tol
分類器 1	rbf	$2^{15}$	$2^3$				
分類器 2	rbf	$2^{15}$	$2^{-15}$				
分類器 3	rbf	$2^{-5}$	$2^3$				
分類器 4	rbf	$2^{-5}$	$2^{-15}$				
分類器 5	linear			12	hinge	TRUE	1.00E-03
分類器 6	linear			11	squared_hinge	FALSE	1.00E-03
分類器 7	linear			12	squared_hinge	TRUE	1.00E-03

### 4.3 評価

問題 1 を正誤・勘・難易度・解法について様々な特徴量で分類してみた結果の正解率 (accuracy) を示す。このとき、SVM は表 11 を使い、ブロックを 5 つに分け、メッシュは  $3 \times 3$  で行った。正誤の分類結果を表 12,13,14 に、勘の分類結果を表 15,16,17 に、難易度の分類結果を表 18,19 に、解法の分類結果を表 20,21 に示す。

特徴量について、表 12,15,18,20 は 4.1 項の特徴量の全てを用いて分類した結果で、表 13,16 は 4.1 項の特徴量からメッシュ外のを抜いて分類した結果で、表 14,17,19,21 は 4.1 項の特徴量から座標自体を抜いて分類した結果である。それぞれについて、特徴量をストロークの速度を抜いたもの、ストロークの筆圧を抜いたもの、ストロークの時間間隔を抜いたもので試した。

分類するデータは、正誤と勘と難易度は全データで、解法は正解のデータ(勘を除く)である。

表 12 問題 1 の正誤(座標あり，メッシュ外あり)

	全部	速度なし	筆圧なし	間隔なし
アンサンブル	0.526	0.579	0.526	0.526
分類器1	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器2	0.526	0.579	0.526	0.474
分類器3	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器4	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器5	0.368	0.421	0.421	0.316
分類器6	0.316	0.316	0.316	0.263
分類器7	0.368	0.421	0.421	0.316

表 13 問題 1 の正誤(座標あり，メッシュ外なし)

	全部	速度なし	筆圧なし	間隔なし
アンサンブル	0.579	0.579	0.579	0.474
分類器1	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器2	0.474	0.474	0.474	0.421
分類器3	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器4	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器5	0.316	0.368	0.421	0.368
分類器6	0.368	0.421	0.421	0.421
分類器7	0.316	0.368	0.421	0.368

表 14 問題 1 の正誤 (座標なし)

	全部	速度なし	筆圧なし	間隔なし
アンサンブル	0.526	0.632	0.579	0.421
分類器1	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器2	0.579	0.684	0.579	0.474

分類器3	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器4	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器5	0.526	0.684	0.579	0.421
分類器6	0.421	0.474	0.474	0.421
分類器7	0.526	0.579	0.526	0.579

表 15 問題1の勘(座標あり, メッシュ外あり)

	全部	速度なし	筆圧なし	間隔なし
アンサンブル	0.789	0.789	0.789	0.737
分類器1	0.789	0.789	0.789	0.789
分類器2	0.789	0.789	0.789	0.737
分類器3	0.789	0.789	0.789	0.789
分類器4	0.789	0.789	0.789	0.789
分類器5	0.421	0.421	0.421	0.368
分類器6	0.789	0.789	0.789	0.684
分類器7	0.421	0.421	0.421	0.368

表 16 問題1の勘(座標あり, メッシュ外なし)

	全部	速度なし	筆圧なし	間隔なし
アンサンブル	0.789	0.789	0.789	0.737
分類器1	0.789	0.789	0.789	0.789
分類器2	0.789	0.789	0.789	0.737
分類器3	0.789	0.789	0.789	0.789
分類器4	0.789	0.789	0.789	0.789
分類器5	0.421	0.474	0.421	0.368
分類器6	0.842	0.842	0.842	0.737
分類器7	0.421	0.474	0.421	0.368

表 17 問題1の勘(座標なし)

	全部	速度なし	筆圧なし	間隔なし
アンサンブル	0.789	0.789	0.737	0.632
分類器1	0.789	0.789	0.789	0.789
分類器2	0.737	0.684	0.684	0.579
分類器3	0.789	0.789	0.789	0.789
分類器4	0.789	0.789	0.789	0.789



分類器5	0.684	0.737	0.684	0.579
分類器6	0.684	0.789	0.684	0.684
分類器7	0.684	0.737	0.684	0.632

表 18 問題 1 の難易度(座標あり，メッシュ外あり)

	全部	速度なし	筆圧なし	間隔なし
アンサンブル	0.158	0.158	0.211	0.158
分類器1	0.632	0.632	0.632	0.632
分類器2	0.632	0.632	0.632	0.474
分類器3	0.632	0.632	0.632	0.632
分類器4	0.632	0.632	0.632	0.632
分類器5	0.158	0.211	0.211	0.211
分類器6	0.526	0.526	0.526	0.526
分類器7	0.158	0.211	0.211	0.211

表 19 問題 1 の難易度(座標なし)

	全部	速度なし	筆圧なし	間隔なし
アンサンブル	0.105	0.105	0.105	0.105
分類器1	0.632	0.632	0.632	0.632
分類器2	0.368	0.474	0.421	0.526
分類器3	0.632	0.632	0.632	0.632
分類器4	0.632	0.632	0.632	0.632
分類器5	0.316	0.474	0.368	0.526
分類器6	0.316	0.421	0.316	0.474
分類器7	0.368	0.474	0.316	0.421

表 20 問題 1 の解法(座標あり，メッシュ外あり)

	全部	速度なし	筆圧なし	間隔なし
アンサンブル	0.778	0.778	0.778	0.778
分類器1	0.778	0.778	0.778	0.778
分類器2	0.778	0.778	0.778	0.778
分類器3	0.778	0.778	0.778	0.778
分類器4	0.778	0.778	0.778	0.778
分類器5	0.556	0.556	0.444	0.556
分類器6	0.667	0.667	0.667	0.667

分類器7	0.556	0.556	0.444	0.556
------	-------	-------	-------	-------

表 21 問題 1 の解法(座標なし)

	全部	速度なし	筆圧なし	間隔なし
アンサンブル	0.556	0.667	0.444	0.667
分類器1	0.778	0.778	0.778	0.778
分類器2	0.556	0.778	0.556	0.556
分類器3	0.778	0.778	0.778	0.778
分類器4	0.778	0.778	0.778	0.778
分類器5	0.556	0.667	0.556	0.556
分類器6	0.556	0.667	0.222	0.667
分類器7	0.556	0.778	0.556	0.556

また，問題 1 の正誤をメッシュ 4\*4 にして分類した結果を表示す．

表 22 問題 1 の正誤(座標あり，メッシュ外あり，メッシュ 4\*4)

	全部	速度なし	筆圧なし	間隔なし
アンサンブル	0.684	0.737	0.737	0.737
分類器1	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器2	0.421	0.684	0.526	0.526
分類器3	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器4	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器5	0.421	0.474	0.421	0.421
分類器6	0.579	0.632	0.632	0.632
分類器7	0.421	0.474	0.421	0.421

表 23 問題 1 の正誤(座標あり，メッシュ外なし，メッシュ 4\*4)

	全部	速度なし	筆圧なし	間隔なし
アンサンブル	0.789	0.789	0.789	0.737
分類器1	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器2	0.632	0.632	0.632	0.632
分類器3	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器4	0.684	0.684	0.684	0.684
分類器5	0.421	0.421	0.421	0.368
分類器6	0.684	0.632	0.684	0.684

分類器7	0.421	0.421	0.421	0.368
------	-------	-------	-------	-------

表 12 から表 23 までの結果から、正解率は低く、分類ができていないことが分かる。さらに、分類で表 11 の SVM を用いたが、表 12～23 すべての分類で分類器 1,3,4 は常に 1 か 0 を出していたため正解率は同値になり、アンサンブル結果にも影響していた。

また、問題 2 と問題 3 についても同様にいい結果は得られなかった。

原因としては、以下が考えられる。

1. 収集した手書き解答データが少なかったこと
2. データ数に比べて特徴量が多すぎる
3. SVM のパラメータを調整していないこと

そこで、3つの原因を対策し新たに分類を試みた。

原因 1 の対策として問題ごとの分類ではなく、問題 1～3 の正解データ(勘を含む)を合わせたものから「勘かどうか」の分類をすることで分類するデータを増やした。よって正解データである問題 1 の 13 個、問題 2 の 6 個、問題 3 の 11 個を合わせた合計 30 個のデータから分類する。

原因 2 の対策として、座標の特徴量であるメッシュ内密度の設定を変化させた。今までは図 36,37,38 内を  $m_x \times m_y$  個に分けてそれぞれの密度を求めていたが、 $1 \times 1$  個のメッシュ内とメッシュ外のストローク点の密度という 2 値を特徴量とした。つまり、問題図付近に描き込まれたかと、問題図から離れた場所に描き込まれたかの 2 つに分かれるということである。よって、座標の特徴量はブロックごとに密度を求めるので

$$2 \times n \text{ ブロック}$$

の長さとなり、特徴量の長さを削減できた。

原因 3 の対策として、グリッドサーチによって最適なパラメータを複数個調べた。座標の特徴量がある場合とない場合でそれぞれ行った。

SVM の `kernel="rbf"` とし、`C` と `gamma` を以下の範囲でグリッドサーチを行った。

`'C': logspace(-20,20,base = 2)`

`'gamma': logspace(-20,20,base = 2)`

ここで、`logspace(a,b,base=x)` とは、 $x^a$  と  $x^b$  の間で対数的に等間隔な 50 点の行ベクトルを作成することである。

座標の特徴量がある場合のグリッドサーチ結果を表 24 に示す。表 24 はそれぞれ `c` と `gamma` は 2 の何乗かを示している。ここから、値を整理すると表 25 の 3 種類になる。また、このときのグリッドサーチの正解率平均は 0.6 であった。

表 24 グリッドサーチ(座標あり)のベストパラメーター一覧

分類器	c	gamma
1	4.490	-7.755
2	-20	-20
3	2.857	-6.122
4	-20	-20
5	-20	-20
6	-20	-20
7	-20	-20
8	-20	-20
9	-20	-20
10	1.224	-2.857
11	-20	-20
12	-20	-20
13	-20	-20
14	-20	-20
15	-20	-20
16	-20	-20
17	-20	-20
18	-20	-20
19	-20	-20
20	-20	-20
21	-20	-20
22	3.673	-7.755
23	-20	-20
24	2.041	-6.939
25	-20	-20
26	-20	-20
27	-20	-20
28	3.673	-8.571
29	2.041	-6.939

表 25 グリッドサーチ(座標あり)まとめ

分類器	c	gamma
-----	---	-------

1	4.49	-7.75
2	2.85	-6.12
3	3.67	-7.75

表 25 の SVM を分類機としてアンサンブルをとった結果を表 26 に示す.

表 26 表 25 の分類機での分類結果

	座標あり	座標なし
アンサンブル	0.633	0.733
分類器1	0.667	0.733
分類器2	0.633	0.733
分類器3	0.700	0.700

また, 座標なしでのグリッドサーチも行った結果を表 27 に示す. ここから, 値を整理すると表 28 の 5 種類になる. また, このときのグリッドサーチの正解率平均は 0.7333333 であった.

表 27 グリッドサーチでのベストパラメーター一覧

ループ回数	$C(2^x)$	$\text{Gamma}(2^x)$
0	15.102	-12.653
1	-20	-20
2	13.469	-11.837
3	-20	-20
4	15.102	-12.653
5	-20	-20
6	2.857	-5.306
7	-20	-20
8	-20	-20
9	2.857	-6.939
10	-20	-20
11	-20	-20
12	-20	-20
13	-20	-20
14	-20	-20
15	2.857	-6.122

16	12.653	-10.204
17	-20	-20
18	-20	-20
19	3.673	-6.939
20	13.469	-11.020
21	2.857	-6.122
22	-20	-20
23	12.653	-10.204
24	-20	-20
25	4.490	-6.939
26	-20	-20
27	2.857	-6.122
28	15.102	-12.653
29	-20	-20

表 28 グリッドサーチを整理した分類器

分類器	c	gamma
1_2	2.86	-6.12
2_2	3.67	-6.93
3_2	4.48	-6.93
4_2	13.46	-11.83
5_2	15.1	-12.65

表 28 の SVM を分類機としてアンサンブルをとった結果を表 29 に示す.

表 29 表 28 の分類機での分類結果

	座標あり	座標なし
アンサンブル	0.633	0.733
分類器1	0.633	0.733
分類器2	0.633	0.733
分類器3	0.633	0.733
分類器4	0.567	0.733
分類器5	0.567	0.833

表 28 より，分類器 5 の座標の特徴量なしが高い結果となっている．そこで，表 30 のような表 28 の分類器 5 のパラメータに近い SVM でアンサンブルをとった．このとき，座標の特徴量はないで行った．

表 30 特徴量座標なしが高い値になる分類器パラメータ

分類器	c	gamma
1	15.1	-12.65
2	12.65	-10.40
3	15	-15

表 31 表 30 の分類機での分類結果(座標なし)

	全部	速度なし	筆圧なし	間隔なし
アンサンブル	0.833	0.800	0.700	0.667
分類器1	0.833	0.800	0.700	0.700
分類器2	0.833	0.833	0.667	0.600
分類器3	0.800	0.733	0.767	0.667

表 31 より，特徴量の座標なしのときに 0.83 の正解率で勘を分類できることがわかった．勘の分類においては，座標のデータは必要なく，解答時間・ストロークの時間間隔・ストロークの筆圧・ストロークの速度での分類が可能であると考えられる．

## 第5章 まとめ

本稿では、角度を求める幾何学図形問題において、iPad Pro と Apple Pencil を用いて手書き解答データから解答パターンに分類を試みた。手書き解答データ数の少なさから、本来の目的であった解法の分類は困難であった。しかし、問題 1 ～ 3 の正解した手書き解答データを合わせたものの中から「勘で解いたかどうか」の分類を行ったところ、0.83 の正解率を得た。

今後の課題としては、より多くの手書き解答データを収集し特徴量を分析することが挙げられる。一方で、解答パターンが複数ある問題を解答パターンごとに分類するという本来の目的のために、他の問題への適用も行っていきたい。また、論理的思考力を測るためのシステムの開発も行っていく。



## 参考文献

- [1] 文部科学省, [http://www.mext.go.jp/b\\_menu/shingi/chousa/shotou/122/](http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chousa/shotou/122/), (2016/6/26).
- [2] 文部科学省, [http://www.mext.go.jp/a\\_menu/shotou/new-cs/youryou/chu/su.htm](http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/chu/su.htm), (2016/6/26).
- [3] edX, <https://www.edx.org/>, (2015/11/10 アクセス).
- [4] Coursera, <https://www.coursera.org/>, (2015/11/10 アクセス).
- [5] JMOOC, <http://www.jmooc.jp/>, (2015/11/10 アクセス).
- [6] COMBINE, <http://www.combine.co.jp/products/divisionmarker.html>, (2015/11/10 アクセス).
- [7] 佑人社, <http://www.yu-jin.co.jp/system/youmark.html>, (2015/11/10 アクセス).
- [8] Dennis Stritzke, 前田佑太, and 岡本浩行, "フィジカルプログラミングを用いた初心者向けプログラミング学習システムの開発." 情報処理学会論文誌教育とコンピュータ, Vol.1, No.4, pp.93-100, 2015.
- [9] González, Carina, et al. "EMATIC: an inclusive educational application for tablets." Proceedings of the XV International Conference on Human Computer Interaction. ACM, 2014.
- [10] 坂東 宏和, 福島 貴弘, 加藤 直樹, 中川 正樹, "枠なし手書き文字列認識におけるご認識訂正インターフェース", 情報処理学会論文誌 Vol.43 No.6, pp.1996-2005(2002).
- [11] Eugene M. Taranta and Joseph J. La Viola Jr., "Math Boxes: A Pen-Based User Interface for Writing Difficult Mathematical Expressions", Proc. of the 20th International Conf. on Intelligent User Interfaces, March 29-April 1, 2015.
- [12] Jiang, Yingying, et al. "Intelligent understanding of handwritten geometry theorem proving." Proc. of the 15th international conf. on Intelligent user interfaces, pp.119-128, 2010.
- [13] Cheema, Salman. "PEN-BASED METHODS FOR RECOGNITION AND ANIMATION OF HANDWRITTEN PHYSICS SOLUTIONS", Diss. University of Central Florida Orlando, Florida, 2014.
- [14] スウガクとくガウス, <http://www.himawarinet.ne.jp/~rinda/>, (2017/11/15 アクセス).

## 謝辞

本研究を行うにあたり，数々のご指導を頂いた早稲田大学理工学術院の山名早人教授に厚く 御礼申し上げます．また，研究を進めるにあたりアドバイスをしていただいた滝川真弘さん，田中博己さん，研究を通じて活発な議論にお付き合い頂いた IUI 班の同輩や後輩，そして，実験やアンケートに協力して頂いた被験者の方々と山名研究室の皆様に深く感謝いたします．