

2014年9月22日

学位論文審査要旨

論文題目	モデルを志向した数学教育の展開
博士学位論文提出者氏名	池田 敏和
申請学位	博士（教育学）
合否判定研究科委員会開催日	2014年10月28日
博士学位論文審査判定結果	合格
公開発表会開催日	2014年9月20日
論文審査修了年月日	2014年9月20日

主任審査員	渡邊公夫
審査員	小林和夫
審査員	谷山公規
審査員	磯田正美（筑波大学教授）

審査要旨

本論文は、数学教育において繰り返し議論されてきた「応用指向」と「構造指向」といった二律背反する考えの関連性に焦点を当てている。応用指向とは、数学の応用を教えることを第1に考える立場で、構造指向とは、数学そのものを教えることを第1に考える立場である。従来の数学教育では、時代の流れと共に両者が交互に強調されてきたが、活動を通して数学的知識を持続的に成長させることを意図したとき、両者をいかに有機的に関連づけて指導していくべきかが重要な論点となってくる。

このような背景の基に、応用指向と構造指向といった二元論から離脱し、両者が互いに影響を与え合うことで数学的知識が絶えず成長していく活動を具現化するための教材開発の枠組みを構築すること、並びに、その枠組みを基に、局所的な立場と大局的な立場から教材を開発することを本研究の目的として設定している。

本論文の成果は、大きく三つに分けることができる。一つ目の成果は、目指す方向の異なる応用指向と構造指向をモデルという視点から統合的に捉え、学校数学において、一つの世界から新たな世界へと脱皮を繰り返し、複数の世界を行き来することで、数学的知識が絶えず成長していく活動を具現化するための教材開発の枠組みを構築したことにある。複数の世界を行き来する活動の枠組みで捉えることにより、問題を解決するための思考を手助けしたり促進したりしてくれると共に、数学は抽象化を繰り返し、数学的知識を持続的に成長させることを可能にしている点が独創的である。ここで、知識の成長の捉えに注目したい。新たな世界に数学的知識を開発するといった革命的な知識の成長を核としつつ

も、開発された数学的知識の適用範囲を広げたり、その限界を明確にしたり、既存の数学的知識の関連性を探って整理したりといった累積的な知識の成長にも目を向けている点が特徴的である。

二つ目の成果は、応用指向と構造指向といった二元論、並びに、伝統的な二つの世界（現実の世界と数学の世界）に区分した活動の枠組みから脱皮し、複数の世界を行き来する活動として五つの教材を開発したことにある。見方を変えると、複数の世界を行き来する活動を意図した教材研究のよさが、教材開発を通して事例的に明らかにされたことになる。

三つ目は、小中高に跨る図形領域における世界の区分・移行に基づき、複数の世界を行き来することで新たな数学的知識が構築される九つの局面が同定されたと共に、図形の具体的操作・論証から記号的操作（行列変換・複素数変換）の構築に関わる教材が開発された点にある。小・中・高に跨る図形領域の内容を、図形の実体的対象（目に見えるもの）に関わる図形の同値関係と、図形の操作的存在（目に見えないもの）に関わる図形の操作・変換とに大別すると共に、両者が互いに影響を与えるからこそ数学的知識が成長していくのだという考えによって捉え直している点が独創的である。そして、特に、図形の具体的操作を基に記号的操作（行列変換、複素数変換）が構築される活動過程を教材化しており、図形の具体的操作が許された世界と記号的操作が許された世界とをふりこのように行き来することを通して、「互いが互いを成長させる」というモデル志向の核心を具体化している。

本論文は、4章で構成されている。

第1章では、応用指向と構造指向の違いを、現実の世界と数学の世界といった二つの世界の行き来の違いとして解釈し、両者を、「目的はある一つの世界で生じ、物事のしくみ（構造）を明らかにする目的の基で、もう一つの世界にあるモデルを活用することで目的を達成する」という点から統合している。このような見方により、応用指向においては、現実の世界の問題を解決し終えた後で、複数の世界における数学的知識をどのように用いたのかを振り返ることで、数学的知識を整理・統合するといった構造指向の考えにも繋がっていくこと、逆に、構造指向においても、構築した数学的知識の構造が現実世界の中に見出せないかを探ることにより、現実世界におけるものの見方を豊かにする応用指向の考えに繋がっていくとしている。両者は対立した考えではなく、両方向の活動が共に影響を与えることによって、現実の世界、数学の世界が共に成長していくと共に、二つの世界を繋ぐ関係自体も成長していくという考えへと導いている。そして、この考えを基に、モデルに関わる数学教育研究の世界的な傾向について同定すると共に、本研究の課題を同定している。

第2章では、数学教育における応用指向と構造指向に対応する二つの方向からの目的について概観した上で、モデルの二つの役割について言及している。一つは、仮想空間としてのモデルの役割であり、もう一つは、対比の対象としてのモデルの役割である。そして、

一つ目の役割において、数学では抽象化が繰り返されるという性格から、複数の世界へと跨る活動を考え、二つ目の役割において、複数の世界における考察を対比することで数学的知識が成長していくという性格から、複数の世界を行き来する活動を推奨していくことになる。そして、数学的知識は直線的に一定の割合で成長していくものではなく、革命的な知識の成長が節目となって要所要所に位置づけられ、その節目と節目の間では、累積的な知識の成長がなされるという立場から、事例分析を通して、数学的知識を成長させる再帰的な活動を精緻化している。具体的には、再帰的な四つの活動（①複数の世界にモデルをつくり問題を解決する、②複数の世界に跨る数学的知識の同異と関連性を整理する、③未知な要素を探り、適用範囲を明確にする、④不整合な要素を探り、拡張・統合により新たな数学的知識を構築する）として特定している。このような考えを基に、複数の世界を行き来する活動に焦点を当てた教材開発の枠組みを、局所的な立場と大局的な立場から構築している。

ここで、注目したい点が、モデルの相互啓発的な性格である。上述の再帰的な活動の中では、複数の世界が対比的に扱われ、未知な要素、不整合な要素を原動力として、「互いが互いを成長させる」ことを可能にしている。問題が生じた世界を適宜捉え直しながら、複数の世界をふりこのように行ったり来たりすることによって、複数の世界における未知な要素、不整合な要素が新たな問いを引き起こすための原動力になり、各々の世界を互いに成長させることにつながっていくわけである。特に、不整合な要素は、新規な考えを引き出すことが要求され、革命的な知識の成長に繋がる重要な要因と言える。これが、モデルの相互啓発的な性格であり、複数の世界を行き来する活動の核心となる。

第3章では、モデル志向の教材開発の枠組みを基に、五つの教材「相似関係に着目した半円と二等辺三角形の各々における数量的関係の統合」「中点連結切りの適用範囲の拡大とその拡張」「2地点の距離から極限の基本定理へ」「バルーンの高さのモデル化」「緯度と夜の時間のモデル化」を開発し、その解決活動を教材開発の枠組みとして特定した三つの観点から分析している。

- ①世界の区分をどのように捉え、複数の世界を行き来がどのようになされるか
- ②各々の世界につくられたモデルが果たす役割は何か
- ③数学的知識は、どのような過程を経て、どのように成長するのか

例えば、「緯度と夜の時間のモデル化」では、夏至において、ある緯度から夜の時間を求めるにはどうすればよいか、さらには、1年間を通して考えるとどうなるかをモデル化していく活動に焦点を当てている。地球儀による具体的操作が許された世界における考察があるからこそ、作図・測定が許された世界での考察が可能になり、具体的操作、作図・測定での考察を振り返るがゆえに、三角比を用いた関数として表現することが可能になる。複数の世界を行き来することによって、活動が進展していくことがわかる。さらに、問題を解決した後で、複数の世界に跨る数学的知識を対比することにより、各々の世界の数学

的知識がどのような役割を果たすかを理解することが可能になる．応用指向から構造指向の考えへ繋がっていくことになる．

第4章では，図形領域に焦点を当て，小中高に跨る世界の区分とその移行を特定した上で，複数の世界を行き来することで新たな数学的知識が構築される九つの局面を同定すると共に，図形の具体的操作から行列変換・複素数変換が構築される活動過程を教材化している．

まずは，世界の区分とその移行について，van Hiele，彌永，Hoffer，古藤・金子の見解を基に，図形の実体的対象（目に見えるもの）と図形の操作的存在（目に見えないもの）を図形領域における大きな二つの世界として位置づけ，両者がどのように影響を与えながら成長していくのかを分析している．先行研究では，どちらか片方の世界における考察に留まっているため，両者が影響を与え合いながら，互いの世界を成長させていくというモデル志向の考えは，先行研究では考究されていない独創的な点といえる．

そして，この世界の区分と移行を基に，複数の世界を行き来する活動として，九つの局面（①ものの形を仲間分けする活動，②図形を写し取る活動，③図形の性質の相互関係，並びに，図形の成立条件を考察する活動，④図形の決定条件を基に構成要素同士の数量関係を探る活動，⑤図形の具体的操作から論証への活動，⑥ものの位置を記号的表現で伝える活動，⑦座標平面上で初等幾何を考察する活動，⑧移動・変換の記号（数式）的操作を開発する活動，⑨初等幾何における命題を体系化する活動）を同定している．これらの九つの局面は，数学的知識を成長させる再帰的な活動における第4の活動「不整合な要素を探り，拡張・統合により新たな数学的知識を構築する」に焦点を当てており，複数の世界を行き来するからこそ，新たな数学的知識が構築されることに言及している．

次に，開発した活動系列の中で，具体的操作から行列変換・複素数変換を構築していく活動に焦点を当て，教材開発を行っている．二つの変換を構築する活動では，次の三つが特徴的な点である．

（1）当初は解決すべき問題として捉えていた図形の具体的操作が，問いが進展する中で，記号的操作を構築するためのモデルになり，さらには，二つの変換（行列変換，複素数変換）の違いを明確化するためのモデルに変わっていく点である．繰り返し図形の具体的操作が取り扱われるが，その目的は，活動の進展に伴い変化していくことになる．

（2）具体的操作が許された世界における事実と，各々の記号的操作（行列変換，複素数変換）が許された世界における事実を対比的に取り扱い，共通点・相違点を検討していくことで新たな問いが次から次へと生まれてくる点である．これは，具体的操作が許された世界における事実と各々の記号的操作が許される世界における事実の対比により，未知な要素，不整合な要素が見出され，それを明確化したり拡張したりしていくことで，数学的知識が成長していく点である．例えば，行列変換における数学的知識が成長していく再帰的な活動を取り上げて説明する．

図形の移動・変換が具体的操作で行えるのに、その記号的操作ができない状態を不整合な要素と捉えることで、新たな変換（行列変換）を構築していく動機づけとなる。1変数の1次式に基づく変換式①が開発されるという意味で、数学的知識は成長している。しかし、この変換式①では、平行移動、拡大・縮小等の図形の操作は表現しているものの、回転させながら拡大させる操作はまだ表現できていないことがわかる。変換式①の適用範囲が明確になるという意味で、数学的知識は成長している。そこで、変換式①の適用できる場合と適用できない場合を不整合な要素と捉えることにより、拡張した変換式②を構築していくことになる。2変数の1次式に基づく変換式②が開発されるという意味で、数学的知識は成長している。そうすると今後は、平行移動、拡大・縮小、回転等は表現しているものの、未知なる図形の変換まで表現していることが見えてくる。その結果、平行性を保つ変換であることが明らかにされると共に、現実の世界にそれに整合する要素「窓から差し込んだ太陽光線が床に映し出す図形の変換」、整合しない要素「プロジェクタで映し出す図形の変換」を見出すことになる。変換式②の特徴が明らかにされると共に、変換式②に適合する要素、適合しない要素が見出されるという意味で数学的知識は成長している。ここで、数学的知識を整理することで、新たな二つの問いが引き出される。一つは、「プロジェクタで映し出す図形の変換を記号的操作で表現することはできないだろうか」という問いであり、もう一つは、「図形の平行移動、拡大・縮小、回転だけを表現した、角度を変えない変換が記号的操作で表現できないか」という問いである。射影変換、複素数変換の構築が促されているという点で数学的知識は成長している。このような数学的知識の成長過程は、互いが互いを成長させてくれるというモデルの相互啓発的な性格であり、モデル志向の核心となる点である。

(3) 行列変換、複素数変換が構築された後に、両者の違いを振り返る活動である。その結果、「行列変換は等角ではなく、平行性を保持する変換であるのに対し、複素数変換は等角な変換であること」「行列変換の世界では、位置を表す座標と作用素としての変換行列を区別しているのに対し、複素数変換の世界では、位置と作用素としての変換を同時に複素数で表現していること」の2点が明確化される。図形の具体的操作をモデル(対比の対象)として両者を比較することで、両者の違いが明確になり、各々の変換の特徴が明らかにされる。

各章の概要について述べてきたが、本論文における三つの成果は、応用指向と構造指向といった二律背反する考えを数学教育の中で統合的に取り扱うことを可能にすると共に、図形領域における小・中・高に跨る持続的な数学的知識の成長を可能とする数学科カリキュラムを開発する上での新たな視点を示唆している。今後の数学教育において、教材開発、カリキュラム開発を試みていく上での指針となる価値ある知見といえる。

以上のことより、本論文は博士(教育学)の学位論文として審査員全員一致で「合格」判定とする。