論文概要書

モデルを志向した数学教育の展開

池田　敏和

Ⅰ．本研究の意図と構成

「応用指向」と「構造指向」の調和は，従来から繰り返しなされてきた議論ではあるが，数学的モデリングの指導が世界的に脚光を浴びる中において，再び論点として取り上げられるようになった（Wittmann 著，國本・山本訳，2004；Niss，2008）．そして，数学科カリキュラムにおける両者のバランスに目を向けたとき，「応用指向」と「構造指向」といった二律背反する考えを数学科カリキュラムにバラバラに位置づけるのでなく，両者をどのように有機的に関連づければ，数学的知識が持続的に成長していくのかといったことが論点となってくる．

本研究の目的は，応用指向と構造指向といった二元論から離脱し，両者が互いに影響を与え合うことで数学的知識が絶えず成長していく活動を具現化するための教材開発の枠組みを構築すると共に，その枠組みを基に，局所的な立場と大局的な立場から教材を開発することにある．

第 1 章では，目指す方向の異なる応用指向と構造指向をモデルという視点から統合していくことを考えるために，まずは，モデルの意義・意味を明らかにすると共に，モデルに関わる数学教育の研究の世界的な傾向について分析・考察する．本論の基本的用語として，モデルについて言及した上で，モデルに関わる数学教育の研究の世界的な傾向について分析・考察し，本研究の課題を同定する．

第 2 章では，数学教育における応用指向と構造指向に対応する二つの方向からの目的について概観した上で，モデルの二つの役割について言及していく．一つは，仮想空間としてのモデルの役割であり，もう一つは，対比の対象としてのモデルの役割である．そして，一つ目の役割において，抽象化が繰り返されるという性格から，複数の世界へと跨る活動を考え，二つ目の役割において，複数の世界における事象を対比することで数学的知識が成長していくという性格から，複数の世界を行き来する活動を推奨していくことになる．また，数学的知識については，類似関係と論理的関係に関わる知識に大別し，世界の区分をどのように捉えていくのかについて言及する．そして，複数の世界を行き来する活動を，数学的知識の成長といった観点から，事例分析を通して，四つの活動からなる数学的知識を成長させる再帰的な活動として精緻化する．最後に，これまでの考えを基に，複数の世界を行き来する活動に焦点を当てた教材開発の枠組みを構築する．

第 3 章では，複数の世界を行き来する活動の教材化として，五つの教材を開発する．五つの教材は，どれも複数の世界を行き来する中で未知な要素，不整合な要素が見出され，それを契機に数学的知識が成長していくことになる．

第 4 章では，内容領域を図形領域に焦点化して，複数の世界を行き来した垂直カリキュラムについて構想する．van Hiele，彌永，Kline，古藤・金子，Hoffer の考えを参照しながら，図形の同値関係と図形の操作・変換における世界の区分とその移行について考察する．そして，複数の世界を行き来する活動として，九つの局面を同定する．

そして，これらのカリキュラム構想を基に，図形の操作と論証を行き来する活動の教材開発，図形の具体的操作と記号的操作を行き来する活動の教材開発について言及する．

本論の構成を図でまとめると，図 1 のようになる．

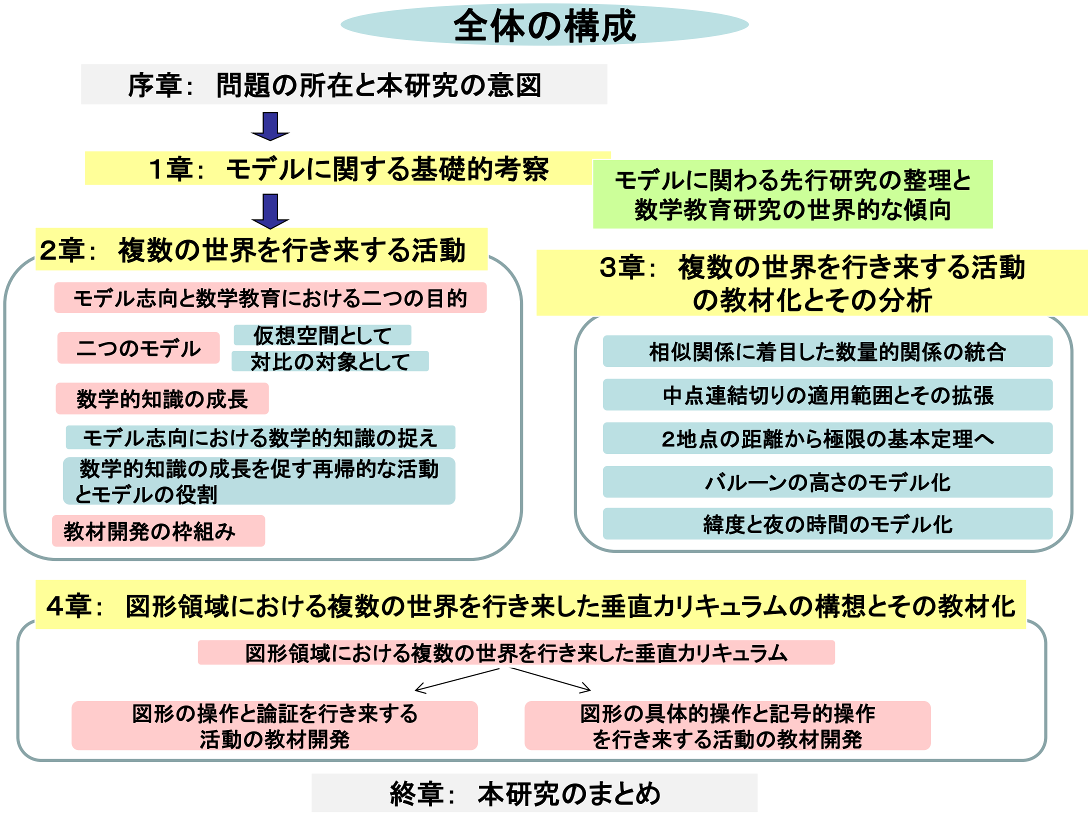

図 1． 本論文の構成

Ⅱ．第１章－モデルに関する基礎的考察

応用指向と構造指向の違いを，一つの考え方として，現実の世界と数学の世界といった二つの世界の行き来によって解釈する．応用指向では，現実の世界の問題を解決することを目的に，数学の世界における知識がモデルとして利用されることを強調する立場で，現実の世界を豊かにしていくための手段として数学を見ることになる．一方，構造指向では，数学の世界を豊かにすること自体を目的としており，適宜，現実の世界での事象をモデルとして利用し数学の世界を豊かにしていくことになる．しかし，このように解釈してみると，応用指向であれ構造指向であれ，目的はある一つの世界で生じ，物事のしくみ（構造）を明らかにする目的の基で，もう一つの世界にあるモデルを活用し目的を達成する点で共通している．そして，応用指向においては，現実の世界の問題を解決し終えた後で，どのような数学的知識をどのように用いたのかを振り返ることで，数学的知識を整理・統合するといった構造指向の考えにも繋がっていく．逆に，構造指向においても，構築した数学的知識の構造が現実世界の中に見出せないかを探ることにより，現実世界におけるものの見方を豊かにする応用指向の考えに繋がっていく．このように考えると，両者は対立した考えではなく，両方向の活動が共に影響を与えることによって，現実の世界，数学の世界が共に成長していくと共に，二つの世界を繋ぐ関係自体も成長していくという考えへと導かれる．そこで，本稿では，応用指向と構造指向といった二分法による考えから離脱し，両者の統合を可能とするモデルという概念に着目して議論を進めていくことにする．

モデルの定義に関しては，Pinker (1981)，Fischbein（1987）の見解を基に，主体が次の 3 点をMがもっていると判断したとき，Mを原型に対するモデルと呼ぶことにする．

(1) Mは，あるひとつの目的に関して，原型と類似した構造をもっていること
(2) Mは，原型に対して，相対的に自立していること
(3) Mは，原型において意味のある結果を引き出すために活用できること

このような立場から，モデルに関わる世界的な研究を振り返ったとき，実用的な傾向と科学・人間的な傾向が二本柱として特定できる（池田，2013）．そして，実用的な傾向では，実利的，実用的な目標，すなわち，現実世界の問題の解決のために算数・数学を用いることができる児童・生徒の能力に焦点を当てているのに対し，科学・人間的傾向では，「活動としての数学」を基本概念として，科学としての数学とその構造を人間の営みとして導く能力に焦点を当てている．前者は，応用指向に関わるねらいであり，後者は，構造指向に関わるねらいである．そして，応用指向と構造指向を統合した立場から，算数・数学学習を一つの世界から新たな世界へと脱皮を繰り返して成長していく自己開拓的な教科として捉えたとき，各々の傾向において，次のような課題が特定できる．

［実用的傾向（応用指向）における課題］

・算数・数学の世界に既に数学的知識が構築されていることが前提とされている．数学的知識がどのように構築され，応用指向の考えとどのように結び付くのかについて研究していく必要がある．数学を応用していく上での数学的知識の構築がどのようになされるのかについて言及していかないと，応用指向は，数学的知識が構築された後になされる孤立した学習活動となり，構造指向との調和を考えることは棚上げにされたままとなる．
・現実世界の問題を数学の世界に数学化する生徒の能力を強調しているが，それが容易でないことも指摘されている．生徒にとって，何故，数学化が難しいのか，また，その思考様式をどのように解釈していけばよいかがもう一つの課題として指摘できる．Freudenthal（1991）の指摘する媒介としてのモデルの役割をヒントに，現実の世界と数学の世界を二分した世界の区分を脱皮して考えていく必要がある．

［科学・人間的傾向（構造指向）における課題］

・Treffers（1987），De Lange（1996）の提唱する水平方向の数学化と垂直方向の数学化に対して，算数・数学が抽象化を繰り返し，一つの世界から新たな世界へと脱皮を繰り返していく教科と考えるとき，この二つの数学化だけで数学教育を捉えてしまってよいのかについて検討していく必要がある．水平方向の数学化を現実世界と算数・数学という二つの世界の中でのやりとりに留めないようにする必要がある．
・モデルの発達を意図した算数・数学学習の深化を「model-of」から「model-for」への一方向の移行（Streenland，1991 ; Gravemeijer，2007）だけで捉えてよいかについて検討していく必要がある．例えば，具体を見本にしながら数学を構築していくという数学者が行うような学習活動が，モデルの発達理論にいかに組み込まれるのかについて考察されなければならない．

Ⅲ．第２章－複数の世界を行き来する活動－

本章では，応用指向と構造指向を統合した考えとして，モデルを志向した数学教育へのアプローチを検討した．まずは，モデルがどのような役割を果たすのかについて考察し，その役割故に，複数の世界に跨る活動に導かれることについて言及する．次に，モデル志向において，数学的知識とその成長をどのように捉えるのかについて述べた上で，数学的知識を成長させる再帰的な活動とモデルの役割について言及し，モデルの相互啓発的な性格に迫っていく．最後に，複数の世界を行き来する活動を意図した教材開発の枠組みについて説明する．

１．モデルの二つの役割

まずは，応用指向と構造指向を統合したモデル志向という立場から，モデルをつくって考えるという行為に着目し，モデルがどのような役割を果たしているのかについて考察した．その結果，仮想空間としてのモデル（Ikeda,2013），対比の対象としてのモデル（Hesse，1966：ヘッセ著高田訳，1986），といった二つの役割が特定された．

［第１のモデル：仮想空間としてのモデル］

当面している問題や事象を，それが生じた世界の中で思考・説明することが難しいとき，その問題や事象を構成している要素を思考･説明がしやすい別の世界における要素へと置き換え，別の世界の中で思考・説明しようとする．ここでいう「思考・説明がしやすい」とは，思考・説明を促進するための要因が別の世界にはあるわけで，例えば，視覚的に見える形で操作をしながら思考・説明ができたり，馴染みのある世界でイメージを伴いながら思考・説明ができたり，既に構築した数学的知識があるが故に独立に処理できたりする等の点があげられる．モデルは，思考・説明を促進するために別の世界におきかえられた要素とその関係を意味し，目的に応じて抽象化，具体化，翻訳という考えを通してモデルがつくられることになる．

［第２のモデル：対比の対象としてのモデル］

当面している問題や事象がどのように考えればよいかが不明確であるとき，それが生じた場面（世界 A）と類似した馴染みのある別の場面（世界 B）を見出し，別の場面（世界 B）での要素間の構造を見本に，当面している問題や事象を探究しようと考える．別の場面（世界 B）は馴染みがある故に要素間の構造を熟知しており，場面（世界 B）が類似しているが故に，対比することで他の部分も類似しているのではないかというアナロジー（類比）が働くわけである．モデルは，具体的な場面との間に整合性があるかどうかを検証したり，複数の世界に跨る数学的知識を整理したり，数学的知識の適用範囲を拡大させたり，拡張・統合して新たな数学的知識を構築するために用いられることになる．モデルは，アナロジー（類比）を引き出すための見本となる別の場面（世界 B）につくられた要素間の構造（システム）を意味する．

そして，第１のモデルの役割における，抽象化は繰り返し行われるという性格から，複数の世界に跨る活動を考えていくことが導かれる．さらに，第２のモデルの役割における，複数の世界に跨る活動を振り返り，複数の世界を対比することでさらなる発展が求められるという性格から，複数の世界を行き来する活動が推奨されることになる．

２．モデル志向における数学的知識の成長

数学的知識をどのように捉えるかを述べた上で，数学的知識を成長させる再帰的な活動について述べ，最後に，再帰的な活動におけるモデルの役割とその相互啓発的な性格について述べる．

（1）数学的知識の捉え

本論では，数学的知識は直線的に一定の割合で成長していくものではないことを前提に，革命的な知識の成長が節目となって要所要所に位置づけられ，その節目と節目の間では，累積的な知識の成長がなされるという立場に立つ（ポパー，1974；クーン，1985）．革命的な知識の成長に関しては，ラカトシュ（ラカトシュ著，佐々木訳，1980）による「概念の境界領域の研究」「その概念の拡張」「前には識別されていなかった概念の識別」を念頭に置いて考えていくことにする．

次に，数学的知識の捉えについてである．数学的知識は，細分化された部分としての知識がバラ

バラに存在していても，部分同士が互いに影響を与えることがないため，自己調整的な機能を果たさない．一つの閉じた固定化した知識の寄せ集めではなく，お互いに影響し合う要素の集合として捉え，自己調整的な機能を果たすものと考える．また，数学的知識は，複数の世界に跨ってつくられるという立場に立つ．数学は，一つの世界から新たな世界へと脱皮を繰り返していく性格を持っているからである．このような二つの考えを基に，数学的知識を，「要素」と「要素同士を結ぶ関係」によって捉え，数学的知識が成長するとは，「要素」が増えていくと共に，「要素同士を結ぶ関係」が増えていくことを意味する．そして，この「要素同士を結ぶ関係」を，類似関係と論理的関係に大別して考える．一つは，二つの世界の要素同士を結ぶ類似関係であり，もう一つは，各々の世界における要素同士の論理的関係である．数学的知識は，新たな世界を繰り返し構築していき，各々の世界における数学的知識を関連づけ体系化していくことで成長していくと考える．

ここで，類似関係にある世界の区分をどのように捉えるかが重要となる．ピアジェ (Beth & Piaget, 1966)，平林（1987），柴田（Shibata，1973；柴田，1974），岩崎（2007）の考えを基にして，大きく二つの立場から世界を区別していくことにする．一方は，「行為（操作）」に着目した場合で，他方は，「ものの集合」に着目した立場である．前者では，より低い水準の「行為（操作）」の体系からある性質を引出し，より高次な水準の「行為（操作）」に変換したとき，世界の移行が促される．両者の「行為(操作)」は，同じ「行為（操作）」でありながら，その思考様式，表現様式が異なることになる．ある「行為（操作）」に対して，その性質を引出し，異なる思考様式，表現様式による「行為（操作）」へと変換したとき，両者の「行為（操作）」は，異なる世界における数学的知識として解釈することにする．後者では，「行為（操作）」の本質を保ちながら，それらの適用される集合を広げる際に世界の移行が促される．ある事物の集合に対して，その事物がもつ共通の性質が明らかにされたとき，その事物の集合とその共通の性質は異なる世界における数学的知識として解釈する．例えば，図形であれば，ものの形に着目した世界，図形の構成要素に着目した世界，図形同士の相等関係に着目した世界等，図形をどの程度抽象化して捉えるかによって複数の世界が構築されることになる．以上，世界の区分において，「行為（操作）」と「ものの集合」という二つの観点から述べたが，両者は共に影響し合う中で，いや共に影響し合うからこそ，数学的知識は成長していくという立場にたつ．

（2）数学的知識を成長させる再帰的な活動

応用指向と構造指向を調和させながら数学的知識を持続的に成長させるには，具体的な問題を解決することに終始した学習だけでは難しく，児童・生徒の内的な世界に算数・数学を創り上げることを目的とした学習活動が徐々に取り入れられていく必要がある．そのためには，次の二つの目的が有機的に関連づけられながら展開される必要がある．

目的１：具体的な問題をこれまで獲得した数学的知識を駆使して解決すること

目的２：内的な世界に構築された断片的な数学的知識を関連付け，体系化すること

そして，数学的知識が何を契機に成長していくかに着目して分析すると，目的１と目的２とを結ぶ，四つの活動からなる再帰的な活動が特定される．

まずは，第１の活動として，複数の世界に跨って問題解決がなされる活動を位置づける．ある世界に生じた問題を，複数の世界に翻訳してモデルをつくり，それらの行き来を通して問題を解決していくことになる．しかし，問題が解決されれば終りというわけではない．問題解決の後に，複数の世界に跨る数学的知識の同異を明らかにすると共に，その関連性を明確にしていこうとする行為が期待される．これを第２の活動とする．また，このような対比を通して，複数の世界には対応している要素があるのに，ある世界においては対応する要素が存在しないという場面が見出されるこ

とがある．このような場合は，その未知な要素（ある世界にあって，別の世界にはまだその存在が明らかでない要素）をさらに明らかにしていく行為が期待される．複数の世界間の対比を通して未知な要素を特定し，それを明らかにしていくことも，数学的知識の成長である．次に，開発した数学的知識をモデルとして捉え，モデルが適用される具体的な場面を広げていく活動が行われる．未知な要素を探り，それがモデルに適合するかどうかを探っていくことになる．これを第 3 の活動とする．さらに，不整合な要素が見出されると，整合性がとれるようにするために，拡張・統合を通して，新たな数学的知識が構築される．これを第 4 の活動とする．モデルに適合する要素と適合しない要素が見出されたとき，両者を不整合な要素と見て，拡張・統合できないかを試みるわけである．複数の事象から骨格となる構造を抉り出す行為で，革命的な知識の成長に繋がる行為である．

数学的知識の成長といった観点から省みたとき，第 1 の活動を基に，第 2，第 3，第 4 の活動からどのような意味で数学的知識が成長しているかについて分析していく必要がある．第 2 の活動では，複数の世界に跨る数学的知識の同異とその関連性が明確になるという意味で，数学的知識は成長している．また，未知な要素が見出されると，それが明らかにされることも，数学的知識の成長である．第 3 の活動では，未知な要素を探り，数学的知識の適用範囲を広げるという意味で，数学的知識は成長している．第 4 の活動では，モデルに適合する要素と適合しない要素が見出されたとき，両者を不整合な要素と捉えて，拡張・統合できないかを試みていくことになる．複数の事象から骨格となる構造が抉り出され表現されるという意味で，数学的知識は成長している．

そして，このように数学的知識が成長すると，その数学的知識は，新たなる問題解決において活用されることになる．第 3，第 4 の活動から第 1 の活動へと再帰的に戻っていくことになる．ただし，第 2 の活動から第 1 の活動へ戻る場合もあることに留意されたい．また，第 3，第 4 の活動で新たな数学的知識が構築されたとき，第 2 の活動を行うことが肝要である．すなわち，第 3，第 4 の活動から第 2 の活動へと戻る活動である．新たな数学的知識が構築されることによって，これまでの複数の世界に跨る数学的知識がどのように変容し整理されるかを探るわけである．具体的には，第 3 の活動の後に第 2 の活動を行うことで，モデルに適合する要素とモデルに適合しない要素を整理することにより，数学的知識の適用範囲が明らかにされることになる．また，第 4 の活動の後に，第 2 の活動を行うことで，これまで構築した知識が新たに構築した知識の特殊になっているかを確かめることになり，数学的知識の特殊・一般を明らかにすることが可能となる．

以上，数学的知識を成長させる再帰的な活動をまとめると図 2 のようになる．第 1 の活動は目的 1 に対応しており，第 2,3,4 の活動は目的 2 に対応している．

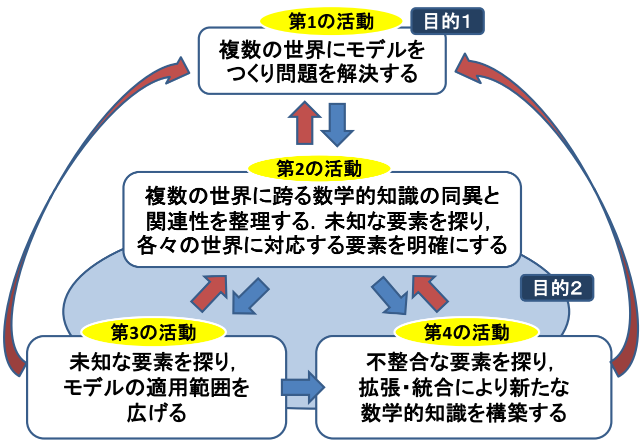

図 2．数学的知識を成長させる再帰的な活動

（3）再帰的な活動におけるモデルの役割とその相互啓発的な性格

モデルには，大きく二つの役割「仮想空間としての役割」「対比の対象としての役割」があり，複数の世界に跨る活動を通して，数学的知識が構築され成長していく再帰的な活動について言及してきた．ここでは，数学的知識の構築・成長過程を，モデルの二つの役割に関連づけながら説明していくことにする．

第1の活動では，モデルの役割として「視覚的・操作的に思考・説明することができる（仮想空間として）」，「開発した数学的知識によって組織的に考えられる（仮想空間として）」，「最初の問題場面と対比することで整合性があるかを検討できる（対比の対象として）」を特定するができる．次に第2の活動では，モデルの役割として，「複数の世界における数学的知識の特徴が比較できる（対比の対象として）」「新たな数学的知識を構築する上で参考になる（対比の対象として）」「馴染みのある世界でイメージを持ちながら具体的に思考・説明ができる（仮想空間として）」を特定することができる．第3の活動では，「未知な要素と対比してモデルに適合するか検討できる（対比の対象として）」を特定することができる．最後に，第4の活動では，モデルの役割として，「新たな数学的知識を構築する上で参考になる（対比の対象として）」「馴染みのある世界でイメージを持ちながら具体的に思考・説明ができる（仮想空間として）」を特定することができる．

そして，上記の再帰的な活動の中では，複数の世界が対比的に扱われ，未知な要素，不整合な要素を原動力として，「互いが互いを成長させる」ことを可能にしている．問題が生じた世界を適宜捉え直しながら，複数の世界をふりこのように行ったり来たりすることによって，複数の世界における未知な要素，不整合な要素が新たな問いを引き起こすための原動力になり，各々の世界を互いに成長させることにつながっていくわけである．特に，第4の活動における不整合な要素は，新規な考えを引き出すことが要求され，革命的な知識の成長に繋がる重要な要因と言える．これが，モデルの相互啓発的な性格であり，複数の世界を行き来する活動の核心となる（池田・渡邊，2010）．これらを図に表すと，図3のようになる．

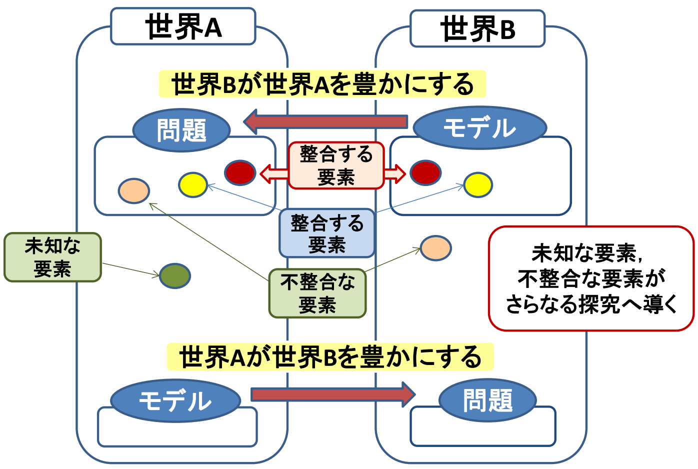

図3.　モデルの相互啓発的な性格

3．複数の世界を行き来する活動を意図した教材開発の枠組み

教材開発については，局所的な立場から，ある特定の内容に関わる教材開発を行うと共に，小・中・高に跨る大局的な立場から，ある特定の領域に焦点を当てたカリキュラム構想とそのいくつかの局面における教材開発を行う．

局所的な立場では，伝統的な二つの世界に区分した活動の枠組みから脱皮し，複数の世界に跨り

行き来する活動として教材開発を試みるよさについて，具体化を通して明らかにしていく．中・高等学校段階の数学に焦点を当てた教材を開発し，その解決活動を下記の三つの観点から分析・評価する．

①世界の区分をどのように捉え，複数の世界の行き来がどのようになされるか

②各々の世界につくられたモデルが果たす役割は何か

③数学的知識は，どのような過程を経て，どのように成長するのか

①では，世界をどのように区分しているのかを明確にすると共に，複数の世界を行き来する活動がどのようになされるのかについて分析する．②では，複数の世界を区分して教材分析を行う意義に関する分析である．各々の世界にモデルがつくられることになるが，モデルが，仮想空間としての役割として，あるいは，対比の対象としての役割として，どのような役割を果たしているのかについて分析する．モデルの役割が明確になることで，モデルがつくられた世界が有意味な役割を果たしていることになる．③では，数学的知識を成長させる再帰的な活動を基に，第 1 の活動から第 4 の活動までがどのような過程で進展していくのかを分析する．そして，各々の局面において，数学的知識がどのような意味で成長しているのかを明らかにする．

一方，大局的な立場からカリキュラム系列を考えていく際，「ものの集合」に着目した複数の世界の行き来，「行為」に着目した複数の世界の行き来の両面の活動が活発になされると共に，両者がどのように融合して数学的知識が成長していくのかに焦点を当てて研究を進めていくことになる．このような立場から，本論では，図形領域を中心にカリキュラム系列を考えていくことにした．図形領域では，ものの集合からの抽象化と行為の抽象化がパラレルになされると共に，両者が適宜融合することにより，数学的知識が成長していくと考えたからである．モデル志向の数学教育においては，お互いに影響を与えながら数学的知識が成長していく過程に焦点を当てているため，図形領域は，モデル志向の考えが適用しやすい領域だと考えられる．

そして，小・中・高に跨る図形領域を中心に複数の世界を行き来する活動の系列を具体化していくために，大きく二つの段階に分けて考えていくことにする．まずは，図形領域を小・中・高といった大局的な流れから捉えたとき，世界をどのように区分するかを考察する．世界の区分においては，「ものの集合」「行為（操作）」といった二つの観点から，先行研究の分析・考察を基に，どのような世界の移行がなされるのかを探ると共に，両者がいかに融合するのかを分析する．

そして，構築された世界の区分とその移行を基に，複数の世界の行き来を通して数学的知識が成長する核となる局面を同定していく．ここでは，新たな世界に数学的知識が構築される場面を中心に考えていく．数学的知識を成長させる再帰的な活動における第 4 の活動である．どのような場面を不整合な要素として捉えることで，新たな世界に数学的知識を構築する契機になっているのかを同定する. 世界の区分については, 複数の世界の果たす役割, 数学的知識の成長といった観点から, さらに詳細に世界を区分したり，複数の世界をまとめて一つの世界として考えたりする．また，図形領域は，数・文字式による考察とも影響を与え合うことがあるため，数・文字式の考察がどのように図形に活用されてくるのかも分析の対象とする．分析・評価の観点としては，下記の 4 点を設定する．

① 各々の局面において，世界の区分をどのように捉えているか

② 各々の局面において，複数の世界に区分するよさは何か

③ 各々の局面において，どのような場面を不整合な要素として捉えることで，新たな世界に数学的知識を構築する契機としているか

④ 大局的な側面から，図形の同値関係に関わる「実体的対象」と，図形の操作・変換に関わる「操作的存在」が，どのように影響を与え合って数学的知識を成長させていくか.

次に，開発した活動系列のいくつかの局面において，複数の世界を行き来する活動がどのようになされるのかを具体化するために教材開発を行う．ここでは，中学校から高等学校に関わる内容に焦点を当て，下記の二つの活動に焦点を当てて教材開発を行う．

・図形の具体的操作と論証を行き来する活動

・図形の具体的操作と記号的操作を行き来する活動

図形領域において，行列変換・複素数変換が許された新たな世界を構築していく活動は，日本においては現代化の頃に試みられたが，うまく実現しなかった内容である．図形の豊富な具体的操作を行っていくこと（図形の具体的操作と論証を行き来する活動），並びに，その具体的操作をモデルとして新たな体系を構築していく（図形の具体的操作と記号的操作を行き来する活動）という立場から，上記の二つの活動に焦点を当てて教材開発を行うことにした．

また，教材の分析・評価は，局所的な教材開発で述べた下記の 3 点で行う．

①世界の区分をどのように捉え，複数の世界の行き来がどのようになされるか

②各々の世界につくられたモデルが果たす役割は何か

③数学的知識は，どのような過程を経て，どのように成長するのか

Ⅳ．第３章－複数の世界を行き来する活動の教材化とその分析

本章では，局所的な立場から，応用指向と構造指向といった二元論，並びに，伝統的な二つの世界に区分した活動の枠組みから脱皮し，複数の世界を行き来する活動として教材開発を試み，その解決活動を下記の三つの観点から分析した．

①世界の区分をどのように捉え，複数の世界の行き来がどのようになされるか

②各々の世界につくられたモデルが果たす役割は何か

③数学的知識は，どのような過程を経て，どのように成長するのか

教材開発では，中高等学校段階における数学に焦点を当て，五つの教材を開発した．

１．開発した五つの教材

第 1 番目は，「相似関係に着目した半円と二等辺三角形の各々における数量的関係の統合」という教材で，モデルの適用範囲を広げる活動，異なる二つの問題場面を統合すると共に，さらなる具体例を見出す活動に焦点を当てている．ここでは，ものの集合に着目した世界の区分と，行為（操作）に着目した図形の区分の両方が取り扱われる．ものの集合に着目した世界として，①三角形，四角形，円，楕円といった個々の図形の性質によって分類した世界，②相似関係にある図形同士を同じ仲間として分類した世界，の二つの世界が取り扱われる．また，行為（操作）に着目した世界として，③初等幾何学的考察が許された世界（向きなし），④初等幾何学的考察が許された世界（向きあり），の二つの世界が中心に取り扱われる．

第 2 番目は，「中点連結切りの適用範囲の拡大とその拡張」という教材で，中点連結切りという四角形を平行四辺形に変形する具体的操作について，その適用範囲を拡大すると共に，適用できない範囲においても考え方を拡張していく活動に焦点を当てている．大きく四つの活動にわけることができる．一つ目は，中点連結切りを固定して，長方形に変形できる四角形の性質を探究していく活動で，二つ目は，任意の四角形を対象に，長方形，正方形に変形できるように，中点連結切りを改良していく活動で，三つ目は，凹四角形でも平行四辺形に変形できるように，中点連結切りを改良していく活動である．四つ目は，活動の後に，四角形の中点連結切りの教材をモデルとして，四つの世界における数学的知識を振り返り，対比してみる活動である．特に，三つ目の凹四角形における中点連結切りの拡張では，四つの世界（①具体的操作が許された世界，②作図・測定が許され

た世界，③初等幾何学的考察が許された世界，④複素数変換が許された世界）の行き来がなされる．ここでは，行為（操作）に着目して世界を区分しており，複数の世界を行き来することにより，数学的知識が成長していくことになる．

第 3 番目は，「2 地点の距離から極限の基本定理へ」という教材で，飛行機の最短航路を考える問題，円の面積を求める問題，半円の弧長の和の問題の共通点，相違点に着目し，直観的に捉えていた行為を抽象化（統合）していく活動に焦点を当てる．具体的操作が許された世界，作図・測定が許された世界の行き来を通して，解決した三つの問題の解決過程を振り返り，直観的に捉えていた行為を抽象化し，記号的操作が許された世界に，新たな数学的知識（極限の基本定理）を構築する教材である．行為に着目した三つの世界（①具体的操作が許された世界，②作図・測定が許された世界，③記号的操作が許された世界）の行き来がなされ，特に，作図・測定が許された世界では，個々の三つの事象の共通点・相違点を浮き彫りにする図形をモデルとして，極限の基本定理が導かれることになる．

第 4 番目は，「バルーンの高さのモデル化」という教材（Ikeda,Stephens and Wada, 2012）で，現実の世界で必要となる角度，距離を測定し，それを縮図法や三角比を用いて，バルーンの高さを測る方法をモデル化していく活動に焦点が当てられる．現実の世界で生じた問題に対して，バルーンの高さを工作用紙でモデル化した立体図形の操作から始まり，そのモデルを媒介として，パルーンの位置が一意に決定するかどうかを縮図法により考察していく．そして，測定方法の妥当性を検証するために，現実の世界での実験・測定による結果と，作図・測定による結果を比較検討し，今後の課題を明らかにしていく．ここまでの活動は，中学 3 年生（31 名）を対象とした授業実践（90 分，2010 年 11 月 19 日）を行っており，生徒の反応について分析・考察を加える．さらに，目分量による作図・測定による方法を発展させ，三角比を用いた記号的操作による解決を取り上げる．そして，解決後に複数の世界を対比しながら振り返ることにより，初等幾何学的考察に基づく作図・測定について探究する．ここでは，大きく分けると，行為に着目した四つの世界（①現実の世界（実験・測定を含む），②具体的操作が許された世界，③作図・測定が許された世界，④三角比による記号的操作が許された世界）の行き来がなされる．

第 5 番目目は，「緯度と夜の時間のモデル化」という教材（Ikeda,2013）で，夏至において，ある緯度から夜の時間を求めるにはどうすればよいか，さらには，1 年間を通して考えるとどうなるかをモデル化していく活動に焦点を当てている．地球儀による具体的操作から始まり，作図・測定による解決を経由して，三角比を用いた関数として表現していくことになる．本教材は，大きく四つの活動にわけられる．一つ目は，「夏至のとき，緯度から夜の時間を予測するにはどうすればよいか」を問いにする．ここでは，高校 1 年生（28 名）を対象とした授業実践（120 分，2012 年 3 月 15 日）を分析・考察すると共に，その後の発展的な取り扱いについて言及していく．二つ目は，「夏至のとき，緯度と夜の時間には，どのような関係があるか」を問いにし，緯度と夜の時間の関数関係を考察する．三つ目は，「夏至だけではなく，一年間を通して，緯度と夜の時間には，どのような関係があるか」を問いにする．四つ目は，問題解決は終えた後で，複数の世界における各々の数学的知識の特徴を振り返る行為である．複数の世界における数学的知識を対比することにより，現実の問題を解決していく際に，各々の世界の数学的知識がどのような役割を果たすかを理解することになる．例えば，一つ目，二つ目の活動では，五つの世界（①現実の世界，②具体的操作が許された世界，③作図・測定が許された世界，④三角比による記号的操作が許された世界，グラフ表現が許された世界）の行き来がなされる．

２．教材開発を通しての複数の世界を行き来する活動の評価

これまで，五つの教材について分析・評価してきた．ここではさらに，五つの教材開発を通しての，複数の世界を行き来する活動を意図した教材研究自体について評価していく．複数の世界を行き来する活動を意図した教材研究では，応用指向と構造指向といった二元論，並びに，伝統的な二つの世界に区分した活動の枠組みから脱皮し，複数の世界を行き来する活動として教材研究を試みることになる．中・高等学校段階の数学に焦点を当てた五つの教材開発では，その解決活動を下記の三つの観点から分析・評価した．

①世界の区分をどのように捉え，複数の世界の行き来がどのようになされるか

②各々の世界につくられたモデルが果たす役割は何か

③数学的知識は，どのような過程を経て，どのように成長するのか

そこで，五つの教材開発を通しての，複数の世界を行き来する活動を意図した教材研究について分析・評価するために，「①，②」と「③」に分けて言及していく．

①，②については，世界の区分とその行き来，並びに，各々の世界におけるモデルの役割について分析している．全体を通してまとめると，複数の世界に区分して教材研究するよさとして，下記の2点が確認できる．

(a) 応用指向の立場から，現実と数学の二つの世界の行き来で捉えるのではなく，三つ以上の複数の世界の行き来として捉え直すことによって，問題を解決するための思考を手助けしたり促進したりしてくれる．また，問題解決の後で，各々の世界で用いた数学的知識を振り返り関連づけることで，構造指向の考えに転じることになる．

(b) 構造指向の立場から，数学という一つの世界での思考と捉えるのではなく，数学の中の複数の世界を行き来した思考として捉え直すことで，数学が抽象化を繰り返していく活動であることが顕在化できる．そして，複数の世界を対比することで，未知な要素，不整合な要素が考察対象になり，さらなる探究が繰り広げられ，数学的知識を持続的に成長させてくれる．

(a)については，特に，「2 地点の距離から極限の基本定理へ」「バルーンの高さのモデル化」「緯度と夜の時間のモデル化」の教材において抽出でき，(b)については，特に，「相似関係に着目した半円と二等辺三角形の各々の数量的関係の統合」「「中点連結切り」の適用範囲の拡大とその拡張」「2 地点の距離から極限の基本定理へ」の教材において抽出できる．

次に，③に関しては，数学的知識を成長させる再帰的な活動を基に，第 1 の活動から第 4 の活動がどのようになされるのかについて分析している．その結果，応用指向に関わる目的①「具体的な問題をこれまで獲得した数学的知識を駆使して解決すること」と，構造指向に関わる目的②「内的な世界に構築された断片的な数学的知識を関連付け，体系化すること」が有機的に関連づけられながら進展していくことが確認できる．

具体的には，どの教材も，第 1 の活動から始まり，第 2 の活動を軸に，第 3 の活動，第 4 の活動との行き来がなされていることがわかる．複数の世界に跨る数学的知識の一長一短を明らかにしたり，それらの関連性を明らかにしたりする活動が，第 1 の活動，第 3 の活動，第 4 の活動の後に促され，数学的知識が整理されることになる．そして，数学的知識が整理されると同時に，未知な要素を見出し，あるいは，モデルに適合する場合と適合しない場合を不整合な要素と捉えることにより，さらに，第 3 の活動，第 4 の活動が促されることがわかる．数学的知識を適宜整理していくこと，並びに，整理した結果をどのように捉えるかが数学的知識を成長させていく上で鍵を握ることがわかる．五つの教材が，数学的知識を成長させる再帰的な活動の枠組みで解釈できることが確認できる．これより，応用指向，構造指向といった二元論に陥らず，両者が互いに影響を与えながら，数学的知識を持続的に成長させていく活動になっていることがわかる．

Ⅴ．第４章－図形領域における複数の世界を行き来した垂直カリキュラムの構想とその教材化

本章では，モデル主義の考えを大局的な立場から考えるために，図形領域に焦点を当てて考えていくことにした．まずは，図形領域における小・中・高といった大局的な流れの中で，世界がどのように区分され移行していくかを考察した上で，複数の世界の行き来を通して数学的知識が成長していく核となる局面(数学的知識を成長させる再帰的な活動における第 4 の活動)を九つ同定した．次に，九つの局面から，行列変換・複素数変換の構築に関わる二つの局面を取り上げ，モデル主義の考えがどのように展開されるのかついて教材開発した．

１．図形領域における複数の世界を行き来した垂直カリキュラム

まずは，世界の区分とその移行について述べる．「ものの集合」という視点は，図形の実体的対象（目に見えるもの）を対象に，「どのような図形を同じとみなすのか」という図形の同値関係の考察に対応させ，「行為（操作）」という視点は，図形の操作的存在（目に見えないもの）を対象に，「図形をどのように操作・変換するか」という図形の操作・変換の考察に対応させて考えた．この二つは，図形領域における世界を大きく二つに区分する考え方になる．各々について，van Hiele (1984)，彌永（2008)，Hoffer（1983)，古藤・金子（1974）の見解を基に分析した．

図形の同値関係の考察では，ものの形に着目して分類する世界，図形の構成要素に着目して分類する世界，図形の性質の相互関係に着目して分類する世界といった流れからなる三つの世界を同定した．一方，図形の操作・変換の考察では，図形の直観的で無意識の具体的操作が許された世界から，作図・測定が許された世界，組織的な具体的操作（例えば，平行移動，回転移動，対称移動）が許された世界への流れからなる三つの世界を同定した．ここで，両者は，帰納的推論から演繹的推論への移行の中で，初等幾何（局所的論証）によって融合することになる．そして，初等幾何学的考察は，局所的論証による世界から大局的論証による世界へと深化していくと共に，座標幾何学的考察が許された世界を経て，図形の記号的操作が許された世界（行列変換・複素数変換）へと進展していくことになる．一方，様々な変換が許された世界が明らかになると，今度は，その変換により図形の同値関係を定めるという考えが芽生え，図形の実体的対象と図形の操作的存在がふたたび融合することになる．合同変換される図形同士，相似変換される図形同士，アフィン変換される図形同士，位相変換される図形同士といった図形の見方である．図形の同値関係の考察，図形の操作・変換の考察の二つを核とした世界の区分とその移行を図的に表現すると，図 4 のようになる．

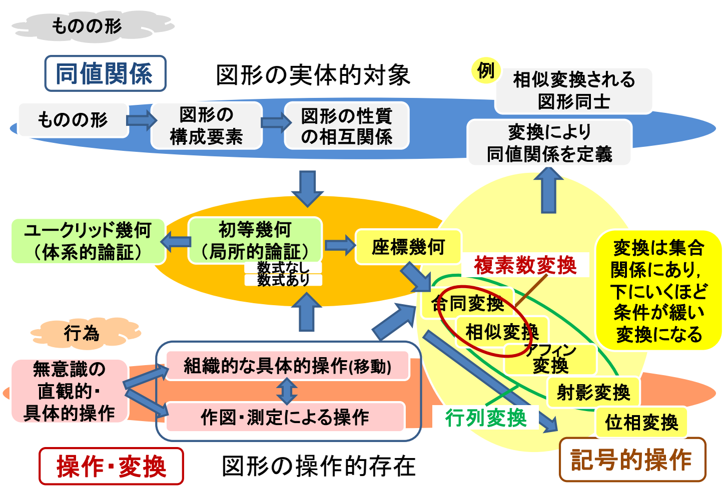

図 4．図形の同値関係，操作・変換における世界の区分とその移行

上記の考察を基に，複数の世界の行き来を通して数学的知識が成長する核となる局面（数学的知識を成長させる再帰的な活動における第 4 の活動）が九つ同定された．評価の観点としては，下記の 4 点が設定された．

(a)　各々の局面において，世界の区分をどのように捉えているか

(b)　各々の局面において，複数の世界に区分するよさは何か

(c)　各々の局面において，どのような場面を不整合な要素として捉えることで，新たな世界に数学的知識を構築する契機としているか

(d)　大局的な側面から，図形の同値関係に関わる「実体的対象」と，図形の操作・変換に関わる「操作的存在」が，どのように影響を与え合って数学的知識を成長させていくか.

九つの局面について，(a)~(c)を中心にまとめると，次のようになる.

①　ものの形を仲間分けする活動

見た目で判断できない形があるときに，いかに弁別していけばよいかが児童にとっての目的となる．ものの形を仲間分けする活動において，見た目で分類できる場合と見た目では分類しにくい場合とを不整合な要素と捉えることで,新たな世界に数学的知識を構築する契機となる．ものの形に着目して分類した世界における実体的対象をモデルに，直観的で無意識の具体的操作が許された世界，図形の構成要素に着目して分類した世界に新たな数学的知識がつくられることになる．数学的知識がつくられる二つの世界を区別することは，ものの形の仲間分けには，「ぴったり重なる」という意味で同じとみなされる場合（具体的操作に基づく）と，「○○に着目すると同じ特徴を持つ」という意味で，ある観点（図形の構成要素やそれらの関係）を設定することで同じ仲間としてみなされる場合（図形の性質に基づく）の 2 通りがあること，並びに，両方に関連する図形があることを知る上で意味がある.

②　図形を写し取る活動

この局面では，具体的操作が許されない世界で,「ぴったり重なる」をいかに判断すればよいかが児童・生徒にとっての目的となる．図形の具体的操作において,「ぴったり重ねる」という具体的操作が許される場合と許されない場合とを不整合な要素と捉えることで，新たな世界に数学的知識を構築する契機となる．直観的で無意識の具体的操作が許された世界における操作的存在をモデルに，作図・測定が許された世界に新たな数学的知識がつくられることになる．そして，作図・測定が許された世界を，さらに二つの世界「操作に着目した作図・測定が許された世界」「構成要素に着目した作図・測定が許された世界」に区分する．作図・測定には，操作自体を抽象化する方法と図形の構成要素に着目する方法の二通りがあること，並びに，それらの関連性が明らかにされる点で意味がある.

③　図形の性質の相互関係，並びに，図形の成立条件を考察する活動

この局面では，一つの仲間として同定された図形には，他にどのような性質があるのかを作図・測定を通して探ることが児童・生徒にとっての目的である．図形の性質の相互関係を探る活動を通して,「正方形は長方形か」といった図形の定義とその性質との関係に不整合な要素を見出すことで，新たな世界に数学的知識を構築する契機となる．図形の構成要素に着目して分類された世界の実体的対象をモデルに，図形の性質の相互関係に着目して分類された世界に新たな数学的知識がつくられることになる．そして，図形の性質の相互関係においては，背反的関係に着目して分類された世界と包摂的関係に着目して分類された世界を区別する．図形の性質の相互関係には，二通りの解釈があること，並びに，それらの関連性を知るという点で意味がある．さらに，図形が成立するための条件を探る活動を通して，これまで図形の帰納的推論

が前提とされていた点に気付く．「A ならば B である」という帰納的推論とその逆の「B ならば A である」という推論を不整合な要素として捉えることで，命題が演繹的に考察されるようになる．すなわち，図形の帰納的推論が許された世界における実体的対象，操作的存在をモデルに，図形の演繹的推論に基づく初等幾何学的考察が許された世界に新たな数学的知識がつくられることになる．

④　図形の決定条件を基に構成要素同士の数量関係を探る活動

図形の決定条件が明らかになると，わかっている数量からわからない数量をいかにして求めればよいかが児童・生徒にとって目的となる．変数間の数量関係を考察する活動を通して，図形の構成要素である一つの数量が作図・測定では求められるが，数式処理では求められないことを不整合な要素と捉えることで，新たな世界に数学的知識を構築する契機となる．作図・測定が許された世界, 数式処理を伴わない初等幾何学的考察が許された世界における実体的対象, 操作的存在をモデルに，数式処理を伴う初等幾何学的考察が許された世界に新たな数学的知識（三平方の定理，正弦・余弦定理等）がつくられることになる．作図・測定が許された世界，数式処理を伴わない初等幾何学的考察が許された世界の区別は，作図・測定が許された世界における操作的存在をモデルに，初等幾何学的考察が許された世界に図形の決定条件という数学的知識がつくられるという点で意味がある．

⑤　図形の具体的操作から論証への活動

どのように操作したらよいのか，並びに，操作の結果できた図形がどのような性質を持っているのかを証明することが生徒にとっての目的となる．図形の分解・構成に関わる多様な操作活動を行う際，自分では操作できたものの友達にはうまく伝わらないという状況を不整合な要素と捉えることで，新たな世界に数学的知識を構築する契機となる．図形の無意識の具体的操作が許された世界における操作的存在をモデルに，図形の組織的な具体的操作が許された世界に新たな数学的知識（平行移動，回転移動，対称移動等）がつくられることになる．また，図形の具体的操作に伴う図形の性質が探究されると，図形の作図・測定では大まかに確かめられるが，一般性，厳密性，構造の理解といった点で不十分であることを不整合な要素として捉えることにより，初等幾何学的考察が許された世界との行き来が奨励されることになる．図形の作図・測定が許された世界は，具体的操作の前後の図形が一つの図形として作図されることにより，それをモデルに，初等幾何学的考察を可能としている点で意味がある．その際，初等幾何学的考察に関しては，数式処理が伴わない考察と数式処理を伴う考察とを区分することが可能であり，両者の世界の違いを生徒に意識させることによって，未知な要素が顕在化し，より深い理解が促されることになる．ここでは，大きな三つの世界に跨る活動が行われると共に，具体的操作が許された世界と初等幾何学的考察が許された世界では，さらに世界を区分することで，より深い理解を促す活動が行われることになる．

⑥　ものの位置を記号的表現で伝える活動

ものの位置を人に伝えることが児童・生徒にとっての目的となる．ものの位置を表現する際に，ものの位置を図的には表現できるが，記号的には表現できないことを不整合な要素と捉えることで，新たな世界に数学的知識を構築する契機となる．図的表現が許された世界における実体的対象をモデルに，記号的表現が許された世界に新たな数学的知識がつくられることになる．そして，ものの位置を記号的に表現するには，直交座標により表現できる世界と極座標により表現できる世界をさらに区分して考える．両者の世界を対比することにより，複数の表現方法が存在すること，並びに，長さだけでなく角度を利用しても表現できることを知るという

点で意味がある．

⑦　座標平面上で初等幾何を考察する活動

この局面では，初等幾何学的性質による推論が，座標を基にした記号（数式）的操作ではどのように表現・思考できるかが生徒にとっての目的となる．初等幾何を考えていく際，点の位置が座標平面上に表現できるのに対し，図形の位置とその性質が座標平面上で表現できないことを不整合な要素と捉えることで，新たな世界に数学的知識を構築する契機となる．初等幾何学的考察が許された世界，関数の式表現，グラフ表現が許された世界における実体的対象，操作的存在をモデルとして，座標平面上での図形の考察が許された世界において新たな数学的知識がつくられることになる．関数のグラフ表現，式表現は，図形の実体的対象を座標幾何へと抽象化していくための媒介としてのモデルの役割を果たしている点で意味がある. 局面 6 では，ものの位置が座標平面上で表現されたが，それに加えて図形の性質等が座標平面上で考察可能になるわけである．

⑧　移動・変換の記号（数式）的操作を開発する活動

この局面では，具体的操作による移動・変換を，数式により記号的に表現・処理できないかが生徒にとっての目的となる．図形の操作・変換を考えていく際，図形の位置・性質等が座標平面上での記号的操作として表現できるのに対し，図形の操作・変換が座標平面上での記号的操作として表現できないことを不整合な要素と捉えることで，新たな世界に数学的知識を構築する契機となる．座標平面上に視覚的に作図・測定された図形をモデルとして，行列変換という新たな数学的知識が構築される．その際，変換の記述においては，関数がモデルとして活用されている点に留意する必要がある．さらに，行列変換が構築されると，具体的操作が許された世界との行き来により，行列変換が合同変換，相似変換だけでなく，正方形を平行四辺形に変換する特徴（アフィン変換）も併せ持っていることに気付く．角度を不変量とした変換を記述する新たな記号的操作の構築が想起される．そこで，ベクトルの加減，正負の数の乗除をモデルに，複素数変換という数学的知識が構築される．複素数変換は，行列変換の特殊な変換であることが確認される．

⑨　初等幾何における命題を体系化する活動

この局面では，何を公理にして何を順番に導いていくか，その体系化が生徒にとっての目的となる．初等幾何学的考察が許された世界において，命題が循環論法になることを不整合な要素と捉えることで，新たな世界に数学的知識を構築する契機となる．初等幾何学的考察が許された世界における命題をモデルに，体系的な幾何学的考察が許された世界に新たな数学的知識がつくられることになる．

さらに，(d)についてまとめると次のようになる．

実体的対象と操作的存在は，ものの形の弁別において引き出され，前者は「○○に着目すると同じ特徴を持つ」という図形の構成要素やそれらの関係に着目する中で，後者は「ぴったり重ねる」という具体的操作の中で原初的に表れる．ものの形の弁別が，二通りの見方により抽象化できることを知るという意味で，数学的知識は成長している（第 1 の局面）．

しかし，「ぴったり重ねる」という具体的操作は，構成要素に着目した作図・測定と，操作自体を表現しようとした作図・測定に枝分かれすることになる．前者においては，図形の実体的対象の考察から引き出された構成要素に着目する考えが有効に生かされていることがわかる.「ぴったり重ねる」という具体的操作が二通りの方法により抽象化できることを知るという意味で、数学的知識は成長している（第 2 の局面）．

また，図形の構成要素に着目して図形の性質が考察されると，それらの関連性が気になりだし，図形の背反的関係，包摂的関係に目が向けられるようになる．さらに，生活の中で図形を見出す活動からその逆の活動に焦点が当てられ，論証の第一歩目へと踏み出すことになる．図形の弁別には，背反的関係と包摂的関係の二通りの捉えがあること，並びに，論証の必要性を知るという意味で，数学的知識は成長している（第３の局面）．

一方，図形の決定条件が明らかになると，わかっている数量からわからない数量をいかにして求めればよいかといった数量関係が気になりだし，作図・測定が許された世界から数式を用いた記号的操作が許された世界に数学的知識がつくられることになる．ここでは，図形の実体的対象の考察から引き出された図形の性質が活用されることになる．三平方の定理，余弦定理，正弦定理等が導出されるという意味で，数学的知識は成長している（第４の局面）．

そして，図形の具体的操作は，複雑な図形の分解・構成の問題に遭遇することにより，具体的操作自体にふたたび焦点が当てられることになる．いかに操作したかを友達に説明する必要性が生じたところで，試行錯誤による具体的操作から，「ずらす」，「まわす」，「ひっくり返す」といった組織的な具体的操作が引き出されると共に，操作同士の関係にも徐々に光が当てられるようになる．そして，組織的な具体的操作により分解・構成された図形には，どんな性質があるのかが問いとして引き出され，作図・測定を媒介として，実体的対象としての図形の考察（図形の論証）が問題になる．図形の論証では，組織的な操作（作図を伴う）が許された世界と初等幾何学的考察が許された世界との行き来に焦点が当てられる．そして，初等幾何学的考察が許された世界では，数，文字式が利用されるようになり，複数の世界間の行き来に広がりを見せることになる．組織的な具体的操作が引き出されること，並びに，図形の論証に数・文字式を利用できることを知るという意味で，数学的知識は成長している（第５の局面）．

ものの位置を人に伝えるためにはどうすればよいかが児童・生徒にとっての目的となることで，地図等の点の位置関係に着目した図的表現による世界から，数を用いた記号的表現による世界に数学的知識がつくられることになる．直交座標，極座標といった二つの考えが導出されるという意味で，数学的知識は成長している（第６の局面）．

座標が導入されると，図形を座標平面上に表すことが可能になる．この局面では，初等幾何学的性質による推論が，座標を基にした記号（数式）的操作ではどのように表現・思考できるかが生徒にとっての目的となる．初等幾何学的な証明が，座標幾何を用いて証明できることを知るという意味で，数学的知識は成長している（第７の局面）．

実体的対象が記号で表現されるようになると，具体的操作自体も，しくみを明らかにして記号で表現できないかが問いにされる．図形の具体的操作自体が，座標平面上に描かれた図形をモデルとして，記号的に表現されることになる．行列変換，複素数変換といった数学的知識の導出である．そして，記号的操作が構築できると，図形の実体的対象に関わる論証が，図形の操作的存在に関わる行列変換，複素数変換をモデルとして考察されるようになる．図形の実体的対象の考察が操作的存在に翻訳されて考察されるわけである．そして，図形の実体的対象における同値関係が，変換の包摂関係によって捉えられるようになる．当初は，実体的対象がその構成要素とその関係によって分類されていたが，学習の進展に伴い，図形の操作・変換によって分類されるようになる点に注目する必要がある．行列変換，複素数変換の導出，並びに，それらが図形の実体的対象に関わる論証や図形の同値関係の新たな捉えにも活用できることを知るという意味で，数学的知識は成長している（第８の局面）．

また，局所的論証を繰り返す内に，循環論法に陥ることを経験すると，何を公理にして何を順番に導いていくか，その体系化が生徒にとっての目的となる．ここでは，局所的な初等幾何学的考察

が許された世界の中で，部分的につくられた命題同士が関連付けられ，体系化されるという意味で，数学的知識は成長している（第９の局面）．

このように，図形の実体的対象（目に見えるもの）を対象とした同値関係の考察と，図形の操作的存在（目に見えないもの）を対象とした操作・変換の考察は，お互いに影響を与えながら図形領域における数学的知識を成長させていることがわかる．そして，各々の局面で新たな数学的知識が開発された後は，それらを利用する活動が奨励されることになる．複数の世界を行き来することにより，当面した問題の構造の理解が深まると共に，当面した問題を対比の対象としてのモデルとして取り扱うことにより，複数の世界における数学的知識の同異が議論される．「モデルとして利用する」と「モデルを基につくる」の二つの目的を有機的に関連づけながら考察することにより，数学的知識が持続的に成長していくことになる．

２．図形の具体的操作と論証を行き来する活動の教材開発

Ｖの１で考察した垂直カリキュラムの構想における第５の局面「図形の具体的操作から論証への活動」において，複数の世界（具体的操作が許された世界，作図・測定が許された世界，初等幾何学的操作が許された世界）を行き来する活動に焦点を当てた二つの教材を開発した．開発した教材については，下記の３点から分析・評価された．

①世界の区分をどのように捉え，複数の世界の行き来がどのようになされるか

②各々の世界につくられたモデルが果たす役割は何か

③数学的知識は，どのような過程を経て，どのように成長するのか

まず①に関しては，一つ目の教材「黄金長方形の折り方」（池田・渡邊，2010）では，具体的操作が許された世界と初等幾何学的考察が許された世界との行き来がなされ，二つ目の教材「長方形を切り分け正方形をつくる」（池田・渡邊，2010）では，具体的操作が許された世界，作図・測定が許された世界，初等幾何学的考察が許された世界の三つの世界の行き来がなされる．そして，具体的操作が許された世界では，直観的で無意識の具体的操作が許された世界と組織的操作（平行移動，回転移動，対称移動等）が許された世界を区分することで，新たな世界に数学的知識をつくる活動が促されることになる．この点に関しては，二つ目の教材で具体化される．さらに，初等幾何学的考察が許された世界では，数式処理がない場合とある場合を区分することで，「こちらの世界にはあるがあちらの世界にはない」という視点から未知な要素が顕在化し，より深い理解に繋がる活動が促されることになる．この点に関しては，二つの教材で具体化される．また，一旦問題の解決が終わると，考えてきた問題をモデルとして捉え直し，複数の世界における数学的知識を対比して，各々の特徴を考察していくことになる．この点に関しても，二つの教材で具体化される．

次に，②のモデルの果たす役割に関する分析では，次の二つの役割が共通に見出せる．

・仮想空間としての役割：既に構築した数学的知識があるが故に独立に処理できる

・対比の対象としての役割：複数の世界における数学的知識の同異が対比できる

初等幾何学的考察１（数式なし）と初等幾何学的考察２（数式あり）を区分することで，どちらの世界にモデルをつくって考えるかが問題解決の一つの選択肢になると共に，解決後に両者の手法を比較することにより，各々の特徴が明らかにされることになる．両者を区別して教材研究を行うよさが確認できる．

また，二つ目の教材においては，さらに次の二つの役割が見出せる．図形の無意識の具体的操作から組織的な具体的操作への移行において，具体化したモデルを活用していることがわかる．

・仮想空間としての役割：馴染みのある世界でイメージを伴いながら思考・説明できる

・仮想空間としての役割：具体的操作を通して解決の見通しが立てられる

前者では，図形の直観的で無意識の具体的操作を大切にし，それを振り返ることで組織的な操作への移行が可能になる点を示唆している．また，図形の移動を伴う教材では，具体的操作の前後を一つの図として作図することが，初等幾何学的考察を進める上で有効であることがわかる．図形の具体的操作と初等幾何学的考察を繋ぐ媒介として，作図・測定が許された世界を設けるよさが確認できる．

最後に，③の数学的知識を成長させる再帰的な活動に関する分析では，両方の教材において，第１の活動から始まり，第２の活動，第３の活動を経て，第１の活動へと戻っていき，最後に第２の活動で終わるという流れになっている．これは，目的①と目的②が有機的に関連づけられながら活動が進展していることを意味する．応用指向，構造指向といった二元論に陥らず，両者が互いに影響を与えながら，数学的知識を持続的に成長させていく活動になっていることがわかる．

３．図形の具体的操作と記号的操作を行き来する活動の教材開発

Ｖの１で考察した垂直カリキュラムの構想における「⑧移動・変換の記号（数式）的操作を開発する活動」において，図形の変換の記号的操作の構築（行列と複素数）を目標に，そこに至るまでの素地指導，取り扱う教材とその指導系列について具体化した．具体的操作とは独立した記号的操作をつくる活動である．図形の具体的操作をモデルに，行列変換，複素数変換が導出されることになる．

開発した教材については，行列変換という記号的操作の構築，複素数変換という記号的操作の構築，二つの変換の対比の三つに分けて，下記の３点から分析・評価された．

①世界の区分をどのように捉え，複数の世界の行き来がどのようになされるか

②各々の世界につくられたモデルが果たす役割は何か

③数学的知識は，どのような過程を経て，どのように成長するのか

その結果，下記の３点が主な特徴として抽出された．

一つ目は，当初は解決すべき問題として捉えていた図形の具体的操作が，問いが進展する中で，記号的操作を構築するためのモデルになり，さらには，二つの変換（行列変換，複素数変換）の違いを明確化するためのモデルに変わっていく点である．繰り返し図形の具体的操作が取り扱われるが，その目的は，活動の進展に伴い変化していく点が特徴的である．数学的知識を成長させる再帰的な活動に照らし合わせたとき，第１の活動で解決すべきであった問題が，第２の活動，第３の活動，第４の活動では，対比の対象としてのモデルとして各々の世界の数学的知識の同異を対比したり，仮想空間としてのモデルとして馴染みのある世界でイメージを伴いながら思考・説明したりするために用いられることになる．

二つ目は，具体的操作が許された世界における事実と，各々の記号的操作（行列変換，複素数変換）が許された世界における事実を対比的に取り扱い，共通点・相違点を検討していくことで新たな問いが次から次へと生まれてくる点である．これは，具体的操作が許された世界における事実と各々の記号的操作が許される世界における事実の対比により，未知な要素，不整合な要素が見出され，それを明確化したり拡張したりすることで，数学的知識が成長していくことになる．例えば，行列変換における数学的知識が成長していく再帰的な活動を取り上げて説明する．

図形の移動・変換が具体的操作で行えるのに，その記号的操作ができない状態を不整合な要素と捉えることで，新たな変換（行列変換）を構築していく動機づけとなる．第２の活動から第４の活動が促されたことになる．１変数の１次式に基づく変換式①が開発されるという意味で，数学的知識が成長している．しかし，この変換式①では，平行移動，拡大・縮小等の図形の操作は表現しているものの，回転させながら拡大させる操作はまだ表現できていないことがわかる．第２の活動に

戻り，適用範囲を明確にしている．変換式①の適用範囲が明確になるという意味で，数学的知識は成長している．そこで，変換式①の適用できる場合と適用できない場合を不整合な要素と捉えることにより，拡張した変換式を構築していくことになる．第 4 の活動への移行である．2 変数の 1 次式に基づく変換式②が開発されるという意味で，数学的知識は成長している．ここで，第 2 の活動に戻り，再びモデルの適用範囲を明確にする行為がなされる．そうすると今後は，平行移動，拡大・縮小，回転等は表現しているものの，未知なる図形の変換まで表現していることが見えてくる．ここで，第 3 の活動へ移行し，どのような変換を表現しているかを探ることになる．その結果，平行性を保つ変換であることが明らかにされると共に，現実の世界にそれに整合する要素「窓から差し込んだ太陽光線が床に映し出す図形の変換」, 整合しない要素「プロジェクタで映し出す図形の変換」を見出すことになる．変換式②の特徴が明らかにされると共に，変換式②に適合する要素，適合しない要素が見出されるという意味で数学的知識は成長している．また，第 2 の活動へと戻り，数学的知識を整理することで，新たな二つの問いが引き出される．一つは,「プロジェクタで映し出す図形の変換を記号的操作で表現することはできないだろうか」という問いであり，もう一つは,「図形の平行移動，拡大・縮小，回転だけを表現した，角度を変えない変換が記号的操作で表現できないか」という問いである．第 4 の活動が引き続き促されていることがわかる．射影変換，複素数変換の構築が促されているという点で数学的知識は成長している．

このような数学的知識の成長過程は，互いが互いを成長させてくれるというモデルの相互啓発的な性格であり，モデル志向の核心となる点である．

三つ目は，行列変換，複素数変換が構築された後に，両者の違いを振り返る活動である．数学的知識を成長させる再帰的な活動における第 2 の活動である．その結果,「行列変換は等角ではなく，平行性を保持する変換であるのに対し, 複素数変換は等角な変換であること」「行列変換の世界では，位置を表す座標と作用素としての変換行列を区別しているのに対し，複素数変換の世界では，位置と作用素としての変換を同時に複素数で表現していること」の 2 点が明確化される．図形の具体的操作を対比の対象として両者を比較することで，両者の違いが明確になり，各々の変換の特徴が明らかにされる．

Ⅵ. 本研究の成果と今後の課題

本研究の目的は，応用指向と構造指向といった二元論から離脱し，両者が互いに影響を与え合うことで数学的知識が絶えず成長していく活動を具現化するための教材開発の枠組みを構築すると共に，その枠組みを基に，局所的な立場と大局的な立場から教材を開発することにあった．上記の目的に関して，三つの成果を取り上げることができる．順に述べていくことにする．

一つ目の成果は，目指す方向の異なる応用指向と構造指向をモデルという視点から統合的に捉え，学校数学において，一つの世界から新たな世界へと脱皮を繰り返し，複数の世界を行き来することで，数学的知識が絶えず成長していく活動が具現化されることを意図した教材開発の枠組みを構築したことにある．

二つ目の成果は，応用指向と構造指向といった二元論，並びに，伝統的な二つの世界に区分した活動の枠組みから脱皮し，複数の世界を行き来する活動として五つの教材を開発したことにある．見方を変えると，複数の世界を行き来する活動を意図した教材研究のよさが，教材開発を通して事例的に明らかにされたことになる．

三つ目の成果は，小中高に跨る図形領域における世界の区分・移行と複数の世界を行き来する活動が同定できたと共に，図形の具体的操作・論証から記号的操作（行列変換・複素数変換）の構築に関わる教材が開発できた点にある．

三つの成果を通しての本研究のオリジナリティーは，主に下記の 2 点である．

一つ目は，応用指向，構造指向といった異なる考えに基づく別々の活動を，一つの世界から新たな世界へと脱皮を繰り返し，複数の世界を行き来することで，数学的知識が絶えず成長していく活動（複数の世界を行き来する活動）として統合した点にある．複数の世界を行き来する活動の枠組みで捉えることにより，問題を解決するための思考を手助けしたり促進したりしてくれると共に，数学は抽象化を繰り返し，数学的知識を持続的に成長させることを可能にしてくれる．ここで，知識の成長の捉えにも注目したい．新たな世界に数学的知識を開発するといった革命的な知識の成長を核としつつも，開発された数学的知識の適用範囲を広げたり，その限界を明確にしたり，既存の数学的知識の関連性を探って整理したりといった累積的な知識の成長にも目を向けている点が特徴的である．

二つ目は，小・中・高に跨る図形領域の内容を，図形の実体的対象（目に見えるもの）を対象とした図形の同値関係と，図形の操作的存在（目に見えないもの）を対象とした図形の操作・変換が，互いに影響を与えながら数学的知識を成長させていく活動系列として捉え直し，特に，図形の具体的操作を基に記号的操作（行列変換，複素数変換）が構築される活動過程を教材化した点にある．

最後に，本研究における今後の課題について，主に 3 点取り上げる．

一つ目は，本研究における教材開発が，内省的な方法でなされている点である．教材開発を考えたとき，次の 2 つの立場が考えられる．一つは，ある特定の単元である教材がどのように取り扱えるかといった，学習内容を特定した上でそこで取り扱える教材について授業実践等を行い分析・評価していく，間口を狭めたローカルな教材研究である．もう一つは，ある一つの素材を深め広げていくことを中心におき，どこで使えるか，生徒はどのように反応するか等は次の課題として位置づける，長期的でグローバルな教材研究である（池田，2010）．本研究の内省的な方法でなされた教材開発は，後者の立場が中心である．後者の利点は，自由な枠の中でこそ，面白い教材を掘り出せる可能性が高いことにある．ただし，後者における教材研究を一つの成果として蓄積し，それを参照の上で前者の教材研究へと移行して，2 段階構成で教材研究を進めていく必要がある．それ故，本研究においても，開発された教材を基に，授業実践等を通して，生徒がどのように考えるかを分析し，検討・修正を加えていく必要がある．

二つ目は，複数の世界を行き来する活動の学習指導への位置づけである．本研究で開発された教材は，どのように学習指導に位置づけられるであろうか．一つは，本教材の展開例で述べるように，複数の世界における数学的知識を学習した後で，それらを行き来する学習活動を取り上げるといった集中的な取り扱いが考えられる．中学校・高等学校での取り扱いが主流となる．それに対して，もう一つの位置づけ方がある．それは，小・中・高といった長期的なスパイラル学習を想定して，学習が進展していく中で，同じ教材を繰り返し取り上げていく方法である．小学校では，具体的操作でしか解決できなかった問題が，中学校での初等幾何学的考察 1･2，高等学校での座標幾何，行列・複素数変換を学習する中で，同じ教材が児童・生徒に違った形で見えてくるような指導である．児童・生徒にとっては，当面した問題をいかに解決するかに止まらず，当面した問題を一つの具体例として捉え，児童・生徒が獲得してきた算数・数学を見つめ直し，それらの特性を明らかにしていくことになる．いかに問題を解決するかを考えると共に，児童・生徒が獲得した算数・数学を関連づけ，数学的知識を成長させていくことに繋がっていくわけである．このような考えを基に，具体的教材を学習指導にどのように位置づけていくかは今後の研究に委ねる．

三つ目は，図形領域における複数の世界の行き来を通して数学的知識が成長する九つの局面（数学的知識を成長させる再帰的な活動における第 4 の活動）に関する点である．本論文で示した九つの局面は，平面図形を中心とした一つのモデルであると共に，コンピュータの使用は想定していない．空

間図形はどのように位置づけられるか，コンピュータの使用を前提とするとこれらの九つの局面はどのように変わるのかを考えていく必要がある．さらに言えば，本節での垂直カリキュラムの構想は，算数・数学学習の中の図形領域に焦点を当てて言及しているため，モデルを志向した数学教育の立場から考えると，算数・数学という全体からの考察も考えていく必要がある．これらの点については，今後の研究に委ねる．

［引用・参考文献］

Beth, E.,& Piaget, J.(1966). *Mathematical epistemology and psychology* (W. Mays, Trans.). Dordrecht, The Netherlands: D.Reidel.

De Lange, J.(1996). Using and Applying Mathematics in Education, In Alan J. Bishop, *International Handbook of Mathematics Education*, *Part one* (pp.49-97), Kluwer Academic Publishers.

Fishbein, Efraim(1987). *Intuition in Science and Mathematics*, Mathematics Education Library, D.Reidel, pp.123-124.

Freudenthal, H.(1991). *Revisiting Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K.(2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling, In Werner Blum, Peter L. Galbraith, Hans-Wolfgang Henn and Mogens Niss, *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study* (pp.137-144), Springer.

Hesse, Mary B.(1966). *Models and Analogies in Science,* University of Notre Dame Press.

ヘッセ，M.著/高田紀代志訳（1986）.『MODELS AND ANALOGIES IN SCIENCE，科学・モデル・アナロジー』，培風館.

平林一榮（1987）．『数学教育の活動主義的展開』，東洋館出版社.

Hoffer, Alan(1983). Van Hiele-Based Research, In Richard Lesh and Marsha Landau, *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (pp.205-227), Academic Press.

彌永昌吉　(2008)．『数学のまなび方』，ちくま学芸文庫.

池田敏和（2010）.「まずは自分で教材研究し、自分で面白いと思えること」,『数学教育』, No.630, 明治図書，pp.4-7.

池田敏和・渡邊公夫 (2010).　「図形領域における複数の下位体系を行き来する活動に焦点を当てた教材開発」，『数学教育学会誌』，Vol.51/No.1･2，数学教育学会，pp.39-50.

Ikeda, T., Stephens, M. and Wada, Y. (2012). A Teaching Experiment in Modelling through Scale Reduction Methods: A Bridge to Later Trigonometric Methods, *Journal of Mathematics and System Science*, Volume 2, Number 6 (Serial Number 7), pp.359-367.

池田敏和(2013).「モデルに焦点を当てた数学的活動に関する研究の世界的傾向とそれらの関連」，『日本数学教育学会誌』第 95 巻 第 5 号，pp.2-12.

Ikeda, T. (2013). Pedagogical Reflections on the Role of Modelling in Mathematics Instruction, In Gloria Stillman et.al. (ed.), *Mathematical Modelling: Connecting to Practice – Teaching practice and the practice of applied mathematicians* (pp.255-276)*,* Springer.

岩崎秀樹（2007）．『数学教育学の成立と展望』，ミネルヴァ書房.

クーン，トマス・Ｓ（1985）.「発見の論理か研究の心理学か」，イムレ・ラカトシュ，アラン・マスグレーヴ編／森博監訳，『批判と知識の成長』（pp.10-39），木鐸社.

古藤怜・金子忠雄（1974）.『幾何教育と変換の考え』，近代新書出版.

Niss, M. (2008). Perspectives on the balance between applications and modelling and 'pure' mathematics in the teaching and learning of mathematics.　In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction　(1908-2008) Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp.69-84). Rome: Enciclopedia Italiana.

Pinker, A (1981). The Concept 'Model' and its Potential Role in Mathematics Education, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* Vol.12, No.6, pp.693-707.

ポパー，カール著，森博訳（1974）.『客観的知識』，木鐸社.

ラカトシュ著，ウォラル・ザバール編，佐々木力訳（1980）.『数学的発見の論理－証明と論駁』，共立出版.

Shibata，T.（1973）.　The role of axioms in contemporary mathematics and in mathematical education, *Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (pp.262-271), Cambridge University Press.

柴田敏男（1974）．「構造の考えと公理的方法」，中島健三・大野清四郎編著，『現代教科教育学体系４　数学と思考』（pp.170-191）．第一法規.

Streefland,L.(1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education, a Paradigm of Developmental Research*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Treffers,A.(1987).*Three Dimensions,* Mathematics Education Library, D.Reidel Publishing Company.

Van Hiele,P.M.(1984). A child's thought and geometry. In D.Geddes, D.Fuys, & R.Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P.M. van Hiele* (pp.243-252). Research in Science Education (RISE) Program of the National Science Foundation. Washington, D.C.:NSF.

Wittmann, Erich Ch.著，國本影亀・山本信也訳(2004).『算数・数学　授業改善から教育改革へ』，東洋館出版社.