教授学的状況理論を用いた
対数の性質を教授意図とした授業実践の分析

成　瀬　政　光

1.　はじめに

高等学校において 2022 年度より年次実施される学習指導要領では「主体的・対話的で深い学び」の実現が求められており，近年，それを視野に入れたさまざまな活動や実践が報告されている．こうした実践をするにあたり，その活動が「主体的・対話的で深い学び」となっているかを評価する手立てや理論的枠組みがあれば大変有益なものとなるだろう．そこで，本稿ではそれらを評価する 1 つの手だてとして，教授学的状況理論 (Theory of Didactical Situations，以下「TDS」と呼ぶ) という理論的枠組みを用いて分析を行う．

本稿の議論の流れは次のとおりである．まず，2 章では TDS の概略，TDS を用いた授業の分析例を述べる．3 章では，本稿の仮説である「(生徒が) 直接回答にアクセスできない，または困難を感じることから教師の意図した知識の必要性が生じる」という視点について述べる．4 章では 3 章で述べた視点をもとに授業設計をする．5 章ではアプリオリ分析をし，4 章にて設計した授業によって想定した数学知識がどのように表出しうるのかを議論する．6 章では授業実践のデータをもとに，アポステリオリ分析を行い，4 章で設計した授業において亜教授学的状況が生じたか，教師の意図する数学知識が表出したかを分析する．これらの分析を通じて，本稿の仮説は亜教授学的状況が生じるための視点を与えることを本稿では確認した．

2.　本稿で用いる理論的枠組み

2.1　教授学的状況理論 (TDS)

本節では，本稿で用いる理論的枠組みである TDS を概説する．TDS とは Brousseau(1997) が提唱した，教師・学習者・ミリューの関係から指導・学習状況を分析する理論的枠組みである (図 1)．TDS は教師・学習者間に相互期待が生まれている状態であるか，生徒がミリューからのフィードバックのみで学習が生じている状態であるか，を分析できるツールである．

まず，TDS における用語や概念を石川・宮川 (2012) の説明をもとに述べる．「ミリュー (milieu)」とは「生徒が対峙する数学的知識に関わる環境の一部」(前掲, p.4) のことである．このミリューの概念を用いることにより，学習を「生徒は矛盾や困難，不均衡を生成するミリューに適応することで学習する」(Brousseau, 1997, p.30) こととしてとらえることができる．本稿もこの視点によって

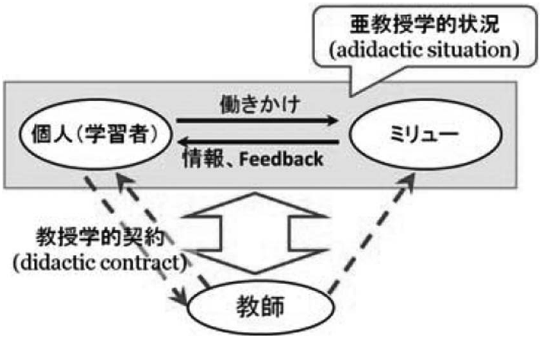

図 1　TDS による教授・学習過程のモデル (宮川, 2011, p.55)

学習をとらえることとする．学習者はある活動の中で何らかの目的を達成するために，あるストラテジーをもってミリューに働きかけることになる．その結果，学習者はミリューから何らかの「情報」を得るのだが，その中でも，生徒が当初もっていた考えやストラテジーを修正することになったときに「フィードバックが生じる」という．つまり TDS によれば，フィードバックが生じることにより学習が生じ，さらに，学習した数学知識は「その必要性があるからこそ用いた概念・道具に意味が構築される」(宮川, 2007, p.10) こととなる．

次に，教師と学習者の関係について，生徒があたかもミリューとの相互作用のみを行っている状況のことを亜教授学的状況 (adidactic situation) という．この状況は「主体的な学びが行われている状況」(前掲, p.4) といえる．また，生徒との対話によりフィードバックが生じるということであれば，対話的な学びが行われている状況であると我々は考える．Brousseau は「いかなる数学知識にもそれに意味を与えるひとつもしくは複数の亜教授学的状況が存在する」(Brousseau,1977, p.30；宮川, 2007, p.5) ことを前提にしており，高等学校のさまざまな分野や単元においても，亜教授学的状況が生じうる教材が設定できるという．一方で，教師と学習者の間の暗黙のルールにもとづいたり，生徒が教師の期待を探ったりすることを教授学的契約 (didactic contract) が働いているという．

そこで，本稿では TDS の視点を用いて授業設計し，その設計した授業により亜教授学的状況が生じているか，教師の意図した数学知識が表出するかを分析する．

2.2　TDS を用いた授業の分析例 (先行研究)

本節では TDS を用いた授業分析の例として，宮川 (2011) の比例の指導に関する授業分析，西 (2016) の整数の性質の指導に関する実践・授業分析を述べる．

宮川 (2011) は表 1 を用いた比例の導入部において,「表から気付いたことは何でしょう」という問いよりも「20m の針金の重さは何 g でしょう」という問いのほうがミリューとの相互作用が生じやすく,「課題や問題を解決する手段として，その必要性から数学知識が発生する」(p.56) と述べている．仮に，前者の問いに対して，生徒が「重さが 10 の倍数である」という発言をしたとき，その内容は真であり，生徒は比例の知識を表出させる必要がない状態といえる．したがって，与えられた

長さ (m)	1	2	3	4	5	6	7	8
重さ (g)	20	40	60	80	100	120	140	160

表 1 針金の長さと重さ (宮川, 2011, p.56)

表は生徒に対して矛盾や困難，不均衡を生じさせていない，つまり，生徒に対してフィードバックが生じていない状態であるといえる．このとき，比例の知識を表出させたいと考えている教師がその発言に対し「そうですね．他に気づいたことはありますか？」(前掲, p.56 の図 2) と授業を進めたとしたら，教師が比例の知識が出てくるように，生徒と交渉している状態といえる．つまり，生徒にとっては教師が正しいと考えているものを探すという行為となり，教授学的契約が働いている状況である，と分析される．

西 (2016) は「$\frac{1}{n}$ が有限小数となる ($n \in \mathbb{Z}_+$)$\Leftrightarrow$ 分母 n の素因数が 2, 5 だけからなる」という数学知識を教授意図とした授業の実践・分析を行った．西は亜教授学的状況および目標とする数学知識が発生する状況のためのミリューの条件を 2 つ設定した (前掲, p.42)：

(条件 I) 生徒が何らかの働きかけを行うことができるフィードバックが返ってくるようなミリューの設定.

(条件 II) 学習の対象が問題解決の手段として必要となるようなミリューの設定.

西はこれらの条件を用いて「n を 2 以上 20 以下の自然数とする．分数 $\frac{1}{n}$ の分子を分母で割ると，有限小数となるような n はいくつあるだろうか」という問いを設定した．しかし，実践を経て,「n の条件への着目は，ミリューとの相互作用ではなく，教師の発言から導き出されたものである」(前掲, p.46),「多少の計算の煩雑さや不正確さを気にしなければ，$1 \div n$ の計算でも課題 1 の答えは求められ，答えが求まった後には n の条件に着目する必要性が生じないのである」(前掲, p.47) と西は分析した．つまり，その教材は生徒にとって (条件 II) で述べた「必要性」が十分に感じられるものではなかったと西は評価したのである．西はこの「必要性」という視点から，問題を n を 2 以上 100 以下の自然数とする，または，$n = 8500$ や $n = 5120$ の場合まで扱うなど，割り算による解決が困難であるような教材への改善点を指摘した (前掲, p.47f).

3. 本稿の問題意識

本稿では TDS を用いて，設計した授業において亜教授学的状況が生じているか，教師の意図する数学知識が生じているかを分析する．特に，本稿ではこれらの分析にあたり，西 (2016) の (条件 II) にある「必要性」に着目し，(条件 II) をより具体的にした視点を与える．2.2 節の 2 つの先行研究によれば，問題設計について，宮川 (2011) は表には書かれていない値を求めること，西 (2016) は時間の制限がある中では解決が困難である教材を与えること，をそれぞれ示唆している．つまり，

それぞれの教材は，生徒の置かれている状況では「回答に直接アクセスすることができない，または困難を感じる」ものへチャレンジするように設定されているといえる．

そこで，本稿では

> 想定されるミリューから直接回答にアクセスできない，または困難を感じることから教師の意図した知識の必要性が生じるような問題設定により，亜教授学的状況が生じ，教師の教授意図である数学知識が表出する

と仮説を立てた (以下,「本稿の仮説」と呼ぶ).

ここで,「回答に直接アクセスすることができない，または困難を感じる」という点について説明を加える．まず，回答に直接アクセスすることができないというのは，数学的に求めることができない，という意味ではない．例えば，想定する活動では時間が不足するために回答にたどりつけないことなどを指している．つまり，同じ問いを設定したとしても，PC のグラフソフト・電卓・インターネットなど，どのような道具を用いてもよい状況であったり，時間に制限のない状況であったりすれば，容易に回答にたどり着ける可能性がある．したがって，道具や時間の制限が異なれば，異なる授業ができあがるといえる．また，本稿での仮説は，先にも述べたように，西 (2016) のミリューの (条件 II) をより詳細にしたものである．亜教授学的状況が生じたり，数学知識が表出したりする状況の十分条件の 1 つを示すものであることに注意されたい．

では，本稿の仮説にもとづき設計した，対数関数の性質を教授意図とする授業を次章において述べる．

4. 授業設計

4.1 対数に関する授業実践の先行研究

対数に関するこれまでの実践では，対数の性質をさまざま学習した後に応用する場面が多く見られる．例えば，常用対数を用いて元利合計がある金額になるまでの年数を計算をすることなどである．こうした授業の目標は，ある指数方程式を解くために (常用) 対数が有用であることを示すということになるだろう．しかし，TDS の視点から言えば，その実践において対数を用いるのは「授業でちょうどその単元を扱っているから」と生徒が考えれば，教授学的契約の働いている状況になるともいえる．また，電卓を利用してよいという状況であれば，対数を用いなくとも，乗法を繰り返し行えば解を求めることができる．このことは，TDS の視点および本稿の仮説によれば，対数の知識を用いる必要性が大きくない状況といえる．

次に，対数の導入部を TDS によって分析した濵中・勝谷 (2020) の実践例について述べる．濵中らは，指数関数に従属しない方法により対数を定義する教材を用いて，亜教授学的状況が生じたと報告した．ここで，濵中らの実践では本稿と同様に TDS を分析ツールとして用いているものの，3 章で述べた本稿の仮説のような状況を設定していないことに注意されたい．3 章でも述べたように，

本稿の仮説は亜教授学的状況となるための十分条件の 1 つである．

4.2　本稿で設計した授業

では，3 章で述べた本稿の仮説をもとに具体的な授業設計を行う．本稿の実践において，教授意図とする対数の性質は次の 2 つである：

(性質 A) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

(性質 B) $\log_a M^p = p \log_a M$

ただし，$a, M, N > 0$ $(a \neq 1)$，$p \in \mathbb{R}$ である．本稿ではこれら 2 つの性質を表出するため，本稿の仮説にもとづき，図 2 にある問いを設定した．この問いでは，真数が細かい値である必要はないため，生徒に与える常用対数表は $\log_{10} 1.0, \log_{10} 1.1, \cdots, \log_{10} 9.9$ と真数の値が 0.1 刻みである簡易なものを用いる (図 3)．また，対数の定義および常用対数表の見方は既習であることを前提とする．もちろん，(性質 A) および (性質 B) は未習である．

ここで，常用対数表を用いた問いの設定について,「常用対数表から気付いたことは何か？」や「$N = 10.1$ 以降の表を作ってみよう」というオープンエンドの形を本稿ではとらなかった理由を述べる．その大きな理由は (性質 A) および (性質 B) を教授意図としているためである．前者のような問いを生徒に与えたとき，例えば，生徒が「すべての値が 1 以下である」という発言することを考える．このとき，2.2 節で述べた宮川 (2011) の分析に沿えば，その内容は真であり，生徒は (性

問い：常用対数表を用いて，次の等式を満たす N を求めよ：

(1) $\log_{10} 2.5 + \log_{10} 1.8 = \log_{10} N$

(2) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2.4 = \log_{10} N$

(3) $2 \log_{10} 3 = \log_{10} N$

(4) $\dfrac{3}{2} \log_{10} 9 = \log_{10} N$

図 2　本稿で設計した問い

常用対数表(数学A, 2021年1月配布)　作成：成瀬

―	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0	0.0414	0.0792	0.1139	0.1461	0.1761	0.2041	0.2304	0.2553	0.2788
2	0.301	0.3222	0.3424	0.3617	0.3802	0.3979	0.415	0.4314	0.4472	0.4624
3	0.4771	0.4914	0.5051	0.5185	0.5315	0.5441	0.5563	0.5682	0.5798	0.5911
4	0.6021	0.6128	0.6232	0.6335	0.6435	0.6532	0.6628	0.6721	0.6812	0.6902
5	0.699	0.7076	0.716	0.7243	0.7324	0.7404	0.7482	0.7559	0.7634	0.7709
6	0.7782	0.7853	0.7924	0.7993	0.8062	0.8129	0.8195	0.8261	0.8325	0.8388
7	0.8451	0.8513	0.8573	0.8633	0.8692	0.8751	0.8808	0.8865	0.8921	0.8976
8	0.9031	0.9085	0.9138	0.9191	0.9243	0.9294	0.9345	0.9395	0.9445	0.9494
9	0.9542	0.959	0.9638	0.9685	0.9731	0.9777	0.9823	0.9868	0.9912	0.9956

図 3　本稿の実践で用いた常用対数表

質 A) および (性質 B) を表出する必要がない状態であるといえる．2 つの対数の性質を表出させるために，教師と生徒間の交渉する (つまり教授学的契約が働く) 可能性がある．また，後者の問いを生徒に与えた際には，すでに表中にある値から対数の性質を導き，その性質を用いて，表にはない常用対数の値を求める活動となるだろう．この活動では，確かに (性質 A) を導く可能性も高いといえるが，(性質 B) については導く必要性が乏しくなると考えられる．さらに，宮川 (2007, p.10) の議論を参考にすれば，教授意図であるこれら 2 つの性質以外を導く可能性も高く，この段階では証明できないものも出てくる可能性があるだろう．以上のことから，本稿では TDS の視点にもとづき，こうしたオープンエンドの形はとらないこととした．ここで，オープンエンドの形の問いの良し悪しを議論しているのではないことに注意されたい．あくまでも，本稿では対数の (性質 A) および (性質 B) という知識を表出するという目的と TDS の視点によって授業を設計しているにすぎない．当然，授業の目的が「さまざまな対数の性質を導く」という本稿とは異なるものであれば，ここで挙げた 2 つのオープンエンドの問いを選択することがふさわしいかもしれない．

5. アプリオリ分析

本章では，4.2 節の図 2 で示した問いを用いることにより，亜教授学的状況が生じるか，どのようなミリューによって，生徒はどのようなフィードバックを受けるか，そのフィードバックにより教授意図である数学知識 (性質 A) および (性質 B) は生じるか，についてアプリオリ分析をする．

5.1 問い (1), (2) に関する分析

問い (1) については，左辺の $\log_{10} 2.5$, $\log_{10} 1.8$ の値はそれぞれ常用対数表にあるため，その和を計算すれば 0.6532 と求められ，常用対数表から $N = 4.5$ であることがわかる．このとき，対数表がミリューになっているものの，フィードバックは起こらず，(性質 A) を表出する必要性がない状態といえる．一方，問い (2) は問い (1) と同様に計算したとしても，左辺の 2 数の和は 1.0792 となるため，対数表から N の値を求めることができない．つまり，生徒は「回答に直接アクセスすることができない」状況となり，常用対数表を参照する以外の方法を用いる必要性が生じていると考えられる．これは，常用対数表や計算結果がミリューとなり，生徒にフィードバックが生じている状態といえる．

次はそのフィードバックから数学知識 (性質 A) がどのように表出するのかを検討する．1 つ目は問い (1) の結果をミリューとする場合，つまり，真数どうしが $2.5 \times 1.8 = 4.5$ と気づく場合である．これにより，生徒は対数の (性質 A) に気づき，それを問い (2) に適用して N の値を求めることとなる．2 つ目は問い (2) のみをミリューとする場合である．例えば，生徒が求めた値の小数点以下の 0.0792 に着目し，$1 + \log_{10} 1.2$ と考えたとする．生徒は対数の定義から $\log_{10} 10 = 1$ であることを用いて，$\log_{10} 10 + \log_{10} 1.2 = \log_{10} 5 + \log_{10} 2.4$ と両辺を比較し，真数の積が互いに 12 で等しくなることに気づき，対数の (性質 A) を表出することが考えられる．さらに，上記の 2 つのいずれの

場合においても，対数の (性質 A) を表出させた後に，対数表をミリューとして，$\log_{10} 2 + \log_{10} 3$ のような例で確認することもできる．この確認の作業は対数表をミリューとしているが，フィードバックは生じていないといえる．

したがって，以上のアプリオリ分析から，生徒は常用対数表や問い (2) をミリューとしてフィードバックを得ることとなり，問い (1) または問い (2) をミリューとすることによって，対数の (性質 A) を表出すると考えられる．

5.2　問い (3), (4) に関する分析

問い (3) については，先の問い (1) と同様に，$\log_{10} 3$ の値は常用対数表にあるため，左辺の値は 0.9542 と求められ，常用対数表から $N = 9$ であることがわかる．これも問い (1) と同様に，常用対数表はミリューとなっているものの，フィードバックは起こらず，対数の (性質 B) を表出させる必要性がない状態といえる．また，対数の (性質 A) を用いて (左辺) $= \log_{10} 3 + \log_{10} 3 = \log_{10}$ として，$N = 9$ と求めることができる．しかし，この方法も対数の (性質 B) を表出させる必要のない状態であるといえる．

一方，問い (4) は問い (3) と同様に対数表から N の値を導こうとしても，左辺の値は 1.4313 となり，常用対数表からは「直接回答にアクセスできない」状況となっている．つまり，常用対数表や計算結果がミリューとなり生徒へフィードバックが生じ，他のストラテジーを考える必要性が生じると考えられる．

次に，そのフィードバックから数学知識 (性質 B) がどのように表出するのかを想定する．1 つ目は問い (3) の結果をミリューとして，$2\log_{10} 3 = \log_{10} 9 = \log_{10} 3^2$ ということに気づく場合である．つまり，対数の (性質 B) に気づき，それを問い (4) に適用して N の値を求める場合である．2 つ目は左辺を $\frac{1}{2}\log_{10} 9 + \log_{10} 9$ などと変形して対数の (性質 A) を用いようとする場合である．この場合は，第 1 項に整数でない係数があることから，この計算結果がミリューとなり，生徒にフィードバックを与え，対数の (性質 A) ではないストラテジーを用いる必要性が出てくる．ここで，問い (4) の設定について 1 つ注意を与える．もし，問い (4) が $4\log_{10} 9 = \log_{10} N$ のように係数が正の整数であれば，対数の (性質 A) によって問題を解決できてしまうという点である．そのため，対数の (性質 B) に関して「回答に直接アクセスすることができない，または困難を感じる」という状況が生じにくいと考えられる．こうしたことから，本稿では問い (4) の係数を $\frac{3}{2}$ としたのである．

以上のことから，問い (3) は仮説にある「直接回答にアクセスできない，または困難を感じる」状況が起こらないため，常用対数表からのフィードバックは生じない．しかし，問い (4) は「直接回答にアクセスできない，または困難を感じる」状況が生じているといえるために，常用対数表や問い (3) の結果がミリューとなり，生徒はフィードバックを受け，対数の (性質 B) が表出することが想定される．

6. アポステリオリ分析

4.2 節にて設計した授業実践は 2021 年 1 月に埼玉県内の私立高校 1 年生を対象に，1 コマ (50 分) で行われた．当該期間がオンライン授業期間中ということから，授業は web 会議システム ZOOM 上で行われ，実践はブレイクアウトルームという機能を用いて，生徒を 6 人 1 グループに分けて行われた．実践において収集したデータは，ある 2 つのグループの ZOOM 上の活動の様子を録った動画である．

では，実践において見られた現象を分析することにより，亜教授学的状況が生じたか，(性質 A) および (性質 B) が表出したのか，5 章でアプリオリ分析の結果と照らし合わせて述べる．データを収集した 2 つのグループをそれぞれ「グループ α」,「グループ β」とよぶ．また，生徒を S+(3 桁の数) によって表す．

6.1 亜教授学的状況について

本節では，2 つの場面 (図 4, 5) から，設計した授業により亜教授学的状況が生じていたのかを分析する．1 つ目の場面はグループ α のメンバーが問い (1), (3) を先に解き，問い (2) に対峙しているところである (図 4)．このやりとりでは，問い (3) は問い (1) と同様に常用対数表から直接回答にアクセスできていること (プロトコル 3)，問い (2) および (4) は常用対数表からは直接回答にアクセスすることができていないこと (プロトコル 2, 4〜7, 9)，がわかる．これらのことから，生徒たちは問い (2) および問い (4) からフィードバックを受けていることがわかる．特に，問い (2) と (4) について，S104 が「どうにかしていかなきゃ」と述べている (プロトコル 7)．これは，常用対数表を参照する以外のストラテジーの必要性について言及しているといえる．したがって，以上のやりとりは教師の介入は一切なく，生徒が常用対数表を参照する以外のストラテジーの必要性を見出していることから，亜教授学的状況が生じているといえる．

2 つ目の場面はグループ β のメンバーが問い (1) を終えて，問い (2) に対峙しているところである (図 5)．なお，S203 という生徒は PC が不調のため，チャットのみで参加している．このやりとりでは，問い (1) は常用対数表から直接回答にアクセスできたことがわかる (プロトコル 13)．一方で，問い (2) については，常用対数表に 1.0792 という値がないことから，常用対数表から直接回答にアクセスできないというフィードバックを受けていることがわかる (プロトコル 16, 17)．

したがって，以上の 2 つの場面から 5 章で述べたアプリオリ分析のとおり，亜教授学的状況が生じているといえる．

6.2 数学知識の表出について

本節では 3 つの場面 (図 6〜8) から，教授意図である (性質 A) および (性質 B) が生じているのかを分析する．

1. S101: 2 番以外はできた？
2. S102: 2 番で止まっちゃった，今．先に 3，4 やるか.
3. S101: これさ，普通にさ．かっこ 3 番さ，なんか 1 みたいなのでできるよね？

(中略)

4. S101: で，また 4 番にさぁ，なんか，2 とおんなじやついる？
5. S103: いるねえ.
6. S102: ほんとだ.
7. S104: ほんとだ．やばい．これどうにかしていかなきゃ，始まらない.
8. S103: やられた．やられました.
9. S102: これ 10 超えちゃうじゃん．10 超えたら.

(中略)

10. S102: えー．2 番と 4 番が超えちゃうのかぁ.
11. S104: 1 番，3 番は，そう
12. S102: そのままだったよね.

図 4　グループ α のやりとり

13. S201: で，それを足して，0.6532 だから，4.5 のとこにそれがあるから，っていう感じで 1 番はできる.
14. S202; ああ，すごい！
15. S201: だけど，次がそうもいかない，と.
16. S203: [チャットのメッセージで] (2) $0.699 + 0.3802 = 1.0792$ なくね？
17. S201: 次はそうもいかないのか．1.0792 になるんだったら，…
18. S203: [チャットのメッセージで] あみすった.
19. S202: なんだっけ，1 はなくして，なんか，10 点いくつとかになるんじゃない？
20. S201: $\cdots$(聞き取り不能)$\cdots$．10.2 じゃない？
21. S202: だよね．そんな感じだよね.
22. S201: たぶん．まったくわかんないけど.
23. S202: すごい，なんか大変だよこれ．全然.

図 5　グループ β のやりとり

24. S101: 2.5 と 1.8 をかけたらさ，4.5 になるの偶然？
25. S102: ん，掛け算？
26. S101: あのときさ，なんていうの….
27. S103: あ，ほんとだ．なるね.
28. S101: って考えたらさ.
29. S104: かけんのか.
30. S101: (2) もなりそうじゃない？
31. S103: 12？
32. S101: でも，12ってなるとさ，出てるの 1 と 1.2 じゃなかったっけ？
33. S103: ホンマや.
34. S104: なんだぁ.
35. S101: でも，あれだよね？
36. S104: あ，でも，1 と 1.2．あ，そっか，10×1.2 が 12 じゃない？
37. S101: じゃ，さあ，$\log_{10} 10$って 1 だよね？
38. (発言者不明): うん.
39. S101: え，でもさ.
40. S104: $\log_{10} 10$ だったら，N は 1 なんじゃない？
41. S101: ん？もう 1 回言って.
42. S104: $\log_{10} 10$ だから，N は 10 で，それプラス 0.0792 だから，10 たす 1.2 で，違うか？かけんのかな？
43. S101: たす 10 するってこと？
44. S102: かけるんじゃない，これ？
45. S103: かけたら 12？
46. S104: かけるのか．12.
47. S103: (3) の場合もさ，これ，3 かけ 3 だもんね．言ったら.
48. S104: あ，そうだね．んじゃ，これ，そうじゃね？
49. S103: これだわ．きっと.

図 6　グループ α のやりとり

1 つ目の場面はグループ α が問い (2) に取り組んでいるところである (図 6)．6.1 節にて指摘したように，グループ α のメンバーは問い (2) は常用対数表から回答に直接アクセスできないことを認識している．その上で，S101 の発言から，問い (1) の結果をミリューとして，対数の (性質 A) が表出したといえる (プロトコル 24)．つまり，5.(2) 節のアプリオリ分析にて想定したとおりの結果

50. S202: たぶん 2 番は計算式合ってるかな．計算式は合ってるんじゃない？

51. S203: [チャットのメッセージで] 1+log1・2

52. S202: 1 たす？

(中略)

53. S204: すいません．もう 1 回，2 番言ってもらっていいですか？

54. S202: 2 は，たして，1.0792 になるから，その 1 と⋯.

55. S204: ああ，1 のところ，0.0792 だから，10 倍するってこと？

56. S204: ん？

57. S202: 1 のところ？ああ，ええと，ん？

58. S204: 10.2ってこと？

59. S202: かな，と思ったけど.

60. S204: 1 と 0.2 のところが,

61. S202: その 10.2 は 10 の 1.0792 乗？

62. S204: ああ．理解しました.

図 7　グループ β のやりとり

63. S104: 4 番がやばい.

64. S101: え，どういうこと？やばいって.

65. S103: 2 番が 12 だから，結局かけ算でいいんじゃないの？

66. S104: うん．そうそう．たぶんかけ算だと思う.

67. S103: だから，今のは $\cdots$(聞き取り不能)$\cdots$

68. S102: で，3 番はそう考えると，3 の 2 乗ってことでしょ？

69. S101: うん．うん.

70. S104: 9 の 2 分の 3 乗でしょ？4 番は.

71. S102: 2 分の 3 乗だ.

72. S103: 27 だよね？

73. S102: え？27 になる？

74. S103: なった．なった．うん.

(中略)

75. S102: 9×3 なの？あ，27 だ．そっか.

図 8　グループ α のやりとり

となった．また，S101 のこの発言 (プロトコル 24) が S103 や S104 にとってのミリューとなり，ストラテジーの変更が生じ，実際に計算をしていることもわかる (プロトコル 31, 36)．このストラテジーはアプリオリ分析で想定した 2 つ目の方法である．また，S103 は表出した対数の (性質 A) を確認するために，問い (3) の結果を持ち出している (プロトコル 47)．つまり，問い (3) がミリューとなっていることがわかる．このことは 5.1 節でのアプリオリ分析では想定していなかった点である．

2 つ目の場面はグループ β が問い (1) に取り組んでいるところである (図 7)．このやりとりでは，S203 が $1 + \log_{10} 1.2$ と求められたことが確認された (プロトコル 51)．しかしその後，グループ β ではその値をミリューとしてストラテジーを具体的に変更するまでの段階は見られなかった．また，導いた値がなぜ出てくるのかその理由についての考察はこのやりとりからは確認できない (プロトコル 54〜62)．以上のことから，グループ β では対数の (性質 A) は表出しなかったといえる．

3 つ目の場面はグループ α のメンバーが問い (4) に取り組んでいるところである (図 8)．6.1 節にてすでに指摘したように，常用対数表から問い (4) の回答に直接アクセスできないことをグループ α のメンバーは認識しており，ストラテジーの変更の必要性を感じている (プロトコル 4, 9, 10)．その上で，S102 の発言から問い (3) の計算結果をミリューとして，対数の (性質 B) を見出したことがわかる (プロトコル 68)．S104 はその発言をミリューとして，実際に問い (4) にその性質を適用している．

したがって，1 つ目および 3 つ目の場面から，グループ α では直接回答にアクセスできないことから生じる必要性によって，問い (1) や (3) の計算結果をミリューとして，対数の (性質 A) および (性質 B) がともに表出したといえる．これは 5 章にて述べたアプリオリ分析に一致する結果となった．また，アプリオリ分析にて想定していない現象は，対数の (性質 A) の表出に関して，問い (3) もミリューとなったことである．一方で，グループ β では常用対数表をミリューとしてフィードバックを受けているものの，2 つ目の場面から，(性質 A) の表出には至らなかった．

6.3　考察

4.2 節で設計した授業において，6.1 節では亜教授学的状況が生じるか，6.2 節では教授意図である (性質 A) および (性質 B) が生じるか，をそれぞれ分析した．

亜教授学的状況については，アプリオリ分析のとおり，常用対数表が問い (2), (4) の計算結果がミリューとなり，教師の介入なしにフィードバックが生じたといえる．この点については，本稿の仮説が授業設計に活かされたといってよいだろう．

教授意図である数学知識については，一方のグループでは (性質 A) および (性質 B) の双方が表出したが，他方のグループでは表出しなかった．つまり，本稿の仮説では授業設計に対して不十分な点があったといえよう．そこで，問いの設定の改善点を考える．グループ α では他の問いをミリューとし，グループ β では他の問いをミリューとしていない点に着目すれば，他の問いをミリューとして参照しやすいような設定をするとよいと考えられる．例えば，問い (1) で用いる真数の値を $\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \log_{10} 6$ のように，九九で計算できる程度のものを扱えば，(性質 A) により気付

きやすくなるだろう．また，グループ β のやりとり (図 5) の中で教師が「なぜ，このように考えられるのですか？」という問いかけをすることにより，その問いかけがミリューとなり，(性質 A) および (性質 B) がより表出しやすくなったかもしれない．ここで,「なぜ？」という程度の問いかけは，生徒たちに向けて他のストラテジーを用いるような交渉したり，知識を与えたりしているわけではないため，亜教授学的状況を維持するものであることに注意されたい．

7. 今後の展開

本稿では 3 章で述べた本稿の仮説にもとづき授業設計をし，それにより亜教授学的状況を生じたか，教授意図となる対数の性質が生じたか，を分析した．その結果，本稿にて設計した授業では，亜教授学的状況が生じたことが確認され (6.1 節)，教授意図である対数の 2 つの性質については，一方のグループでは生じ，他方のグループでは生じなかったことが確認された (6.2 節)．前者の亜教授学的状況が生じるかという点について，本稿の仮説は生徒の活動が「主体的・対話的」であるかを実現できているかを評価する手立ての 1 つとなりうることが示唆された．一方で，後者の数学知識の表出については，新たな視点を加える必要があるだろう．

今後の課題は，本稿の仮説に数学知識の表出に関する視点を加えること，および，ほかの単元においても本稿の仮説が有効であるのかを検討することである．特に対象としやすい学習状況は，TDS や本稿の仮説の性質により，特定の数学知識の表出を目的とする実践といえるだろう．4.2 節において注意したように，オープンエンドの問いを用いて，さまざまな数学知識を表出させることを目的とする場合は，想定される数学知識が多岐にわたるため，本稿の仮説による分析は難しいだろう．こうしたオープンエンドの形の問いを用いる実践では，ほかの理論的枠組みを用いて分析するのが望ましいといえる．

付記

本稿は 2021 年 8 月に行われた日本数学教育学会第 103 回全国算数・数学教育研究 (埼玉) 大会にて発表した「教授学的状況理論による対数関数の授業分析と設計」の大会発表要旨 (成瀬, 2021) および当日資料を，そこでの議論をもとに，大幅に加筆・修正したものである．なお，本稿は早稲田大学特定課題研究助成 (2020C-492) および日本学術振興会科学研究費補助金奨励研究 (21H03988) の助成を受けて行われた研究成果の一部である．

参考文献

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer.

濵中裕明・勝谷紗英 (2020). 対数関数の導入授業におけるアクティブラーニングの実現：教授学的状況理論を用いて. 全国数学教育学会第 53 回研究発表会資料.

石川実・宮川健 (2012). 「手続きの説明」の学習における伝言ゲームの可能性：中学校図形領域における教

授実験を通して. 日本数学教育学会誌数学教育, **94** (11), 2-11.
宮川健 (2007). 関数グラフソフトを用いた教授・学習過程の分析. 日本数学教育学会誌, **89** (1), 2-12.
宮川健 (2011). フランス数学教授学の立場から見た「授業」の科学的探究. 日本数学教育学会第 44 回数学教育論文発表会論文集, **1**, 51-60.
成瀬政光 (2021). 教授学的状況理論による対数関数の授業分析と設計. 日本数学教育学会誌　第 103 回大会発表要旨集, 374.
西真貴子 (2016). 高等学校数学科における生徒の主体的な学びを促す授業に関する研究：数学 A「整数の性質」の授業における亜教授学的状況の検討. 全国数学教育学会誌数学教育学研究, **22** (1), 41-49.