学　　位　　論　　文

指導教員　渡邊　公夫 教授

題　　目

算数・数学教育における教材研究方法の研究

早稲田大学大学院教育学研究科

教科教育学 専攻

吉井　貴寿

＜目次＞

序章

第１章　　教材研究の規定

第２章　　教材研究の理論

第３章　　否定利用に着目した教材研究

第４章　　定理の導出に着目した教材研究

第５章　　まとめと今後の課題

引用・参考文献

おわりに

＜図表一覧＞

（序章）

（第 1 章）

（第 2 章）

（第 3 章）

図表一覧

図表一覧

序章

本研究主題である教材研究という行為は，教育現場における優れた指導実践を実現するために必要不可欠なものである．これは，我が国の教師文化に深く根付いており，ほぼ全ての教員が多かれ少なかれ実践しているものである[1]．しかし，文化的行為として深く浸透していることと，その方法や機能が正確に把握されていることとは別である．得てして我々は普段当然のように使用している言葉ほど，その厳密な定義や使用方法を明確には把握していないものである．教材研究も決して例外ではない．古くから多くの教師により実践されてきたにもかかわらず，「教材研究とは何であり，如何になされるべきか」という基本的な問いに十分な答えは存在していない．本章第１節では，そういった現状をおさえた上で，本研究の背景と目的を論じ，教材研究を研究対象とすることの意義を明確化する．続く第２節では，研究目的を達成するために解決すべき課題と，そのための研究方法を示す．最後に第３節では，本論文の構成を示し，本研究の枠組みを整理する．

第１節　本研究の背景と目的

本節では研究の背景と目的を明確化することを目指すが，少し遠回りをして研究の動機から論じていくこととする．これにより，算数・数学教育における研究のあるべき姿や，教材研究を研究することのよさや意義などを明確にしておきたいと考えてのことである．しかし，第１項（本研究の動機）の内容は本論文の主張とは無関係のため，読み飛ばして頂いても構わない．第２項では，研究背景について論じる．そこでは，教師教育という観点からの現状整理や昨今の数学教育学の研究動向等に言及し，教材研究に関する研究が今日的にも注目すべきものであり，かつ必要性の高いものであることを示す．そして，そういった今日的課題の解決を研究目的に据えている．

１．本研究の動機

本論執筆にあたり，筆者が何故このような研究を行い始めたのか，その源泉はどこにあったのかを思考してみた．その結果，大別して２つの動機にいきついた．１つは指導教員をはじめとした他者からの影響であり，２つ目はそれにより形作られた自身の哲学による影響であった．本項では少し遠回りにはなるが，それら２つについて軽く論じておきたいと思う．これは自身のための覚書となるだけでなく，算数・数学教育における研究のあるべき姿や，教材研究を研究することのよさや意義を明確化することに繋がることであろう．また，合わせて教材研究に関する研究の難点についても言及しておく．

[1] 実際，小学校学習指導要領解説（算数編）の中にも，次のような記述がある．「各々の内容や方法などのもつよさを明らかにしていくような教材研究を進めることが重要である」（文部科学省，2008，p.22）

これも本論の主張とは関連が薄いものであるが，後輩研究者などのことを考え，本研究の経緯や特性についてふれておくのもよいであろう．

「算数・数学の教育は確かな数学の理解に基づいて行われるべきである．」という主張は古くからなされてきたものであり，基本的かつ重要な考え方である．筆者も算数・数学教育を学ぶ中で，指導教員から度々この基本を忘れぬように言われたものである．この主張の正しさは自明であり，疑う余地のないもののように感じられる．実際，この考えを否定する意見を聞くことはまずないであろう．しかし，現実を見ると必ずしもこの考えに基づいて教育活動が行われているとは言い切れない状態にある．と言うのも，教員の中には自身が受けてきた授業の模倣をしているだけの者も少なくない．子どもの頃に教わった知識以上の知識を持たずに教壇に立つ教員がいるのである．これは，まるで子どもが子どもに指導をしているような状態である．このような教育が繰り返されれば，徐々に伝達される情報は劣化していく．故に，教員は自ら学び続け，指導内容に関する知識を増加させていく必要がある．そして，これを支えるのが教材研究である．教師自身が指導内容の理解を深め，それに基づいた指導を構築するためには教材研究が欠かせない．そういった意味で，「算数・数学の教育は確かな数学の理解に基づいて行われるべきである．」という教えは，教材研究の重要性の認識へと繋がっていたわけである．これが，教材研究を研究対象とした１つ目の主な動機である．

筆者を取り巻く環境では，依然として算数・数学教育が一つの学問足るか否かが問われていた．算数・数学教育学が成立し，学位も授与されるようになってはいるが，このような問いかけは今なお生き続けている．筆者は決して多くの算数・数学教育学者に囲まれて育ってきたわけでは無い．どちらかと言えば，多くの数学者に囲まれて算数・数学教育学を学んできた身である．それ故に，この問いかけは度々目の前に立ちはだかった．その中で，学問とは何かを思考し，算数・数学教育学が一つの学問足るか，自身の研究は学術的であるかという問いを常に抱いていたように感じる．この問いについては，既に多くの先行研究でも言及されており，様々な見解が得られている[2]．ここで，これらについて詳述することは避けるが，端的に筆者の考えを述べると「算数・数学教育学が一学問であるためには，算数・数学教育学が数学の中の一領域であってもいけないし，教育学の中の一領域であってもいけない」と考えている．そのためには，数学とも教育学とも異なる，算数・数学教育学独自の観点や価値観が必要となる[3]．例えば，研究対

[2] 例えば，杉山（1989）は「数学教育学は学問か」という問いについて，学問を「規範学」と「経験学」に分ける西田（1980）の考え方を基に考察している．また，「数学教育学の性格」に関する，塩見（1967）や平林（1987）の提言も，中原（1995）に引用されるなどしており広く知られている．これらの研究は，昨今でも小山（2010）や日本数学教育学会編（2010）の「数学教育学研究ハンドブック（pp.2-8）」で引用され論じられることがある．

[3] Mathematics(数学)という言葉は，もともと「学ばれるべきことども」全般を意味する「μαθηματικά（マテーマティカ）」であったという（佐々木，2010）．今では数多くの学問分野が存在するが，近代に至るまで三学四科によって構成される自由七科（Seven Liberal Arts）がその中心であった．そもそも学問とは，このような少数の中心科目群から派生・

象を算数・数学の学習・指導に制限することで，算数・数学の特性がその研究内容や成果に反映されているようでなければ，教育学との差異が消滅してしまう．算数・数学教育学は算数・数学の内容やそこで用いられる思考方法など，その特性を踏まえた研究を行うべきである．また同時に，数学の価値観にのみ従って正しく整理された学習・指導の体系を構築すればよいわけでもない．学習者の理解や発達を考慮し，数学には存在しない，算数・数学教育学独自の観点や価値観に基づいて算数・数学について思考している必要がある．そういった，関連する他の学問分野を意識しつつも，算数・数学教育学という一つの学問分野としての研究を進めたいと考えてきたのである．そして，この哲学が研究の興味・関心を「算数・数学教育における教材研究」へと向けさせたようである．具体的な内容を定め教材研究を行う限り，そこには常に算数・数学が存在している．そのため，そこで表れてくる算数・数学の特性を意識することで，教育学との差異は容易に生じてくる．また，数学的知識のみでなく教育的価値を意識して教材研究を行うことで，数学とは異なる価値観に基づく研究が容易に行える．このような研究が必ずしも万人にとって容易というわけではないが，少なくとも筆者にとっては最も容易に自身の理想とする研究を実現できたのが，教材研究に関わる内容領域であった．これが 2 つ目の主な動機である．

ここまで，研究動機を考察することにより，教材研究という研究テーマを扱うことのよさを述べてきた．しかし，本研究テーマにも多少の難しさは存在する．と言うのも，ときに教材研究に関わる研究は流行に乗りづらく，注目されづらいと言われることがある．また，そういったこともあってか研究者を目指す若手は算数・数学指導に関する理論研究を行うことが多いように思われる．社会の変化の激しい現代において，養うべき能力も変化していく．その能力を養う方法を思考する研究は需要があり，重要視される．これに対して，教材内容の数学的構造やその繋がりは時代に関わらず不変である．それ故に，この手の研究には流行がほとんど存在しない．近年の研究動向で言えば，言語活動や数学的活動，統計教育や ICT 活用などの現代的課題と関連する教材研究が盛んに行われており，教材研究領域の外側にある流行に乗って研究が行われている状態にある．そういった研究において，教材研究は研究対象ではなく研究方法となっており，教材研究領域の研究は実質進んでいないに等しい．このような現状にあって，研究者を目指す筆者が本研究を進めていくべきか否かは悩ましい問題であった．そのような折，声を掛けてくれたのは周囲の数学を研究する人たちであった．そして，彼らの多くは「数学の研究においても多少の流行はあるけれど，そもそも数学の研究成果は時代によらず不変なものである．学術的な研究の成果に本来時代や流行など関係無い．」という考えを持っていた．本研究を始めたばかりの頃は，このような考えに大いに励まされたものであ

分化・独立・融合などを繰り返して増えていったものである．その際に，派生や分化を促したのは新たな観点や価値観であり，それが確立されることで学問が独立してきたと言える．

る．現在は状況も変わり，教材研究に関する研究も注目されつつある．その背景には，後述するように，授業研究（Jugyokenkyu，Lesson Study）に対する関心の高まりと，その理論に関する研究の進展がある．教材研究の重要性が再認識された今となっては，一転して旬を追った研究と化してしまった感があるが，これもまた喜ばしいと考え本論執筆に至ったわけである．

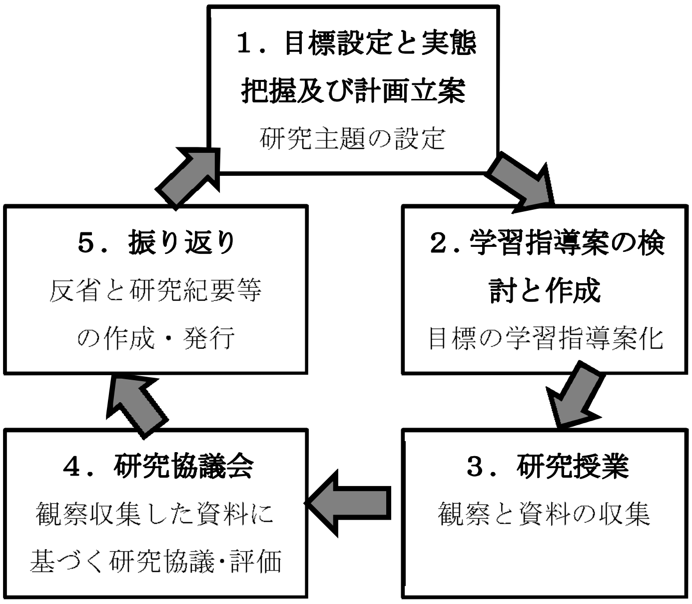
２．研究の背景と目的

教材研究はわが国の実践研究や教師教育の伝統を支える一つの大きな柱である．しかし，教材研究そのものに関する研究は未だ十分とは言えず，今日的にも主要な研究対象である．実際，2013 年度に行われた，日本数学教育学会の第 1 回春季研究大会では，学会指定課題研究の一つとして教材研究を中心議題とした研究会が行われている．そして，そこでは教材研究に関する研究の重要性と必要性が議論され共有された．特に興味深かったのは教材研究の定義，質を吟味する枠組み，手法など様々なことが未だ不明確であるという事実である．実際，講演者の一人である佐々木氏は次のように述べている．「わが国でも，それ（日本でいう教材研究とは何か）は必ずしも明確ではない。（括弧内筆者）」（佐々木，2013，p.187）．このような教材研究に関する基礎的研究の不足を指摘しているのは，佐々木氏だけではない．この研究会において，講演をしている飯田（2013）や岡崎（2013）も各々の観点から基礎的な研究の必要性を論じている．

このような教材研究に対する注目の高まりには．昨今の授業研究に関する研究の進展も大きく関わっている．1995 年の第 3 回 IEA 国際数学・理科教育調査の付帯調査として行われた，日本・ドイツ・アメリカの三ヶ国ビデオ調査（TIMSS1995 ビデオ調査）や，それを受けて執筆された「The Teaching Gap」（Stigler & Hiebert，1999）の出版が一つの契機となり，授業研究は世界的に注目を集めるようになった．その後も，TIMSS1999 ビデオ研究など複数の研究が行われ，実践や理論の探究が行われている．これらの研究により，今まで研究対象としては意識されることが少なかった，授業研究という文化的営為の有用性が再認され，その研究が進んだわけである．その結果，授業研究の背後にある理論も我々の意識下に置かれるようになった．そして現在，授業研究の流れは次の 5 段階（図 0.1.1）で考えられている（この枠組みは藤井（2014）によって提案されているものである）[4]．この 5 段階のサイクルは，「研究授業に向けた事前の教材研究」と「研究授業を基にした事後の教材研究」，双方の重要性を良く示している．こうして，「授業研究」研究は教材研究という文化的営為の有用性を再認させたのである．しかし，藤井（2014）は，図 0.1.1 の第 2 段階目にあたる「学習指導案の検討と作成」が海外では殆ど注目されていないという報告をしている．また，第三段階目の「研究授業」と第四段階目の「研究協議会」がすなわち「Lesson Study」であるという誤

[4] Lewis ら（2009）の 4 段階など他の枠組みも存在する．授業研究のどういった側面を重要視するかという差異が，枠組みの差異に繋がっているようである．

解が存在すること．さらに言えば，そういった誤解を助長するような報告もなされていることも述べている．実際，「授業研究」研究で論じられるのは，授業実践の記録や指導案，検討会の内容等が主である．このように，教材研究の重要性は確かであるにも関わらず，指導案や授業実践など（教材研究の結果）に比べその行為（教材研究のプロセス）は表に出ないことが多い．そこで，昨今では教材研究を主たる対象とした研究を進め，その実態・有用性・役割・方法といった様々なことを明らかにしようと考えられている．



【図 0.1.1:授業研究過程のモデル】

そういった中で，本研究で着目したのは教材研究の方法である．これは教員志望学生や若手教員から「教材研究の重要性はわかるが，どのようにすれば良いかがわからず，実践することができない．」といった相談を度々受けたことによるものである．実際，現在の教材研究の方法は個々のセンスや経験に依存している部分が大きく，その方法が整理されているとは言い難い．このような状況では，いつまで経っても「今の若い先生は，教材研究が出来ていない」という声が出続けることと予想される[5]．そのため，教材研究方法について研究を進め，「教材研究とは何であり，如何になされるべきか」ということを明らかにしていく必要がある．

本研究の目的は上述したような現状を改善することである．これに関して，かつて問題解決過程に関する研究では，Polya（1945）によって問題解決に関わる Heuristics が整理・提案され，研究が大きく進展したことがある．その内容は優れた Problem-Solver にとっては当たり前の方法や考え方の列挙に過ぎなかった．しかし，Polya がそれらを明文化したことで，はじめてそれらは我々の共有する財産となったのである．また，前述した授業研究に関する研究においても，同じことが起きている．我々が慣習の中で強く意識せずに行ってきた授業研究という行為は，その理論が研究され明文化されたことによって，広く世界的に共有されるものとなったわけである．同様のことが教材研究方法に関する研究においても必要であると考える．優れた授業者にとって当たり前の教材研究方法であっても，それが明文化され整理されなければ我々の共有財産とはならない．本論文では伝統の中で培われてきた考え方や方法の整理と，更なる可

[5] このような声が多く聞かれるという現状は，佐々木（2013）でも報告されている．

能性の探究を行っていく.

第２節　本研究の課題と研究方法

前節で述べたように，教材研究に関する研究は不足した状態にあり，様々な観点からその研究が望まれる所である．つまり，研究課題が山積した状態にあるわけである．本研究では主な研究対象を教材研究の方法に絞り，その中のいくつかを解決しようと考えている．本研究の課題を一言で言えば，先にも述べた通り「教材研究とは何であり，如何になされるべきか」を明らかにすることである．そのために，より具体的な研究課題として以下の３つを定める．いずれも算数・数学教育を前提とし，その中で行われる教材研究について思考したものである．

①　教材研究の定義を明確化すること

教材や教材研究という語は広く用いられているものの，その定義は明確に定められていない．教材という語の多義性や，教材研究という行為の多様性を整理することが望まれる．

②　教材研究の方法に関する先行研究を整理すること

教材研究という行為の多様性故に，その方法論が確立されていない．長い伝統を有してはいるが，研究背景でも述べたように，指導案や授業実践など（教材研究の結果）に比べその行為（教材研究のプロセス）は表に出ないことが多い．そのため，「どのように行われることがあるか」また「どのような考えで進められるべきであるか」といった現状や先行研究の整理が望まれる．

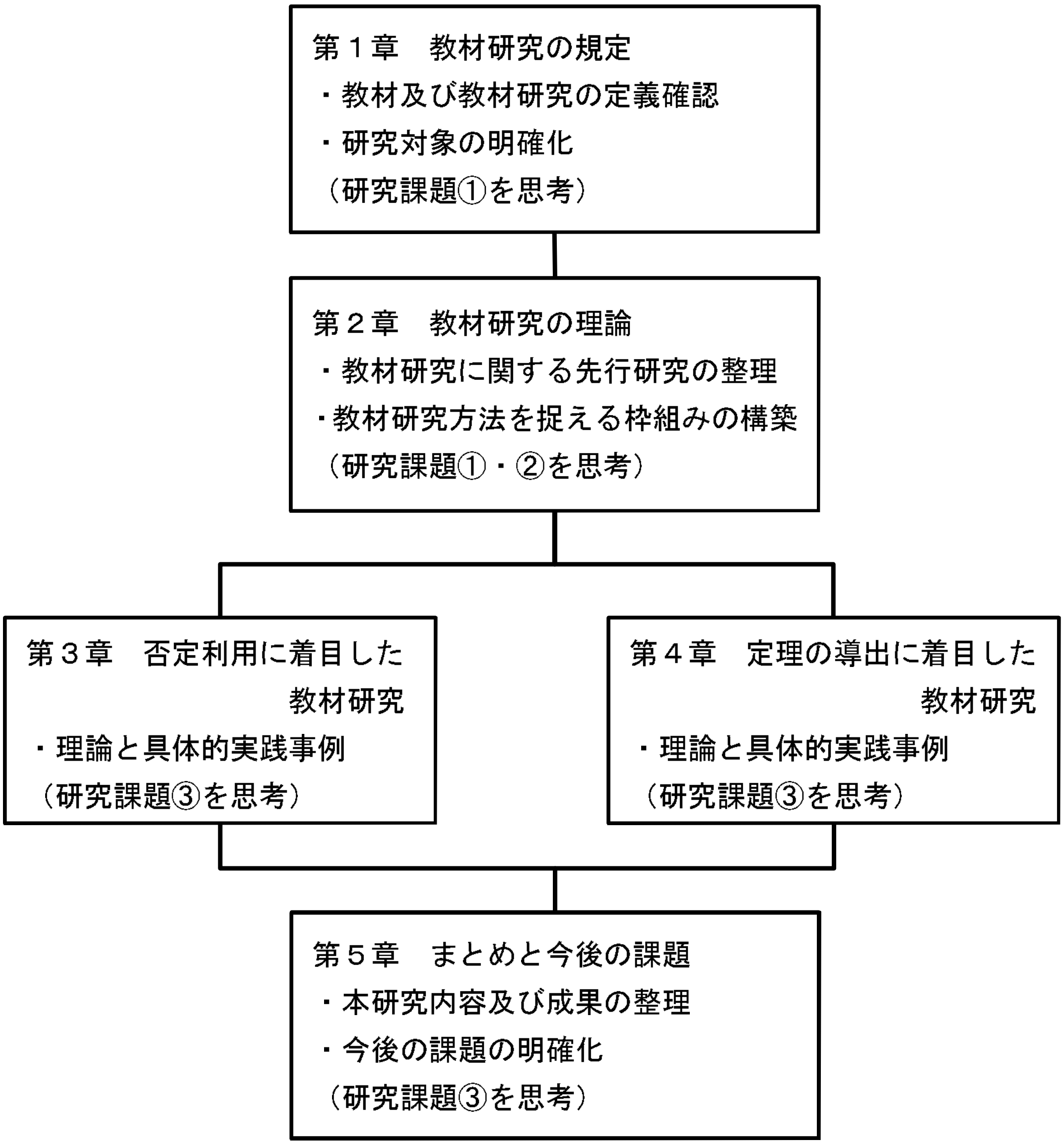
③　教材研究の新たな方法を探究し提案すること

上記の①や②の課題が解決されることで，「教材研究とは何であり，如何になされるべきか」ということが明確になる．それを受けて，新たな教材研究方法の探究を行うことが考えられる．しっかりと伝統を受け継いだ上で，更に優れたものへと高めていくことが望まれる．

次に，これらの研究課題を解決するための方法について述べていく．詳細については続く第３節に本論文の構成としてまとめるため，ここでは概略のみを示す．まず，課題①に関しては，先行研究を参照し，教材や教材研究という語がどのように利用されているかを明確化する（第１章）．また，教材研究に関わる先行研究をその内容から，「実践的な研究」・「方法の研究」・「理論の研究」の３つに大別し，それぞれについて整理・考察する（第２章）．これにより，教材研究という行為の多様性についても整理されることとなる．次に，課題②の解決のために，教材研究方法を捉えるための枠組みを構築する．また，それに従って先行研究の整理を行う（第２章）．最後に，課題③の解決を考え，本稿では２つの教材研究方法を提案する．また，作成された枠組みでそれらを整理し，それらの方法がこれまでの教材研究の流れを踏襲していることを示す（第３章・第４章）．加えて，その結果を考察することで，今後の教材研究方法に関する研究の方向性について示唆を得る（第５章）．

第３節　本論文の構成

前節で提示した研究課題の解決を目指し，本論文は図 0.3.1 のような流れで構成されている．本節では，各章の内容について言及し，どのように研究課題を思考・解決していくのかを明確化する．



【図 0.3.1：本論文の内容と構成】

第１章では，課題①を解決するために，研究対象である「教材研究」とは何かを規定する．教材研究という言葉は広く用いられており，多くの教員に知られているものである．しかし，定義が意識されることなく慣習の中で用いられているため，その実は思いの外不明確である．ただし，教材研究で思考対象となるのが教材であることは確かである．しかし，この教材ですら定義が明確に定まっていない現状がある．そこで，教材や

教材研究という言葉がどのように利用されているか，またその定義はどのように考えられているのかを複数の先行研究（主として，教材学会で行われている研究）を参照し考察する．そして，本研究における定義を明確にするのがこの章の内容である．

第２章では，まず「教材研究」研究の現状（国際的な動向，国内の動向）を整理し，そこから教材研究の方法を捉える理論の不足を指摘する．そして，先行研究を「実践的な研究」・「方法の研究」・「理論の研究」の３つに大別して整理・考察することで，教材研究方法を記述するモデルと理論的な枠組みを構築する．同時に，この先行研究の整理を通して，教材研究の多様性をより明確にする（課題①の解決）．また，構築した枠組みを用いて，再度教材研究方法に関する先行研究の整理・記述を行う．これにより，課題②の解決と，本研究で構築した枠組みの性質や可能性の明確化が行われる．

第３章では，課題③にこたえるために，具体的な教材研究方法として「否定利用に着目した教材研究」を提案する．そこでは，まず否定利用の定義と性質を明確化し，この観点から教材研究を行うことの価値を示す．そして，具体的な実践事例として，「関数の最大値・最小値を思考する代数・解析的な問題」と，「三角形に内接する正方形を作図する幾何的な問題」に対して実践をした場合を提示する．また，これらの実践事例を第２章で構築した枠組みに沿って整理する．これにより，「否定利用に着目した教材研究」が，教材研究の要点をおさえた一つの教材研究方法として提案されることとなる．同時に，構築した枠組みを実際に用いることで，その性質をより明確にしていく．

第４章では，第３章と同じく，課題③にこたえるために具体的な教材研究方法を提案する．提案を行うのは「定理の導出に着目した教材研究」である．前章同様，ここでもまず導出の定義と性質を明確化し，教育的価値を示す．そして，具体的な実践事例としては「三角形の決定条件を中心に思考している例」と「メネラウスの定理を中心に思考している例」を提示する．また，第２章で構築した枠組みに沿って，これらの整理・考察も行う．これにより，「定理の導出に着目した教材研究」を一つの教材研究方法として位置付けると同時に，教材研究方法に関する研究の次なる方向性についても示唆を得る．

最後に，第５章では本論文の内容を整理し，本研究の研究成果や有用性・独創性を明確化する．また，研究を通して見えてきた研究の可能性や課題についても整理し，今後如何なる研究が望まれるかについて考察する．

第１章　教材研究の規定

本研究では「教材研究」を研究対象としてその方法に関する研究を進める．「教材研究」という言葉は広く用いられているものの，その実は必ずしも明確ではない．少なくとも，教材研究で思考される対象が教材であることは確かであるが，教材とは何かという問いの答えも一義的に定まっていない現状がある．そのため，「教材研究の方法について」と言うだけでは研究対象がぼやけてしまう．そこで，本章ではまず「教材」という語の多義性と，「教材研究」の多様性について整理し，本研究の研究対象を明確化する．

第１節　「教材」とは何か

教材は教育活動において必要不可欠なものである．そのため，教育に携わる者であれば誰でも教材とは何かを熟知していそうなものである．しかし，実はそうではない．教材は教育活動における基本的なものであるが，それ故に皆が思い思いにこの語を利用しており，教材の定義が一義的に定まっていない現状がある．実際，北（2008）も「学校の教師の「教材」に対するとらえ方にきわめて曖昧な実態がある」という報告をしている．つまり，「教材」とは人によって解釈が異なるものであり，複数の意味で用いられている語なのである．そこで，ここではまず複数ある解釈の中から代表的ないくつかを取り上げ，教材とは何かということを考察する．

１．教材の定義と類似概念

我が国には教科の枠を越えて教材に関する研究を進める日本教材学会という学会が存在する．そこでも，教材とは何であるかという同様の議論がなされている．しかし，統一した定義や見解には至っていないのが現状である．例えば，先行研究では以下のような定義が提示されている．

- 「ごく一般的には、教材とは、授業において指導すべき教育内容を学習者の学習課題として具体化した材料のことであると定義される。」（山口，2008）
- 「教材とは、教育の目標を達成するために教授や学習指導の中で用いる学習内容である。どのような形をとっても、指導者と学習者を繋ぐ学習内容が必要であって、いわば両者の媒介物として存在する。これが教材である。」（福沢，2008）
- 「大人と子ども、あるいは子どもと子どもがつくりだしている教育関係のなかに登場し、教育の媒体となるすべての文化財」（中内，1979）
- 「教材とは、人間形成に役立つ力の総体としてのカリキュラムの材料を意味する。この役立つ力は、既成の教材のうちにも存在しているが、自然や社会のうちにも存在し、また人間の五感ではとらえられない無意識の深みの場所にも存在している。」（小野，1982）

- 「教材は、人間形成という目的実現過程に、教師と子ども、子ども同士とのかかわり合いの授業において、確かな知識、概念、技能、能力、態度、芸術的価値など「文化的価値」を習得するのに用いられる素材を組織的に構成したものである。」（佐島，2008）
- 「一般には教育の目標を達成させるために，教育的に編成された学習内容」（仲田・吉村，1982）

教材の解釈・定義には広義なものから狭義なものまで存在する．狭義なものは「授業で扱われる学習内容」というように，非常に限定的な用いかたをしているため，何を意味しているかが捉えやすい．これに対し，広義なものでは「教育の媒体となるすべての文化財」というような解釈をしており，その境界線は実に曖昧である．これでは，ほぼ全てのものが教材と呼べることになってしまう．そこで，中間的な考えでは『「文化的価値」を習得するのに用いられる素材を組織的に構成したもの』や「教育の目標を達成させるために，教育的に編成された学習内容」というように素材（題材）が教育活動のために組織的に構成（編成）されてはじめて教材になるという解釈をしている．

そもそも，教材にこのような広狭様々な解釈が存在する理由の一つは，教育哲学や教育の在り方が時代に応じて変化してきたためであろう．辰野（2008）によれば，1950 年代半ばまでの行動心理学が盛んであった時期は教育が教師中心であり，そこではドリル学習・系統学習・プログラム学習・オペラント学習などが重視されたという．そのため，教材もこのような教授に役立ち、知識・技能の習得に役立つものが求められていた．しかし，1960 年代になり認知心理学が発展したことで，教育は学習者中心の理解学習・問題解決学習・発見学習・探究学習・体験学習などが重視されるようになる．これに応じ，求められる教材にも変化が生じてきたわけである．現在は両者を折衷した指導形態が取られており，双方が重視されている状態がある．このように，教育観に応じて求められる教材は変化をしてきた．その都度，教材が意味する対象も変化し，それらを全て許容しようと定義が抽象的になったり曖昧になったりしたと考えられる．実際，昨今では「学習材」という語も使用されることがある．教師中心の教育のための題材と，学習者中心の学習のための題材は異なるという考えから，教材との差異化をはかるために作られた言葉である[6].

関連して，教材と合わせて用いられる類似概念として「教具」というものも存在する．「教材・教具」という言い回しをし，これらを区別せずに用いる場合も多いものである．しかし，これらの違いは先述した「教材・学習材」と比べ大きなものであり，しっかりと区別すべきものであるとの見方も存在する．これに関して山口（2008）は「教材は

[6] 他にも，「陶冶財（陶冶材）」という類似概念も存在する．実際，篠原助市（1935）は「精神界の形成」を重要視し，「教材」よりもはるかに広い意味で「陶冶財」という語を用いている．しかし，近年では利用されることが極めて稀な言葉となっている（形式陶冶，実質陶冶などを論じる際には用いられることがある）．

教師が学習者に伝え、習得させたい教育内容（知識や技能、道徳や芸術など）を学習者が取り組むことができる形に具体化した言語的な学習情報であり、ソフトウェアである。一方、教具はそれ自体としては教育内容や情報を含んでおらず、それらを載せる道具としての役割をもっている。非言語的なハードウェアである。」と述べている．しかし，例えば「教科書」のようなものとなると，それが意味するのは教科書に記述されている学習情報であると同時に，それが載せられた（非言語的な）紙媒体のハードウェアであるとも解釈できてしまう．このように，教材・教具は切り離し難い一面も存在しているのである．

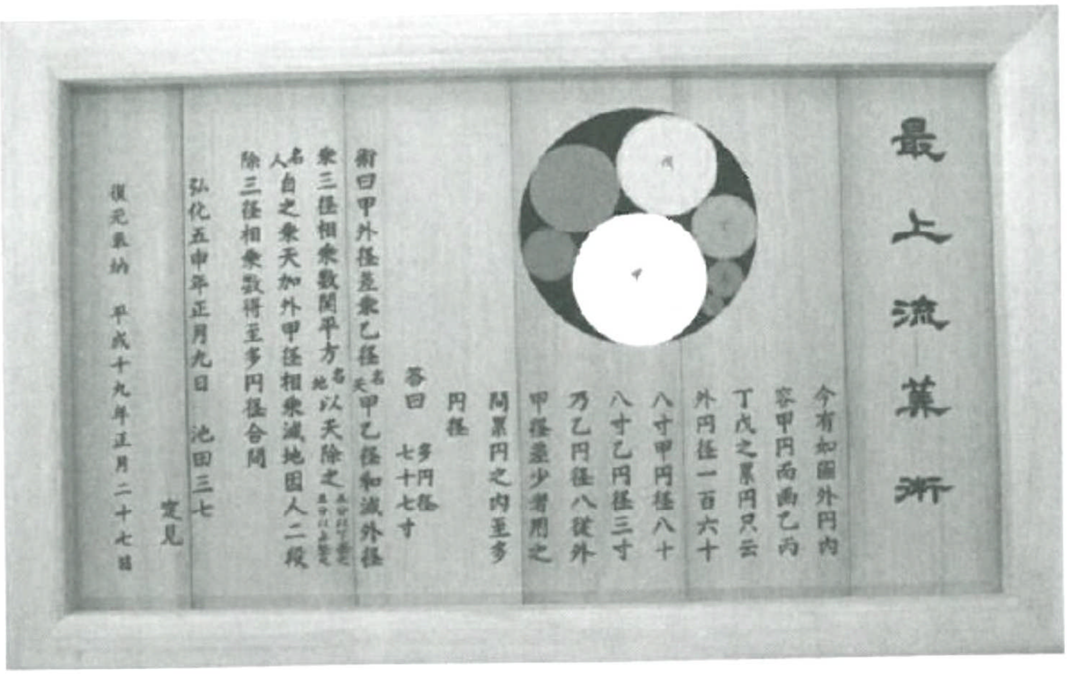
ここまで，「教材」という語に関わるいくつかの議論を概観してきた．これらを踏まえ本研究における教材の定義とその範囲を明確化していく．まず，その定義についてであるが，研究を進める上で，定義を狭義に取り過ぎては射程を狭めることになるし，広義に取り過ぎては意味をぼやけさせてしまう．そこで，本研究でも中間の広さのものを定義としたい．そこで，上掲の定義を参考にし，ここでは「教育目標を達成するために，題材を教育的に編成したもの」を教材の定義とする．最も重要な点は，題材（素材）を教育的に編成している点である．数学教育学における教材開発を研究している磯田（2008）もその論文の中で，『「もとの題材のおかれた文脈から離れ（脱文脈化）、その題材でなしえる数学的活動内容のもつ意味や価値を吟味し、教育目的との一致を前提に再文脈化する行為」を、本稿では教材開発と呼ぶ』と述べている．本研究の立場からすると，再文脈化の結果得られる教育的に編成されたものが教材であると考えられ，このような先行研究とも齟齬が生じない．また，本研究では算数・数学教育を思考することになるので，教育目標や教育的に編成する過程はいずれも算数・数学教育的なものとなる．その上で，学習材や教具といった類似概念との使いわけについてであるが，本研究では学習のために考えられたものであっても教材と呼ぶ．つまり，学習材という語は用いず，全て教材で統一するということである．続いて，教具についてであるが，前述のように教材・教具は切り離し難い一面を有している．そのため，特別に教育的内容を持たない完全なハードウェア（教具）を指す場合を除いては，教材あるいは教材・教具と記述することとする．本研究主題は教材研究であるため，教育的内容を含まないということは基本的にありえない．そのため，両者の使いわけも本論においては不要であると考えてのことである．

２．教材の種類

教材という語の定義が明確化されたので，教材とは具体的にどのようなものかを考える．その際，まず問題となるのは教材の「ある・なる論争」と呼ばれるものである．これは，教えるべき内容があり，それに基づく教材が明確に「ある」のか，それとも教師や生徒の解釈の過程を経て教材と「なる」のかという考えの対立である．このような教材観の対立は教育観の差異により生じている節も強く，容易に統一できるものではない．

しかしこれに関しては，教材について議論する際に，視点の共有がなされている必要はあるものの，必ずしも考えを統一しなければいけないものでもないであろう．前掲のように教材の定義は様々であり，それらを満たす教材を生み出してきた背景には 2 つの視点が存在したということである．そのため，本研究においてもどちらか一方の考えを否定するつもりはない．しかし，研究対象や立場を明確化するために，あえていずれかを選ぶとすれば，「なる教材」の立場を取っている．これは，前述したように教材の定義を定めたことによるものである．本研究において，教材は教育的な価値や文脈のもと組織的に構成されている必要がある．故に，教材は指導者等が手を加える前から「ある」のではなく，研究によって生み出されるものであると考える．また，この考えを明確にするために，本研究では必要に応じて「題材」という語も用いることとする．これは，「題材」が教育的な観点のもと組織的に構成されることにより「教材」になるという考え方によるものである．例えば，我が国には和算と呼ばれる固有の数学文化が存在した．特に 1600 年代～1800 年代にかけては大いに栄え，「塵劫記」に代表されるような数多くの書物や，「算額」[7]と呼ばれる数学の問題を記した額や絵馬を生み出したてきた．「算額」は神社や仏閣に奉納されており，そのいくつかは現在にも残っている．これらは，我が国の数学の文化を伝えるよい「題材」である．しかし，単にそれがそこに存在するだけでは「教材」とは言えない．教育的な価値観（例えば，文化の継承や幾何学的問題の面白さの感得など）に基づき，教育内容として位置付けられてはじめて「教材」になるわけである．このように述べると，題材の方が対象としているものが広く，条件の付

[7] 算額で扱われる問題の多くは平面幾何学に関するものであったと言われている．例えば，西楽寺（長野県）に奉納されている図 1.1.1 のような問題である．（小寺，2007）



【図 1.1.1：西楽寺算額（1848）復元（97×60cm）】

いている教材の方がその対象が狭いように思われるかもしれない．しかし，必ずしもそうとは限らない．題材としての算額は現存するそれらに他ならないが，教材としての算額となると，例えば中学生によって作成された算額もどきのようなものも含まれてくる．実際，中学生を対象とした算額作成の授業や，その問題をもとにした学習活動などの実践事例は複数存在し，昨今では中学生による算額奉納も行われた例が存在する[8]．このように，教育的な価値観の付加は，思考対象を単なる題材以上のものへと変化させることがある．

本題に戻って，ここからは教材の具体例とその分類を思考していく．これまで述べてきたように教材の定義は様々であるし，その捉え方（教材観）も一意では無い．故に，その分類に関する研究も多種多様である[9]．ここでは，あくまでも前節で示した定義をもとに，その具体例と分類を思考する．ただし，このように定義を明確に定めた場合であっても，どのような観点から分類を行うかにより，その結果は様々である．以下にいくつかの代表的な分類方法とそれに基づく具体例を提示する[10]．

（1） 授業活動における教材の働きのうち、「認知・知覚作用」に視点をおいた分類

① 言語教材

その中核は教科書であり，副読本・図書・雑誌・新聞などがある．
昨今は電子書籍やデジタル教科書なども利用される．
算数・数学においては，言語を用いて定義を与えたり，定理を証明したりする．
また，数字・文字・記号なども数学的な言語である．

② 視覚教材

写真・図絵・図表・OHP シートなどがある．
算数・数学においては，幾何学を考察する際に補助として図形を用いる他，関数を表現する際のグラフの利用や，統計データを処理・考察する際の統計グラフの利用など様々な場面で視覚を利用する．
また，日常生活と数学を結び付けるために身の回りのものを写した写真が提示されることもある（例えば，パラボラアンテナを提示し，放物面の話をするなど）．

③ 聴覚教材

音声テープ・音声 CD・音声データなどがある．
算数・数学科で利用されることは極めて少ない．

---

8 例えば，2014 年には同志社中学校（京都府）・立命館守山中学校（滋賀県）の両校の生徒によって，滋賀県大津市の三井寺に算額が奉納されている．

9 実際，教材という語を本研究よりも広義に捉えて，その分類を考えている研究も存在する．このような場合には教材の分類の中に，教具という概念が含まれていたりすることもある（例えば，仲田・吉村（1982）など）．

10 分類の（1）~（3）は古藤（2008）の研究成果をもとにしたものである．

しかし,「視覚に頼らずに他者に情報を正確に伝える活動」が数学学習において有意義であるという研究成果や授業実践も存在する[11]．このような，授業を行う際には聴覚教材が利用されることがある.

④ 視聴覚教材

動画・映画・放送・DVD などがある.

昨今は ICT の飛躍的な進歩により，動画のアップロード及び視聴が比較的容易に行えるようになった．そのため，授業前に学習者が動画教材を視聴してから授業に臨む, 反転授業と呼ばれる形式の授業実践も行われるようになっている．また，動画教材による指導を中心とした遠隔指導なども存在する.

算数・数学においては，動的な内容（動的幾何学や関数の移動など）を考察する際に動画やアプリケーションを用いることがある.

⑤ 触角（実物）教材

標本・模型などがある.

算数においては，身の回りに存在する具体物を用いて学習をはじめたり，半具体物としてブロックを用いて思考したりする．また，数学においても立体図形を考察する際に，補助として模型を用いることなどがある．昨今は，算数・数学的活動を通した学びが重視されているため，その他にも具体物を操作して思考する機会が増えている.

（２）「媒体」の特性による教材の分類

① 印刷教材・新聞教材（NIE など）

（１）の分類における言語教材の一部．教科書・副読本・図書・雑誌・新聞などの印刷物を指す．また，授業用に作成されたワークシートなどもここに含まれる．算数・数学と社会の結びつきを伝えるために，新聞などで提示されているデータを統計用の教材として利用することもある．このような教材を特別に新聞教材と呼んだりする.

② スライド教材

昨今は容易にプレゼンテーション用のスライドを作成し，提示できるようになった．そのため，スライドを用いて課題・問題場面を提示したり，内容を整理したりすることが行われている．また，授業中に生徒自身が考えをまとめたスライドを作成し，発表をするような授業展開も存在する.

③ ビデオ教材・放送教材

（１）の分類における視聴覚教材の一部．DVD・動画などをビデオ教材，ラジオ・テレビなどを放送教材と呼ぶ.

---

[11] 例えば，石川・宮川（2012）は中学校図形領域において，伝言ゲームを用いた授業の実践及び分析をしている.

④ コンピュータ（デジタル）教材

PC・ネット上の情報・アプリケーションなどがある．算数・数学科では数式処理ソフトや統計ソフト，学習用アプリケーションなどが利用されている．また，統計教育においては，インターネット上の情報をもとにした教材が利用されたり，学習者自身がインターネット上で情報を探したりすることがある．

（３） 学習目的による教材の分類

① ドリル教材

練習による基礎的内容の習得を目的とした教材．

算数・数学では計算練習・問題演習を行うことで，計算や問題解決のための基礎的技能の習得を目指すことがある．また，そういった練習の中で規則や法則に気付くなど，学習内容の理解深化が起きる可能性も存在する．

② プログラム教材

個人ペースによる学習のための教材．

算数・数学は内容の繋がりが強く，理解が不十分な内容があると，後の学習に大きな影響を与える．そのため，個人のペースでしっかりと理解を積み重ねていくような学習も望まれている．

③ シミュレーション教材

目に見えない現象の可視的学習などを目的とした教材．

数学においては，関数グラフソフトなどを用い，変数を固定したり変化させたりして，思考対象の関数の振る舞いを見ることがある．このように，抽象度の高い数学的思考対象を可視化して，少しでもわかりやすい形で提示する工夫が行われている．

④ ネット教材

（２）の分類におけるコンピュータ（デジタル）教材の一部．調べ学習などで用いられる，インターネット上の情報を中心とした教材．

補足として，図書教材（印刷教材）作りの理論としては以下のような分類も提案されている[12]．これも，学習の目的を意識した分類となっている．

① 修得教材

新たな知識や技能などの習得を目的とした教材．

② 習熟教材

知識や技能などの習熟を目的とした教材．

③ 評価教材

知識や技能などの評価を目的とした教材．

---

12 本分類方法は清水厚実（2008）によって提案されているものである．

＊ ただし，一つの教材が2つあるいは3つの要素を兼ねていることもある.

（4） 機能による教材の分類

文部科学省（2001）は，児童生徒の「生きる力」を育成する観点等を重視しつつ教材整備が図られるよう，教材の機能を大きく次の4つに分類している.

① 発表・表示用教材
児童生徒が表現活動や発表に用いる，又は児童生徒が見て理解するための図示・表示の機能を有する教材.
算数・数学では，黒板の類，説明教具，模型，ソフト教材，指導用 PC ソフトなど.

② 道具・実習用具教材
児童生徒が実際に使って学習・実習の理解を深める機能を有する教材.
算数・数学では，作図用教材，計算練習用教材，図形構成練習用教材，立体構成練習用教材，長さ・体積・重さの測定用教材，確率実習用教材など.

③ 実験観察・体験用教材
児童生徒の実験観察や体験を効果的に進める機能を有する教材

④ 情報記録用教材
情報を記録する機能を有する教材

観点により，複数の分類が考えられること．そして，教材と呼ばれるものが多種多様であることがわかって頂けたかと思う．また，具体例により「教材」のイメージもより強固になったことであろう．しかし，これだけの数の分類方法を挙げ連ね，その具体例を考えていってもなお,教材と呼ばれうる全てのものを尽くせるわけではない.そもそも,どのような観点の分類を参照しようとも,全ての教材を網羅して提示することは極めて困難なのである．例えば，昨今 ICT 機器の飛躍的な進歩に伴い，教育現場の環境や在り方は大きく変化している.子どもたちが一人一台タブレット型のコンピュータを持って授業に参加したり,教育用に開発されたアプリケーションを用いて学習を進めたりすることが行われている．この場合，タブレット型情報端末は教具であり，使用されるアプリケーション（内容）は教材ということになる．しかし，数年前までの研究に，これらの言葉は出てきていない．これらは，科学技術の急速の進歩により近年新たなに生じた，教材・教具だからである．このようなことが，今後も同様に起きていく可能性は十分に存在する．具体例が増える可能性だけでなく，分類の枠組み自体が影響を受ける可能性もある[13]．故に，具体的に教材の種類を思考するような分類研究には，常にその時

[13] 実際，既にここで提示している分類も先行研究で提示されているものに，補正を加えて作成したものである．先行研究の多くは，デジタル教科書やオンライン上で視聴される動画教材，またそれを利用するための電子黒板やタブレット型情報端末の出現により，時代

代の限界があると言える．上掲の研究成果も，そのような限界の中で思考されたものであり，決して絶対的なものではないことに注意したい．

遅れのものとなっている．これらの新しい技術は教育現場から OHP シートや VHS といった媒体を一掃しつつある．「教材にはどのようなものがあるのか」を具体的に思考する分類方法ほどこの影響を強く受けてしまう．

第２節　「教材研究」とは何か

教材研究で思考される主な対象は言うまでも無く「教材」である．そのため，前節では「教材」の定義や学習材・教具・題材といった類義語との差異，教材の具体例とその分類などについて論じ，「教材」という語の多義性と本研究における「教材」の規定を明確化した．そこで，本節からは本研究の主題になっている「教材研究」について思考していく．「教材研究」も「教材」と同様に広く用いられている語であるものの，定義やその内容には不明瞭な部分が多いものである．そこで，本節では「教材研究」という語の用いられ方とその定義を明確にし，本研究の対象を規定する．

１．研究者の教材研究と教員の教材研究

教材研究を定義する前に，まず「教材研究」という語がどのように利用されているかを確認する．特にここで論じるのは，主に研究者によって行われる教材研究と，主に教員によって行われる教材研究の差異についてである．本研究ではこれらを「研究者の教材研究」と「教員の教材研究」と呼ぶ．しかし，これは一般的な傾向や役割から命名したものであり，決して研究者が「教員の教材研究」を，教員が「研究者の教材研究」を行わないという意味ではない．「教材研究」という語が少なくとも 2 つの趣の異なる意味で利用されているという点が重要なのである．以下では，この 2 つについて論じる．

まず，「研究者の教材研究」とは，新たな教材や指導方法の開発を目的として行われるものである．その中では，教材（学習内容）構造の探究や特定の学習成果を生じさせる教材の開発研究，それらを基にした指導実践などが行われる．そして，その成果は研究論文等で発表される．英語論文などでは，“Teaching Materials Research”や“Content Study”などの言葉で表現されるべき研究である．これに対し，「教員の教材研究」とは，日々の教育活動を成功させることを目的として行われるものである．その中では，指導内容に関する勉強や探究，希望の指導成果を挙げるための教材準備，目の前の学習者の状態を考慮した教材の選定，発問や授業展開の工夫などが行われる．いうなれば，授業準備の別称である．これは，日々の教育活動や昨今注目されている授業研究などを支える重要な活動であり，その成果は教育活動に反映され表れる．この活動を重要な研究活動と捉え，「教材研究」と呼ぶのは我が国独自の文化である．故に，これらを英語論文等で扱う場合には，本来“Kyozaikenkyu”という言葉で表すべきだと言える．このように，「研究者の教材研究」と「教員の教材研究」は同じ教材研究という言葉で表現されるものの，目的を異にしており，その内容にも若干の差異が存在する．この差異は現在意識されずに混同されていることが多い[14]．しかし，本研究ではこれを明確に意

[14] この差異を意識している研究としては，北（2008）が挙げられる．北氏は，「教材研究という教師の仕事がある。広義には、授業のあり方や進め方そのものを総合的に検討し準備する、事前の研究のことである。学校や教師が日々取り組んでいる営みである。一方狭義には、授業で活用される教材そのものを分析・検討することを教材研究といい」と述べ，共に教師の仕事とした上で，解釈の広狭の差異と捉えている．

識し，主に後者の「教員の教材研究」を思考している．また，特に断らない限り単に教材研究といった場合には，この「教員の教材研究」を意味することとする．ただし，「研究者の教材研究」を全く考察しないわけではない．「研究者の教材研究」の多くは「教員の教材研究」を意識して行われており，その成果は「教員の教材研究」に反映されることが期待されている[15]．故に，本研究では様々な場面で「研究者の教材研究」から示唆を得ている．

２．教材研究の定義

前項では，教材研究の意味する範囲に制限をかけた．そこで，本項では教材研究の定義を明確化したいと考える．教材研究の定義に関して，日本教材学会編（2013）の教材事典（p.20）を参照すると，『当該の教育目標を達成するために，何かの内容と学習者の認識を「教材」という概念で適切に関係づけようとする教師の営為』であると記述されている．教材研究という活動は，様々な行為を含むものであるため，必然的にその定義は抽象的にならざるを得ない．教材の選定・解釈・構成や学習者の発達や社会の要求の考慮を挙げ，より具体的に記述している例も存在するが，このように規定を強めると後に考察する際に枷となりかねない．本研究では，これまでに行われてきた様々な教材研究を対象に考察をしていくため，あえて具体性を強めることは避け，上掲の定義をそのまま採用することとする．上掲の定義ならば，教師の営為であることを明記しているため，前項で示した「教員の教材研究」の解説とも齟齬が生じない．

研究によっては，定義を定めるのではなく，教材研究という語の意味を問うことも行われている．例えば，佐藤（1979）は『“教材研究”という意味は，ひとことでいえば「教師が教材についての研究を深め，専門的知識を深める．」ことであるといえよう．』と述べ，より厳密には大別して以下の２通りの意味で使われていると主張している．

（１）教材そのものについて十分研究し，教材のもっている教育的価値や教材の構造を明らかにし，教師の専門的知識を深めること．（狭義）

（２）教材そのものの学問的研究はもちろんであるが，学年，学級の児童生徒の実態，地域の実態を考慮し，実際の授業の過程を予想して，学習指導案の大要を作るまで．（広義）

いずれも教師によって行われるとされているが，ここで挙げられている（１）の意味は「研究者の教材研究」に近く，（２）の意味は「教員の教材研究」に近い．故に，本論で思考するのは「教材そのものの学問的研究だけでなく，実際の授業に関わる諸要因までを考慮する教材研究」である．しかし，このように述べたところで，やはり具体的な

---

[15] これについては，「研究者による研究」と「教育現場での実践」の間に隔たりがあるという声も聞かれる．事実として，研究成果の全てが教育現場に反映されてはいない．故に，その隔たりを埋めていくことも肝要であろう．本研究は，「教材研究方法」研究における，この問題の解決も意図して行われている．

教材研究方法は見えてこない．それを論じるためには，教材研究の方法を捉える枠組みとそれに沿った具体例が必要となる．そこで次章からは，本章で規定した教材・教材研究の定義を前提とし，より具体的に算数・数学教育における教材研究について整理・考察していく．

第２章　教材研究の理論

前章では,「教材」と「教材研究」を規定し，本研究の研究対象を明確化した．本章では，その定義に基づき，教材研究の理論化を思考する．本研究で着目しているのは，教材研究の方法である．教材研究は我が国の教師文化に根づく伝統的な営為である．それにも関わらず，何故教材研究やその方法の研究が今日的課題となり得るのか．本章第 1 節では，教材研究の現状と課題について言及し，この問いにこたえることを目指す．そして，続く第 2 節では先行研究を「実践的な研究」・「方法の研究」・「理論の研究」の 3 種類に大別し，整理・考察する．また，その結果を基に第 3 節では教材研究の方法を捉えるための理論的な枠組みを構築し，その観点から先行研究の見直しをする．これらを通じて,「教材研究」の有する多様な局面を明らかにし，教材研究方法論を整理・確立することを目指す．

第１節　「教材研究」研究の現状と課題

教材研究は我が国の実践研究や教師教育の伝統を支える一つの大きな柱として，100 年以上も前から実践されてきたものである[16]．それ故に，ほぼ全ての教師がこの言葉を知っているといっても過言ではない．しかし，この知っているということは,「教材研究とは何であり，如何に行われるべきか」を理解していることとは等しくない．第 1 章で「教材」について論じる際にも述べたことであるが，無定義のまま（定義が意識されない状態も含む）慣習の中で広く用いられている語というものは，得てしてその実が不明瞭なものである．それ故に使い勝手が良い言葉となっているのだろうが，結果として教材研究は多種多様な行為を含む抽象的なものとなっている．そうは言っても，このような現状そのものが問題となっているわけではない．単一の文化の中で，暗黙の了解のもと言葉が利用され（意味の共有も含む），省みられることが無ければ特に問題とはならない．近年になって,「教材研究」が今日的な研究課題として認識されるに至った要因は主に次の 2 つであろう．

（1）教材研究の価値・有用性の（再）認識　（国際的な動向）

（2）教師の入れ替わりによる文化の変容　　（国内の動向）

まず，1 つ目の教材研究の価値・有用性の（再）認識については，序章第 1 節の第 2 項（研究の背景と目的）でも論じた通りである．授業研究に関わる国際的な比較研究は，我が国の教師文化特有の営為を浮き彫りにし，その価値や有用性を再認識させた．実際，佐々木（2013）によると，教師による教材研究のような行為を「研究」と呼ぶのは我が国の教師文化特有のものであるという．また，昨今注目の集まっている授業研究を有

---

[16] 我が国では明治 4 年に学制が制定されてから間もなく，明治 10～20 年頃には授業研究会が普及していたという．模範的な指導方法の開発と普及が目指されたこの時代に，教材研究の基礎も形成されたと考えられる．

効に機能させる上で，教材研究活動が欠くべからざるものであったことも大きい．教材研究が教師の能力を向上させ，優れた教育活動の実現に寄与することは確かである．それ故に，その研究を進め，「教材研究とは何であり，如何になされるべきか」を明らかにすることが望まれている．

他方で，2 つ目の要因である国内の動向も存在する．近年，我が国では団塊の世代[17]の定年退職とそれに伴う世代交代が起きている．教育業界も例外ではなく，漏れなくその影響を受けている．このように大規模な教師の入れ替わりが起きると，教師文化に変容が生じる．そして，前述した「単一の文化の中での暗黙の了解」が通用しなくなるのである．その結果が「教材研究の重要性はわかるが，どのようにすれば良いかわからず，実践することができない」という若手教員の声であろう．このような問題に対し，教師のコミュニケーション能力や文化の継承といった社会学的側面からの考察も可能であろうが，本研究では教材研究という文化的な営為を伝えていくための枠組みがないことを問題視する．そもそも，これまで教材研究の方法や要点は教師文化の中で「見る」・「まねる」・「盗む」といった形で共有されていた節がある．しかし，これでは必然的に教師文化に入るまではその方法等について学ぶことができなくなってしまう．ベテラン教員の「今の若い先生は，教材研究が出来ていない」という声は至極当然のものなのである．我々はこのようなことを言う前に，そもそも教材研究について「誰がどのように伝えたのか」を問う必要がある．加えて，昨今は社会の変化に応じて，算数・数学教育を通して養うべき能力等（教育の目標）にも変化が生じているという考えがある[18]．このような現代において，過去の教材研究結果の価値は減少しつつあると言える．したがって，次世代の教員が自ら時代に適した教材研究を行えるよう，我々はその方法に関する知恵を伝えていかなければならないのである．この点に関して，これまでの多くの実践や研究は，十分な結果を残しているとは言い難い．教材研究の成果は教材や授業の形で公開されることがある．しかし，その過程はどのように論じられてきたであろうか．思い思いの方法で論じられることもあれば，論じることすらされないこともしばしばである．試みに，授業に関する研究を見てみよう．授業に関する研究において，その成果として養われた能力等は試験などの形で評価・公開される．しかし，それだけでなく指導案やプロトコル分析の形で，その過程も公開されている．また，指導案等にはある程度の枠組みがあり，それに基づいて記述・伝達がなされているのである．これに比べると，教材研究に関する研究の未熟さが良くわかる．教材研究を研究方法として用いて研究をするだけでなく，研究対象として研究を進める必要がある．

ここまで，教材研究を取り巻く現状について整理してきた．これにより，教材研究が

---

17 「団塊の世代」とは，（一般に）1947 年から 1949 年の間に出生した世代の呼称である．当時は戦後のベビーブームが起きた時代であり，この世代は世代人口が他に比べ圧倒的に多くなっている．

18 例えば，昨今は「21 世紀型スキル」に関する研究なども行われている．

今日的な研究課題であることが理解されたであろう．また，その課題についても明確になってきた．教材研究を充実させるためには，その過程を記述し伝える必要がある．故に，教材研究を整理・記述する枠組みこそ，国の内外を問わず必要とされているものであろう．また，国内の動向に関する考察から，単に教材研究そのものを記述・表現する抽象的な枠組みではなく，具体的な教材研究の方法一つ一つを整理・記述するような枠組みが求められる．そこで本章では，複数の先行研究を参考にし，教材研究の方法を捉えることが可能な理論的な枠組みの構築を目指していく．

第２節　先行研究の整理と考察

教材研究（「研究者の教材研究」も含む）に関する研究を大別すると，少なくとも以下の３種類が存在するようである．具体性の強いものから順に（A），（B），（C）とし，簡単な概要を示しておく．

（A）「実践的な研究」

　→具体的な内容領域に対し，教材研究を行った成果を報告・分析している研究．

（B）「方法の研究」

　→主に，特定の教材研究方法について論じ，実践事例等からその有用性を示す研究．

（C）「理論の研究」

　→教材研究の在り方（方法論を含む）や機能を中心に論じている研究．

本節では，この３種類の研究について考察をする．

１．実践的な研究

最も広く一般的に行われているのが，この「実践的な研究」である．このような教材研究は多くの教員により常日頃から行われているものである．故に，その実践事例は数多く存在する．授業研究会などの際には，研究授業・公開授業に向け特に熱心に事前の教材研究が行われる．また，事後にも後の授業実践を見据えた検討会や教材研究が行われる．このように，教材研究と授業実践を繰り返し行い，より良い指導を探究し続けることは，教科教育を行うものにとって最も重要な取組みの一つである．昨今では，「授業研究」と呼ばれるこの一連の取組みが注目され，その有用性が論じられることも多くなっている．しかし，それらの研究や日々の取組みにおいて，特に注目が集まり表に出るのは，研究授業場面やその流れを示した指導案であることが多い[19]．つまり，現在は教材研究の過程ではなく，結果に注目が集まっていると言える．昨今は，授業実践の様子をおさめた映像や，その背景や流れを記した指導案がデータ化され，蓄積されるようになっている．実際，複数の都道府県でインターネット上での指導案公開などが行われている現状がある．これらは，若手教員をはじめ多くの教員に参照され，授業を作る際の参考にされている．こういった実践的な研究の積み重ねとその共有は，教育の質の向上に繋がる有意義なものであろう．

しかし，一方でこのような研究成果の蓄積と共有の進行により，一つの問題が生じるのではないかと危惧する声も存在する．その問題とは，教員の授業構築力の低下である．これは，過去の実践事例・指導案を見て授業作りを行い続けると，自ら授業を構築する能力が育たないという考え方である．実際，教員志望学生や若手教員の中には，過去の

[19] 藤井（2014）は，授業研究の構成要素と過程を５段階にわけた上で（図 0.1.1），その第２段階目にあたる「学習指導案の検討と作成」が海外では殆ど注目されていないと報告している．また，第三段階目の「研究授業」と第四段階目の「研究協議会」がすなわち「Lesson Study」であるという誤解が存在すること．さらに言えば，そういった誤解を助長するような報告もなされていることも述べている．

指導案の記述をそのまま転用し，自ら指導目標や評価方法を思考しない者がいるのも事実である．また，このコピー＆ペーストはひどい場合には本事案にまで及ぶことがある．本来，授業は目の前の学習者を意識して構築されるべきである．このような基本が忘れられつつある現状は確かに危うい．このような問題が生じてしまうのは，蓄積・共有される対象が結果のみであり，方法に及んでいないからであろう．指導案を通して，授業実践の様子を伝達するように，今後は教材研究（授業準備）がどのように行われたかについても適切な方法で伝達することが望まれる．

２．方法の研究

前項で言及した，「実践的な研究」よりも少し高い立場から教材研究方法について研究しているのが，この「方法の研究」である．このような研究は前述した「研究者の教材研究」に含まれるものであり，研究の主目的は教育活動の成功よりも，新たな教材や指導方法の開発となっている．この手の研究においても，実践事例が付されていることは多いが，これはあくまでも提案する方法の有用性や有効性を明示するためのものである．具体的には以下のような先行研究が該当する．

（1）中川（2005）の「類比の考え方を利用した教材研究方法」の研究

中川（2005）では，一般化・拡張に関する教材研究として，合同と相似といった特殊と一般の関係を活用する教材研究が実践・提案されている．特に，中川氏は類比の考え方を用いることで，命題の構成要素間の関係を保存して構成要素を変形していく方法を示している．この方法は単に命題を拡張するだけでなく，拡張前の命題に対する理解深化も促すものである．また，この方法で拡張された命題はその証明方法も共有されており，指導の際にも利用がしやすい．こういった教材研究により，より多くの命題を統一的に理解したり，これまでとは別の角度から命題を分析，考察する観点を抽出したりすることは有意義である．

（2）太田（2013）の「思考の把握を契機とした教材研究方法」の研究

太田（2013）では，算数・数学科における教材研究の一つのあり方として，子どもの思考の把握と解釈に着目した教材研究方法が提案されている．研究方法としては実践事例の提示が行われており，そこから実際の子どもの思考を把握し検討することで新たな見方に気付くことができると主張されている．一般に，教材研究やその方法に関する研究となると，指導に先立って行われる教材研究が思考されやすい．それに対し，この研究では指導実践後の分析や協議・検討の際の教材研究の方法と有用性が示されている．

また，より一般的に教材研究方法全般について言及している先行研究も存在する．例えば，以下のような研究である．

（３）池田（2014）の「数学的思考に基づく教材研究のストラテジー24」

池田（2014）は自身の行ってきた教材開発研究を振り返り，その中で有効に機能してきた，３つの考え方と 24 のストラテジーを具体例と共に示している．そこで紹介されている考え方とストラテジーは以下のものである．

＜３つの考え方＞

［１］日常生活の中に疑問を見いだし，数学的に考える

［２］もっと素朴な解法，具体的な意味づけがないかを考える

［３］適用範囲を広げ，明確化するとともに，拡張・統合を試みる

＜２４のストラテジー＞

［１］ある特定の数から一般化して考える

［２］条件を変えて考える

［３］価値観の違いを数学化する

［４］日常事象を図形化する

［５］日常事象をグラフ化する

［６］具体的操作から証明へ

［７］つまずきを生かして考える

［８］解決方法を限定して考える

［９］身の回りのものを数学的に分析する

［１０］既習の適用範囲を明確にし，拡張する

［１１］似て非なる事象を新たな視点から統合する

［１２］式表現を図形表現で解釈し直す

［１３］図形化を通して，バラバラの知識を関連付ける

［１４］ないものをあるとみなして，思考空間を広げる

［１５］直観的な考えを基に反省的に考える

［１６］具体的操作を洗練させる

［１７］何が一般で何が特殊かを明確化する

［１８］きまりを見つけることで，暗黙の条件を顕在化させる

［１９］逆を考えることで，暗黙の条件を顕在化させる

［２０］条件を加えることで，問題を広げる

［２１］特殊・一般の見方により，バラバラの知識を統合する

［２２］ある特定の関数であるとみなして考える

［２３］複数の解法を関連付けることで，新たな知識を生み出す

［２４］問題解決を広い視野から振り返る

このように，単に開発された教材のみでなく，教材（開発）研究を行う際に有効な考え方や方法を伝えることは，次代の教員を養成する上で非常に重要なことである．これまでにも述べてきたように，教育を通し育むべき能力や教育を取り巻く環境は

変化していく．その中にあって，常にその時代，その環境に最も適した指導を行うためには教員一人一人が教材を開発したり，授業を構築したりできることが望ましい．

（４）野口（2008）の「指導案づくりの作法」に関する提言

野口（2008）は半世紀にわたる自身の教壇実践の経験を「作法」という視点からみつめ直し，後輩教員が抱える教育活動における様々な悩みに対しアドバイスをしている．その中で，指導案づくりに関する悩み「すぐれた指導案を見るたびに、自分もこんな案をつくりたいと思うのですが、実際には形式を整えただけのものになってしまい落ち込んでしまいます。」に対して，次のような答えを示している．授業を上手く運ぶ（説得力をもってコントロールする）ために必要なのは技術論ではなく，教師の実感である．『ですからまず素材研究を 50%、ここで「何を読み取るか」が確立していれば、次の教材研究、つまり「何を教えるか」については 30%の労力で済みます。そして最後は「どう教えるか」を考える指導法研究。前段階までにしっかりとした考察がなされているなら、指導法研究に注ぐ力は 20%。それで十分です。』というのが野口氏の考えである．また，合わせて「（指導案づくりは）自分が感動しなければ始まらない」という言葉も残している．上掲の提言においては，「教材研究」という文言の定義が本研究とは一致していないため，素材研究や指導法研究という言葉も合わせて用いられているが，本研究においてはこれらも教材研究の一部だと考えている．教材研究には多様な側面や段階が存在するので，それらを明確に区別するための言葉である．そういった言葉の上での多少の齟齬はあるけれど，この提言は実に有意義なものであると思われる．実際，私の数少ない経験からしても，教材研究不足の大半は，この教員自身による素材探究（何に感動し，何を伝えたいと考えているのかを明確にすること）の不足によるものであると感じている．合わせて，本文献は先人の作った指導案（結果）のみを見て悩む現場教員に対し，方法を伝えていくことが行われている良い具体例でもあるだろう．

これらの研究においては，教材研究方法の理論ついて思考している部分があるため，後続する「理論の研究」と捉えることもできる．特に，（４）の野口氏の提言は具体的な方法に関するものというよりも，教材研究の方法論に関するものと捉えた方が妥当かもしれない．「方法の研究」と「理論の研究」はどちらも研究者の研究であるため，その線引きが難しい．しかし，ここでは方法を支える理論や論理的裏付けが明確に示されていない，経験的に有効に機能する方法（heuristics）としてこれらが示されていることから，両研究を「方法の研究」と位置付けている．また，（３）・（４）を比較することで，教材研究を支える考え方にも，具体的な思考方法から抽象的な作法まで様々なもの

が存在するとわかる[20].

３．理論の研究

前掲の２種類の研究（A）・(B）よりも，更に高い立場から教材研究の理論について考察しているのが，この「理論の研究」である．勿論，理論の研究であっても具体的な実践事例が付されていることはある．しかし，実践事例はあくまでも理論を構築するためのものであったり，理論の有効性を示すためのものであったりする．本研究でも，教材研究方法を整理・提案・伝達をするために，教材研究方法を捉える理論の構築を目指している．そのため，本項ではその基盤となる先行研究を整理しておく．

（1）教材研究の変数（要素）に関する研究

小笠原・柴山（2008）は教材研究の方法論に関する研究の中で，「教材研究は、非常に難しい作業である。」と述べ，その理由として「教材研究の変数（要素）の多さ」を挙げている．また，その説明として，教材研究を行う際に考慮すべき，教師の内的なレベルの変数［１］～［４］と，学校での現実の教育活動を遂行するための外的なレベルの変数［５］～［８］を提示している．

＜内的なレベルの変数＞

［１］どのような内容を（その構造・関連・発生）
［２］どのような状況で（その知が働く場面）
［３］どのような方法で（身体性も含む教科書などの物理的・記号的条件）
［４］どのような子どもたちの（年齢・心身の特性・準備的状況）

＜外的なレベルの変数＞

［５］学年の他のクラスとの歩調の問題
［６］同教科の他の分野との時間配分
［７］入試等のテスト問題傾向への顧慮
［８］学年歴での行事等との関係

上掲の８つの変数はあくまでも代表例に過ぎず，細かく数え上げればきりがないくらいに様々な配慮すべき要素がある．また，これらに学習を援助する教師自身の問題（これらを自分がどのように理解していて、かつどう準備し表現できるのか、子どもたちに対して教科内容をどう翻訳できるのかという問題）が加わり，教材研究の変数はさらに膨らむと述べられている．

主張されているように，このような変数の多さが教材研究の困難性へと繋がっていることは確かであろう．また，教材研究方法の多様性もこの変数の多さに起因し

[20] この差異は，池田氏が数学教育学者として数学教育のみを思考しているのに対し，野口氏は小学校教員（教科担任制でない）の経験をもとに，教科に関わらず一般に通用する方法として「授業の作法」を論じていることに起因する．

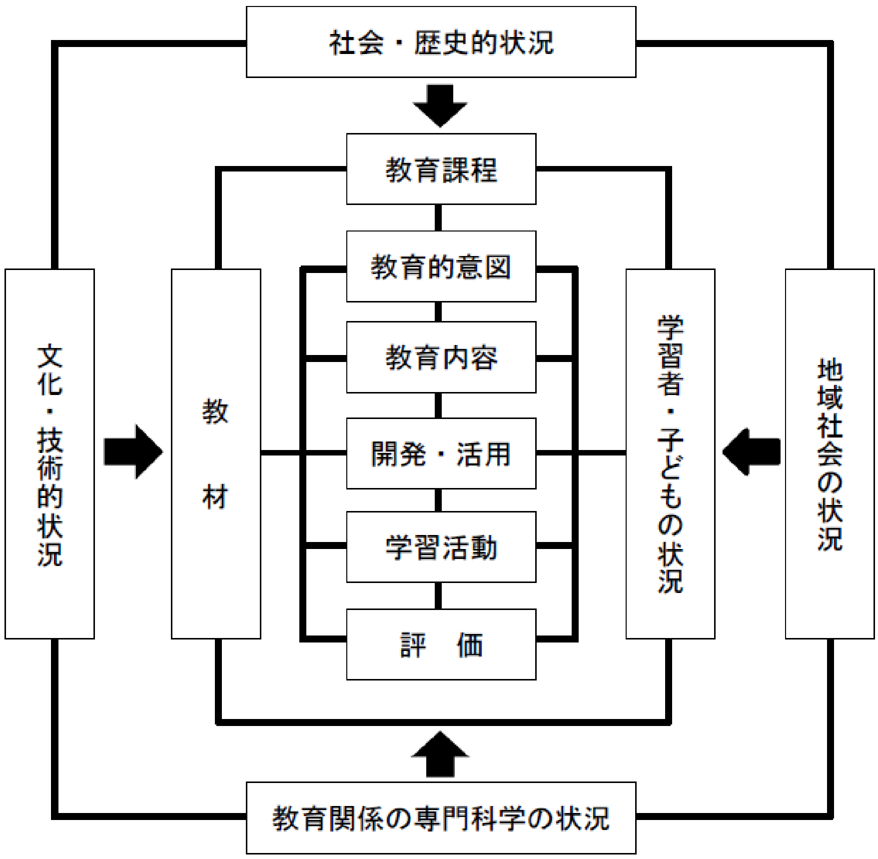
ていると考えられる．故に，教材研究方法を捉える際には，こういった変数（要素）がどのように思考されているかに注目すると良いであろう．この研究では，教師の内的なレベルと外的なレベルに分けて[21]，4 つずつの変数が例示されている．しかし，これが全てを尽くしているわけではないこともまた述べられており，本研究で思考する変数については目的に照らして検討する必要がある．

関連して，この研究では「多角的な教材研究方法論」として，教材研究を進める 3 つの方法（以下の①～③）を提起している．

① 発生的方法：その知の成長してきた歴史や語源を調べる。
② 文化的方法：その知の私たちの生活とのかかわりを調べる。
③ 構造的方法：その知と他の知との関係を調べる。

これらの方法は，特定の教科を意識して述べられているものではなく，一般的に様々な教科の教材研究場面で利用可能な方法として提示されているものである．そのため，算数・数学科においても，これらは有効に働くであろう．実際，第 1 章でも引用した，磯田（2008）の数学教育学における教材開発に関する研究で用いられてい

[21] このような内的なレベルと外的なレベルの区別に関しては，長谷川（2008）によって提示されている「教材学の構造モデル」においても表現されているものである（図 2.2.1）．このモデルでは，よりローカルな内的レベルの事項をより内側に記述している．



【図 2.2.1：教材学の構造モデル】

る「歴史的題材から現代的教材を開発する」という方法は，上掲の①（発生的方法）の一種であると解釈できる．また，前述した「方法の研究」（３）の池田（2014）が提示している，考え方［１］(日常生活の中に疑問を見いだし，数学的に考える）や，それに基づくストラテジー［４］・［５］・［９］などは，上掲の方法②（文化的方法）と解釈される．同様に考えて，池田氏の提示している考え方［３］(適用範囲を広げ，明確化するとともに，拡張・統合を試みる）や，それに基づくストラテジー［１１］・［１３］・［１７］・［２１］・［２３］などは，上掲の方法③（構造的方法）であると解釈されるであろう．このように，算数・数学教育における他の研究と比較すると，この「3 つの方法」は有効であるが，抽象的であるということもわかる．池田氏の研究に沿って言えば，ここで提示されている「3 つの方法」は，教材研究の方法と言うよりも教材研究を支える考え方に近いものである．故に，実際に教材研究を行うことを考える場合には，算数・数学科の特性に根ざした，より具体的な手法が求められることとなる．また，そのような算数・数学科に特化した具体的な教材研究方法を考えた場合，この「3 つの方法」では全てを説明できないということもわかる．数学において「構造の探究」は，必ずしも他の知識との関連を調べることを意味しない．そのため，前述した中川（2005）が提案しているような方法は，この「3 つの方法」では捉えることができないと言える（構造的方法の意味を拡張すれば可能とも考えられる）．加えて，教材研究は必ずしも数学（教科）と教師（指導者）の間だけの問題ではない．学習者の存在を考慮した太田（2013）の提案しているような方法も存在する．そして，このような方法もこの「3 つの方法」では捉えることができない（こちらは，新たな項目を追加する以外に捉える術はない）．以上のように，教材研究の方法は一概に述べることが難しく，教科の特性や様々な変数を考慮して論じる必要がある．本研究で対象を算数・数学教育に絞っている理由はここにある．

（2）構成要素に着目した授業研究の理論研究

直接的に教材研究の理論を思考しているわけではないが，関連研究として授業研究の理論を思考している，池田ら（2002）・橋本ら（2003）の研究を取り上げる．先にも述べたように，授業研究と教材研究は非常に関係の深いものである．故に，その内容には「教材研究」研究にも通ずるものがあるであろう．特に，理論的な研究は「授業研究」研究の方が先行しているため，研究を行う際の観点や方法についても有意義な示唆が得られることと期待する．

これらの研究で提案されているモデルの一つに，図 2.2.2 がある．これは，授業の主要な構成要素として「教師」・「教材」・「子ども」に着目し，それら及びそれらの間の関係から授業研究の進行及び効果を論じるものである[22]．授業研究会を通して，

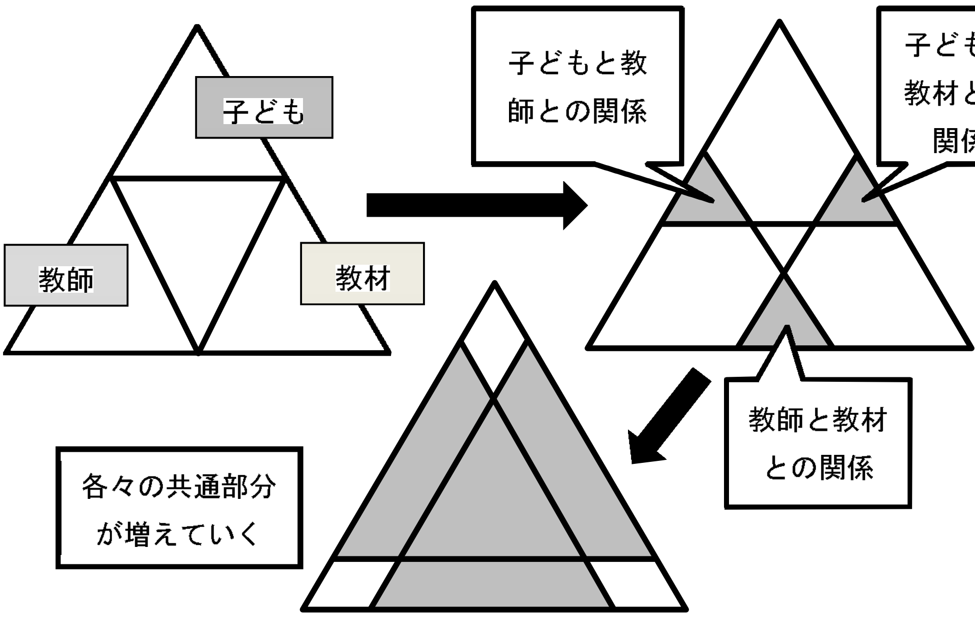
[22] 教育に関わる研究において，この 3 つの構成要素とその間の関係に着目することは度々行われる．この 3 つの構成要素を頂点として形づくられる三角形は，「教授（の）三角形」

「教材を見る目」と「子どもを見る目」が養われ，その間の関係に対する理解が深まるとされている．また，橋本ら（2003）では，その結果として得られる（あるいは養われる）具体的な視点として以下のものを挙げている．

「教材に対して」
① 取り扱う指導内容について，数学的に本質的な部分が見いだせるか。
② 教師の発問は，子どもに考えさせるべき数学的に本質的な部分を奪っていないか。

「子どもに対して」
① 子どもが何を理解しているか，把握しているか。
② 教師の発問を，子どもは理解しているか。
③ 教師は，子どもの反応を上手に活かすことができたか。
④ 子ども同士の協力的な討論がなされたか。

「教材と子どもの両面を考慮にいれて」
① 子どもの興味と，数学的に本質的な部分の両方を考慮にいれた教材を開発できるか。
② 教師の提示した問題から，子どもが自分自身の問いを見いだすことができるか。また，その問いが，数学的に本質的な部分にかかわった問いになっているか。
③ 子ども同士の協力的な討論から数学的に本質的な部分が導かれ，それを授業のまとめとして取り上げることができたか。



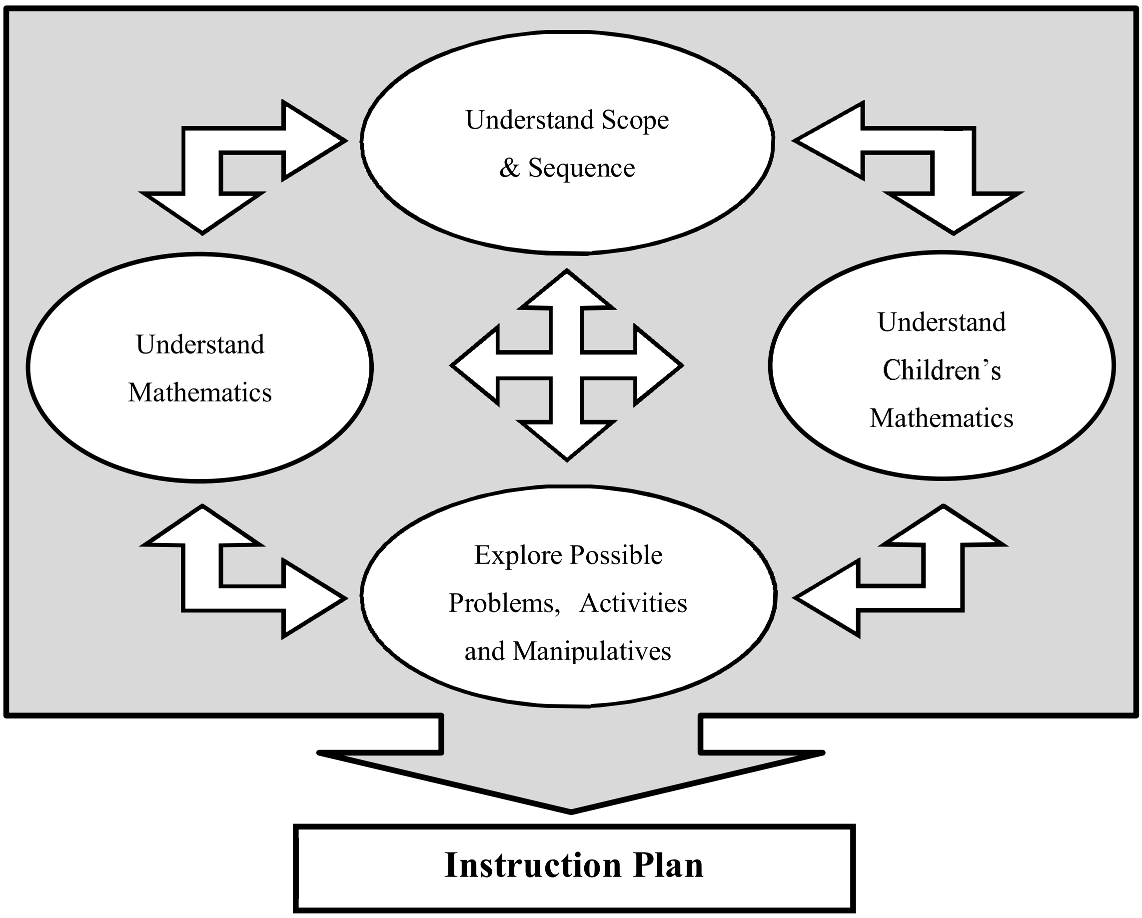
【図 2.2.2：授業研究トライアングル】

（あるいは「教授学的三角形」）と呼ばれることもある．

このように，授業研究に関する理論的研究においては，教育活動を取り巻く数多くの変数（要素）の中から主要なものを取り出し，主要な構成要素とその間の関係に着目してこれを捉えている．そして，その結果としてどのような視点が得られたり，養われたりするのかを思考している．このような方法は，教材研究の方法を捉えるための理論を構築する際にも有効であろう．

（３）教材研究モデルに関する研究

教材研究の理論モデルに関する研究の先駆けは，Watanabe,T.ら（2008）であると思われる[23]．この研究では Kyozaikenkyu という語が用いられ，日本の教師文化に根差している教材研究が研究対象となっている．その中では, Kyozaikenkyu Process（教材研究の過程）を端的に表したモデルとして，図 2.2.3 が提示されている．



【図 2.2.3：Watanabe,T.らによる Kyozaikenkyu Process のモデル】

[23] 教材研究に焦点を当てた論文や，授業準備や指導のための知識について論じる研究は，それ以前にも存在するため，このような研究の始まりに関する明確な線引きは難しい．

このモデルでは「Understand Scope & Sequence」・「Understand Mathematics」・「Understand Children's Mathematics」・「Explore Possible Problems, Activities and Manipulatives」の４つを頂点とし，その繋がりの中で教材研究が進行し，授業が計画される（Instruction Plan が行われる）としている．これまでの言葉で言えば，その４つの変数（要素）に着目して教材研究を捉えているということである．この研究では，Lesson Study（授業研究）における基本的かつ有用な構成要素として，教材研究を紹介し論じている．そのため，教材研究の理論を探究することは，研究の主要課題ではない．そういったこともあって，上掲のモデルの構成要素については詳述がされていない．そこで，内容を補い以下に解説を与えておく．

○　Understand Scope & Sequence

数学の指導内容には，内容の系統性に関わる縦の繋がりと，他領域や他教科との関連を意味する横の繋がりがある．故に，一つの教材や一つの学習活動を考えた場合であっても，それは範囲と繋がりを有している．そのため，教材研究の過程では，「その教材を通して何が学ばれるのか？」「その教材はどのような他の内容と関連するのか？」「どのような既有知識が本学習内容と関わっているのか？」「本学習内容は先のどのような学習に繋がっているのか？」などの問を思考し，教材や学習の“範囲と繋がりに関する理解を深める”ことが行われる．

○　Understand Mathematics

数学を指導するにあたって，“数学の理解”は必要不可欠である．教師は指導内容以上の数学的知識を有し，より正確に教材や指導内容について理解している必要がある．また，学校で学ばれる数学は，必ずしも学問としての数学と等しくはない[24]．そこには多くの工夫やそのための差異が存在する．故に，教師は（「教わってきた数学」の知識だけに頼るのではなく）数学的に正しい知識・理解に基づき，適切に指導内容を構築しなければならない．教え子の考えを理解したり，疑問に答えたり，学習の方向性を定めたりする際など，教育活動の様々な場面にこの教師の数学の知識・理解は影響を与える．そのため，教材研究の過程では，“数学の理解を深める”ことが行われる．

○　Understand Children's Mathematics

子どもが主体的に考え，新たな知識や考え方を学んでいくことが目指されて

---

[24] 宮川（2011）は，教授学的転置（didactic transposition）の視点から，数学教育に関わる知（数学）は「学問としての知（数学）」「教えるべき知（数学）」「教えられる知（数学）」という３つの異なる知（数学）に分けて考えられるとしている．

いる．その際，学習活動を支えるのは，子どもの有している知識・考え方・ストラテジー・経験などである．これらのような子どもの有している数学に関わる様々なものを総称して「子どもの数学」という．また，子どもの誤答やつまずきも，この「子どもの数学」に基づくものであると考えられる．故に，教師はこの“子どもの数学を理解”し，それをふまえて指導を構築していく必要がある．

○　Explore Possible Problems, Activities and Manipulatives
指導目標を達成するために，教師はそれに適した教材を適切な発問のもと提示し，教え子の学習を支え導いていく必要がある．そのため，教師は教材研究の過程で，その教材を用いることで“生起し得る問題・活動・操作の探究”をし，それらを把握しておかなければならない．また，その結果をふまえ，利用教材の選定や発問・声掛けの工夫を行い，指導を構築していく．

また，Watanabe,T.ら教材研究の行われ方について，他の先行研究でなされている提言を参照し，教材研究には大きく２つの段階があるとも述べている．１つ目の段階は，教師自身が教材を探究し，その理解を深めるというものである．そして，２つ目の段階は，それが教え子の目にどう映るかを考えるなど，教え子を意識して行われるものである．また，そういった教材研究の中で思考されることの例として，以下の 9 つの問を挙げている．

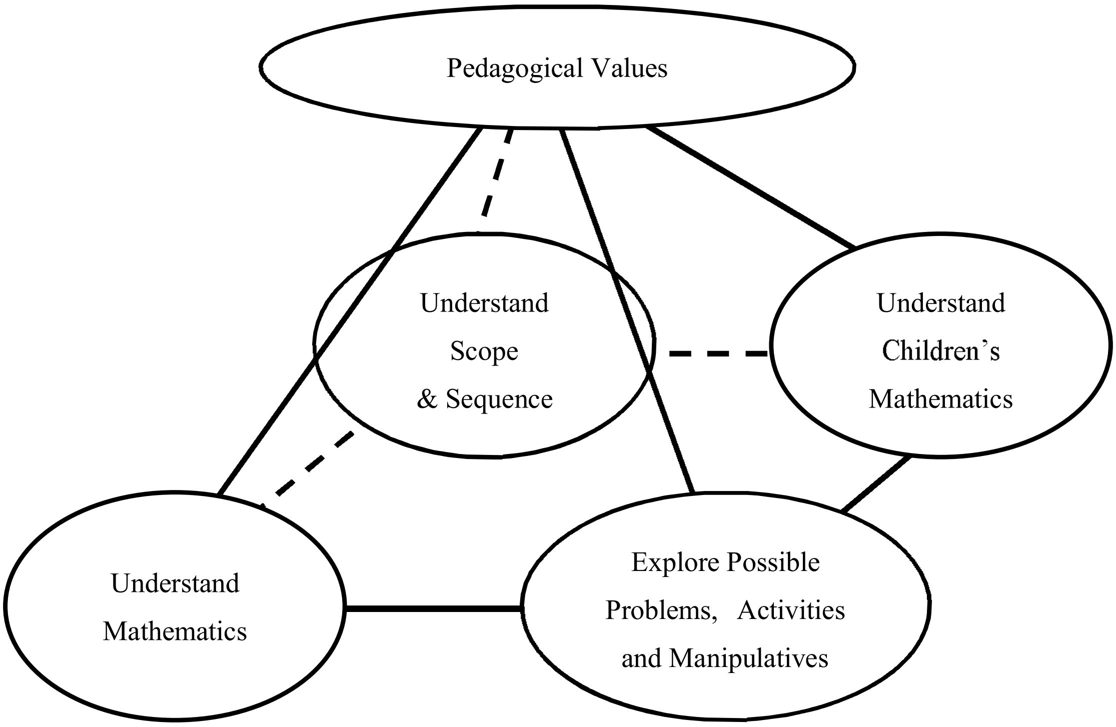
○ この内容・考え方の本当の意味は何か？
○ この内容・考え方はどのように他の内容・考え方と関連するか？
○ 何故，カリキュラムのこの特定のポイントで，この内容や考え方を教えるのか？
○ 教え子は既有知識を出発点として，この新しい内容・考え方に対して，どのような考え方をするか？
○ 何故，この特定の問題は，教え子が新しいアイデアに至るのを助けるのか？
○ 教え子は既有知識を用いて，どのようにこの問題を解決するのか？また，彼らの問題解決のストラテジーは，この新しい内容・考え方を発展させるのに，どのように用いられるか？
○ 共通の誤りは何であるか？何故，教え子はそのような誤りを犯すか？教師はどのようにそれらの誤りに対応するべきであるか？
○ 教え子が将来的にこのアイデアを使用して，どのような新しいアイデアを構築することが期待されているのか？
○ どのような操作活動や他の教材を教え子に提供すべきか？それらは教え子の学習にどのような影響を与えるか？

この 9 つが全てではないが，こういった問を思考することで教材研究は進行するということである．

藤井（2013）は，上掲の Watanabe,T.らのモデル（図 2.2.3）を「構成要素とその関係を的確に顕在化させた教材研究の理論的モデルと言える。」と述べている．またその上で，教材研究の質や価値を吟味する枠組みが必要であると考え，更に「Pedagogical Values（教育的価値）」（以下，PV と略記する）という頂点を加えたモデル（図 2.2.4）を提案している[25]．このモデルでは，四角錐の底面に Watanabe,T.らの 4 つの構成要素が置かれ，PV はそれらと次元を異にする上位のものとして導入されている[26]．これは，「価値の吟味こそ規範学としての数学教育学が担う役割である」という考えに基づくものであり，教材研究においてもその価値を重要視すべきであるという考えを表すものである．このように，より上位の構成要素として PV を加え，その価値を問うことの有用性は様々な先行研究を概観すると良くわかる．教材の研究やそれに基づく実践事例の中には，この PV を見失ったものが実在するからである．「何のための教材研究・授業実践なのか？」ということは，当然重要視されるべきものであり，むやみやたらに探究を行えば良いというわけではない．また，このことは，本論における教材や教材研究の定義からも言えることである．教材は「教育目標を達成するために」存在するし，「教育的に編成」されていなければならない．また，教材研究も「当該の教育目標を達成するために」行われるのであった．故に，PV を重視するこの四角錐型の教材研究モデル（図 2.2.4）こそ，本論で思考している教材研究の主要な構成要素とその関係を的確に表しているものと言えよう．

[25] 藤井氏により，このモデルが初めて提案されたのは，2008年のICME11におけるPlenary Talk においてであると思われる．また，Fujii,T.（2013）でも同一のモデルが提示されているが，そこでは「Pedagogical Values」ではなく，「Educational Values」という語が用いられている．

[26] 図 2.2.4 では底面の「Understand Mathematics」と「Understand Children's Mathematics」，「Understand Scope & Sequence」と「Explore Possible Problems，Activities，and Manipulatives」を繋ぐ辺が明記されていないが，藤井氏は Watanabe,T.らの研究成果をもとにこのモデルを作成しているため，これらの繋がりが思考されていないわけではない．四角錐の底面によって繋がっていると考えるのが妥当であろう．本研究でも，そのように考えてこの教材研究モデルを思考する．



【図 2.2.4：藤井の教材研究モデル】

（4）数学指導の為の知識に関する研究

授業研究に関する理論研究（本項の（２））の中では，授業研究の結果として得られる（あるいは養われる）視点について考察されていた．では，教材研究の結果として得られるものは何であろうか．本項の（３）で言及した，Watanabe,T.ら（2008）や Fujii,T.（2013）が述べているように，教材研究は優れた授業の計画・実践に繋がる．故に，結果として得られるものは，この優れた授業の計画・実践を支え，促すものであると考えられる．また，教材研究は教師によって行われるものであるから，それを得るのは教師であるということになる．そのように考えると，教師は教材研究を通して，優れた教育活動を支える何らかの知識を得ていると予想される．そこで，ここでは優れた教育活動を支える教師の知識に関する先行研究を整理・考察し，上記の疑問の答えの示唆を得ることを目指す．

教師の知識を専門知識として表現し，それを研究対象へと高めた先駆的な研究として Shulman（1986）が存在する．そこで，Shulman は教師の知の区分（A Perspective on Teacher Knowledge）として以下の３つを挙げている．

（A）Subject matter content knowledge（内容知）
（B）Pedagogical content knowledge（教授学的内容知）
（C）Curricular knowledge（カリキュラム知）

また，その上で Shulman（1987）は「Major Categories of Teacher Knowledge（教師の知識の主な項目）」として，以下の７つ（図 2.2.5）を挙げている[27].

- Content knowledge
- General pedagogical knowledge, with special reference to those broad principles and strategies of classroom management and organization that appear to transcend subject matter
- Curriculum knowledge, with particular grasp of the materials and programs that serve as "tools of the trade" for teachers
- Pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding
- Knowledge of learners and their characteristics
- Knowledge of educational contexts, ranging from workings of the group or classroom, the governance and financing of school districts, to the character of communities and cultures
- Knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds

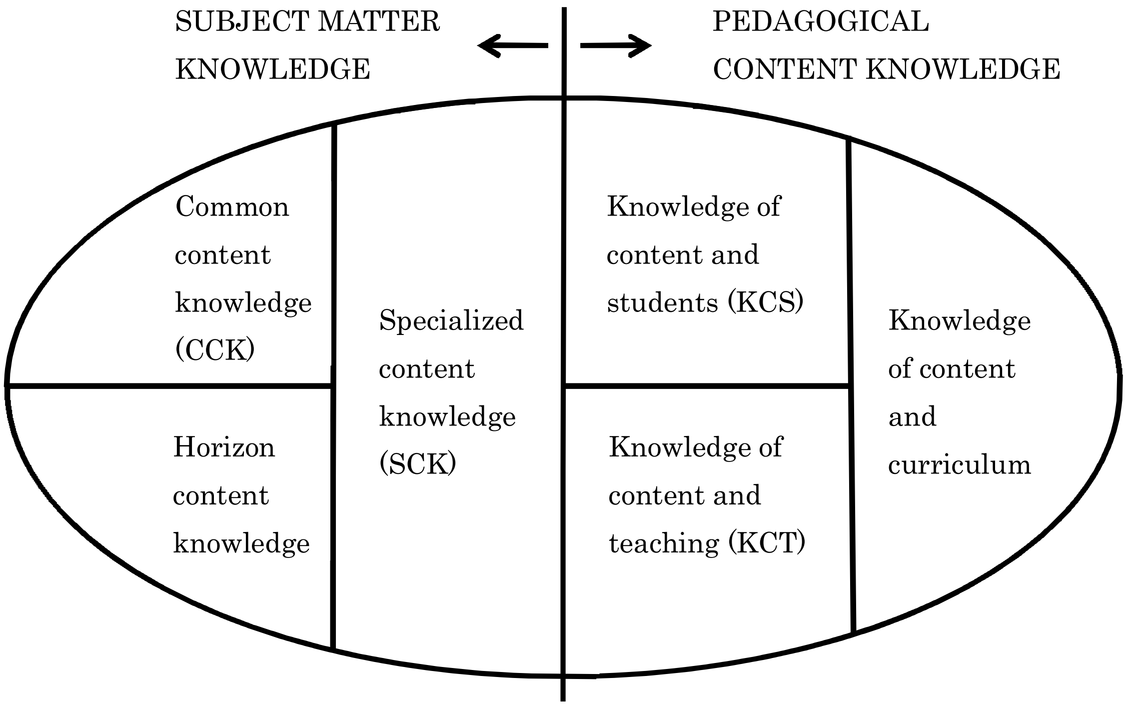
【図 2.2.5：Shulman's Major Categories of Teacher Knowledge】

Shulman の研究で思考されている内容は，教育全般に関するものである．そのため，数学教育学においては「算数・数学の教育に特化し，その特性をふまえた場合にはどのような知識が求められるのか？」という問が生じる．この問を思考するものとして，Ball ら（2008）の研究が存在する．Ball らは，Shulman の研究をふまえた上で，数学指導における課題を思考し，「Mathematical Knowledge for Teaching

[27] 後に提示するモデル (図 2.2.6) とも関わるため，英文のまま提示している．補足として，以下に図 2.2.5 の拙訳を付しておく．

- 内容・教材の知識.
- 一般的な教授学的知識．指導内容に依存しない，教室の管理や組織に関わる広範な原理やストラテジーに関する知識.
- カリキュラムの知識．商売道具として教師の役に立つ，題材や学習計画の詳細な理解.
- 教授学的内容知．教科固有の専門的な理解に基づく指導方法など，教科内容と教授学の双方にまたがる複合的な知識.
- 学習者に関する知識.
- 教育的文脈の知識．集団や教室の仕組みにはじまり，行政及び学区の財政，地域社会や文化の特性に至るまで，教育を取り巻く様々なことに関する知識.
- 教育の目的，目標，価値，それらの宗教的・歴史的背景に関する知識.

（数学指導の為の知識[28]）」に関する以下のモデル（図 2.2.6）を提案している．



【図 2.2.6：Domains of Mathematical Knowledge for Teaching】

28 一般には直訳して，「指導の為の数学的知識」と訳されるようである．しかし，このモデルの構築するにあたり，Ball ら（2008）は「In analyzing the mathematical demands of teaching, we seek to identify mathematical knowledge that is demanded by the work teachers do.」と述べている．つまり，このモデル（図 2.2.6）は（数学）指導において要求される数学的なものを分析することによって導き出されているわけである．そのため，得られている結論は必ずしも日本語で「数学的知識」と呼ぶことが相応しいものばかりではない．例えば，「Mathematical Knowledge for Teaching」の中には「Pedagogical Content Knowledge（教育的内容知）」の一つとして「Knowledge of Content and Curriculum（内容-カリキュラムの知）」というものがある．これは，日本語において一般的には「教育的知識」と呼ばれる類のものであると考えられる．実際に，岡崎（2013）は「Knowledge of Content and Curriculum」を「社会状況と目的，内容とその編成，その垂直的・水平的関連性，指導上の扱いなどを含むもの」と解釈している．この解釈においても，やはりこの知識は数学的な側面を有してはいるものの，「数学的知識」と呼ぶには語弊があると言えよう．そもそも，Ball らは数学を重視し，指導そのものを Mathematical なものと捉えている．「Mathematical Knowledge for Teaching」という表現は，そういった考えに基づくものであり，このモデルに付された固有名詞に近いものである．本論では，このような解釈のもと「指導の為の数学的知識」という和訳は不自然であり，誤解を招く可能性があると判断し，これを「数学指導の為の知識」と訳している．

モデル内の各項目に関する，Ball らの解説は次の通りである．

＜SUBJECT MATTER KNOWLEDGE＞

○　Common content knowledge（共通内容知）

カリキュラムの内容に深く関わる知識である（ただし，ここでいうカリキュラムとは，特定のカリキュラムではなく，一般的な内容の系列としてのカリキュラムである）．これは，学習者の解答が誤っていることや，教科書内の不正確な定義などを認識したり，正しい用語や表記法を用いて板書をしたりすることを可能とする．要するに，「共通内容知」は教師が教え子に対し適切な課題を課すために必要な知識である．

○　Specialized content Knowledge（専門的内容知）

数学の知識である．それは，一般的な教養のある大人の有している数学の知識を越えた，専門的なものでなくてはならない．しかし，ここではまだ教育に関する知識や学習者に関する知識は求められていない．数学教育における一般的な仕事の多くは，豊かな数学の知識を必要とする．例えば，教育における数学的な仕事[29]には，「数学的な考え方の提示」や「学習者の“何故”に答える」など複数のものがある．これらの仕事を支える，(授業及び学習者とは無関係の）数学に関わる専門的な知識が「専門的内容知」である．

○　Horizon content knowledge（水平的内容知）

数学の学習内容がカリキュラム上でどのように関連しているかについての知識．例えば，第一学年の学習内容が第三学年の学習内容と繋がっており，それを支えていることを把握するなど．

---

29 「教育における数学的な仕事」の具体例に関して，Ball ら（2008）は以下の 16 個を例示している．

・Presenting mathematical ideas
・Responding to students' "why" questions
・Finding an example to make a specific mathematical point
・Recognizing what is involved in using a particular representation
・Linking representations to underlying ideas and to other representations
・Connecting a topic being taught to topics from prior or future years
・Explaining mathematical goals and purposes to parents
・Appraising and adapting the mathematical content of textbooks
・Modifying tasks to be either easier or harder
・Evaluating the plausibility of students' claims (often quickly)
・Giving or evaluating mathematical explanations
・Choosing and developing useable definitions
・Using mathematical notation and language and critiquing its use
・Asking productive mathematical questions
・Selecting representations for particular purposes
・Inspecting equivalencies

＜PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE＞

○　Knowledge of content and students（内容 - 生徒の知）
教え子に関する知識と数学の知識を繋ぐ知識．教師は教え子がどのようなことを考えるか，またどのような部分でつまずくかを事前に予想していなければいけない．教師が説明に用いる具体例などを選定する際には，教え子が興味を持ち，やる気を出してくれるかなどを予想してこれを考える必要がある．また，発問をする際にも，教え子の反応や適切な難易度かを考えた上でこれを行う必要がある．授業の中で，教え子は考え見出したことを不完全な形で表現することがある．教師はこれを適切に解釈し，正しく数学と結び付けている．これらの行為を支えているのが，「内容 - 生徒の知」である．

○　Knowledge of content and teaching（内容 - 指導の知）
指導に関する知識と数学の知識を繋ぐ知識．指導を構築するためには数学的知識が必要である．教師は指導のために特定の教材や内容を配列する．その際，教師はどのような例を用いて学習をはじめ，どのような例を用いて内容理解を深めるかを選んでいく．授業において，教師は教育的価値のある特定の考え方や，異なる方法や手順を指導する．その際，どのような表現を用いるべきか，その良し悪しを評価するのも教師である．これらの各行為を支えているのが「内容 - 指導の知」である．

○　Knowledge of content and curriculum（内容 - カリキュラムの知）
Ball ら(2008)は前掲の 5 つに比べ，この知識に関しては詳しく論じていない．そのため，本知識に関しては脚注 28（p.39）の岡崎（2013）による解説を参照されたい．

ここまで，Shulman 及び Ball らの研究成果を整理してきた．そこでは，優れた数学指導を支え促す知識の分類・整理が行われており，主要な複数の知が挙げられていた．この他にも，異なる観点から行われている類似研究は存在する．そういった先行研究からは，数学指導に関わる知識の多様性が見えてくる．また，このような研究において提示されるモデルは，教師の教材・内容に関する知を整理して把握する上では実に有用であろう．しかし，実際の教育活動においてはこれらが複雑に関わり機能していると考えられる．そのため，記述的な特性を強めるためには更なる研究・改良が必要かもしれない．また，数学教育学の性質上，より規範的な特性を持ったモデルも望まれる所である．続く第 3 節では，これらの多様な知と教材研究の関連を明らかにし，教材研究に関する理論構築を目指す．その際にも，モデルの記述的特性と規範的特性という両観点は重要なものとなるであろう．

本節では，先行研究を 3 種類に大別し整理・考察してきた．特に，最後に言及した「理論の研究」においては，第 3 節で行う理論構築を見据え，その基盤となる先行研究を提示してきた．そこで，得られた示唆を整理すれば，次の通りである．
「算数・数学における教材研究の方法を捉える理論的枠組みを構築するにあたり，まず教材研究の主要な構成要素に着目することが有意義であろう．その上で，主要な構成要素とその関係から如何なる視点・知識が得られ，養われるのかを把握することが望まれる．その際，主要な構成要素とその関係については，藤井（2013）によって提示されているモデルがそれらを的確に表していると考えられる．また，教材研究によって得られる知識については Ball ら（2008）の研究成果が参考になるであろう．」
続く第 3 節では，これらの示唆を基に，教材研究の方法を捉える理論について思考する．

第３節　教材研究方法を捉える枠組み

前節でみてきた複数の研究成果を基に，本節では教材研究の方法を捉えることが可能な理論枠組みの構築を行う．その流れは次の（Ⅰ）～（Ⅲ）の通りである．

（Ⅰ）教材研究の主要な構成要素の抽出
（Ⅱ）主要な構成要素とそれらの関係への着目
（Ⅲ）主要な構成要素及びそれらの関係を探究すること（教材研究）で得られるものの明確化

この流れは，前節３．（２）で提示した，「授業研究の理論研究」の方法を参考にしたものである．ここで，上記の（Ⅰ）・（Ⅱ）に関しては，教材研究の理論に関する先行研究（前節３．（１）及び３．（３））でも行われているものであった．故に，それらを基にして，（Ⅲ）に関する研究を進めるのが本節の主な内容である．また，本節では枠組みの構築を行った後に，その適用を考え，構築された枠組みの性質についても考察する．

１．主要な構成要素の抽出及びそれらの関係への着目

本項では，前掲の流れ（Ⅰ）・（Ⅱ）に関する内容を扱う．つまり，「教材研究の主要な構成要素の抽出及びそれらの関係への着目」を行う．先行研究でも示されているように，教材研究には多種多様な構成要素が存在する．故に，それら全てを同時に思考することは難しい．そこで，それらの中でも主要なものを抽出し，教材研究を捉える必要がある．また，単に主要な構成要素を抽出するだけでなく，それらの関係に着目ことの有用性も先行研究では示されていた．これに関して，前節末でも述べたように本研究では，Watanabe,T.ら（2008）のモデルに PV を付加した，藤井（2013）のモデル（図 2.2.4）を採用することとする．つまり，本研究では主要な構成要素として，以下の５つ（括弧内は後に利用する略称）を抽出しそれらの関係について着目するということである．

○　Pedagogical Values（PV）
○　Understand Scope & Sequence（S&S）
○　Understand Mathematics（Math）
○　Understand Children's Mathematics（Children's）
○　Explore Possible Problems, Activities and Manipulatives（Explore）

また，先行研究に基づき，PV の優位性（他の要素と次元を異にするという性質）も保持することとする．

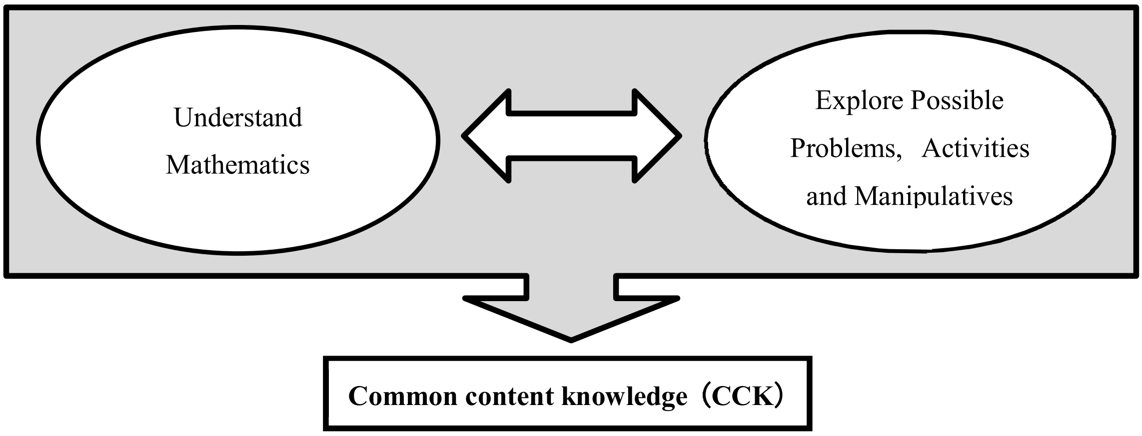
２．教材研究によって得られるもの

Watnabe,T.ら（2008）の研究では教材研究の結果得られるものは Instruction Plan であるとされている．藤井（2013）の研究では，これに PV が付加されているが，依然として得られるものに関する言及はなされていない．しかし，本研究では教材研究の方法を捉える理論枠組みの構築を目指しているため，このような最終的な成果を示すだけ

では不十分である．前節３．（２）の授業研究の理論で思考されているように，行為の進行に伴って何が得られるかをより詳細に思考する必要がある．前節３．（４）でも述べたように，教材研究は優れた授業の計画・実践に繋がる．故に，教材研究の過程では，その進行に伴い優れた授業の計画・実践を促す知が得られていると考えられる．本研究では，その一つとして Ball ら（2008）が示している「Mathematical Knowledge for Teaching」があると予想する．そこで，Ball らの提示している知が教材研究のどのような局面で獲得され，養われているかを考えてみる．

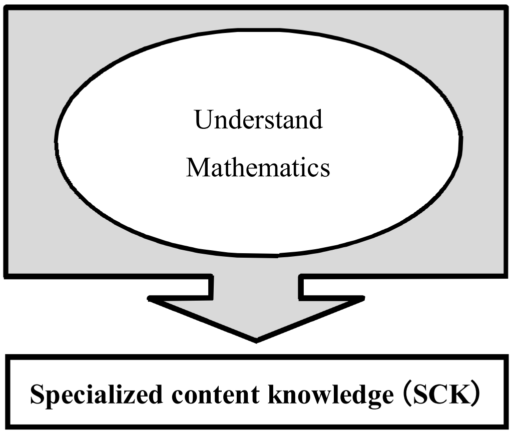
（１）Subject Matter Knowledge

まず，「Common content knowledge（以下，CCK と略記する）」について考える．CCK は主として数学に関する知であるが，正しい用語の使用や板書方法，適切な課題提示などを支えるものであるとされている．故に，「数学」や「生起し得る問題・活動・操作」及び「その関係」の探究によって CCK は獲得され，養われる．それを図示すれば図 2.3.1 の通りである（ただし，「Understand Mathematics」に特化した場合なども含むものとする）．



【図 2.3.1：CCK の得られる教材研究の局面】

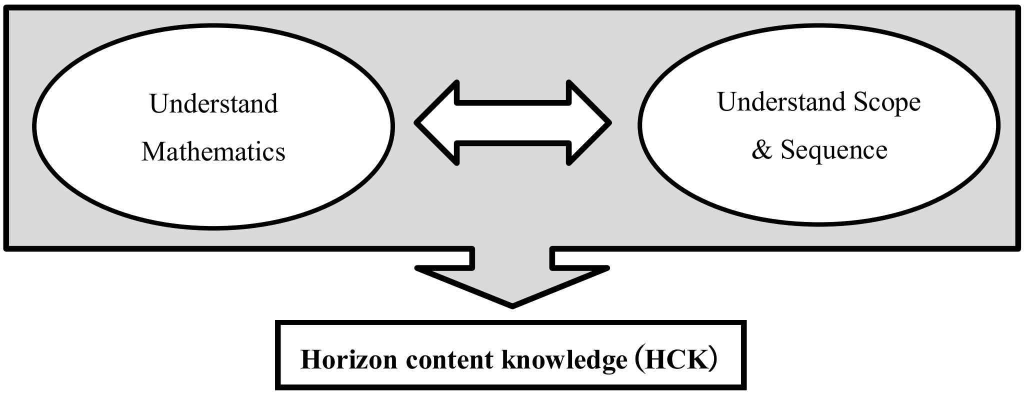
次に，「Specialized content Knowledge（以下，SCK と略記する）」についてであるが，SCK は授業及び学習者とは無関係な数学に関する専門的な知である．故に，これは「数学の理解」を深めることによって獲得され，養われる．それを図示したものが図 2.3.2 である．



【図 2.3.2：SCK の得られる教材研究の局面】

最後に，「Horizon content knowledge（以下，HCK と略記する）」について考える．HCK は数学内容の繋がりに関する知で

ある．故に，「数学」と「内容の繋がり」及び「その関係」の理解を深めることにより獲得され，養われる．これを図示したものが図 2.3.3 である（ただし，「Understand Scope & Sequence」に特化した場合なども含むものとする）．



【図 2.3.3：HCK の得られる教材研究の局面】

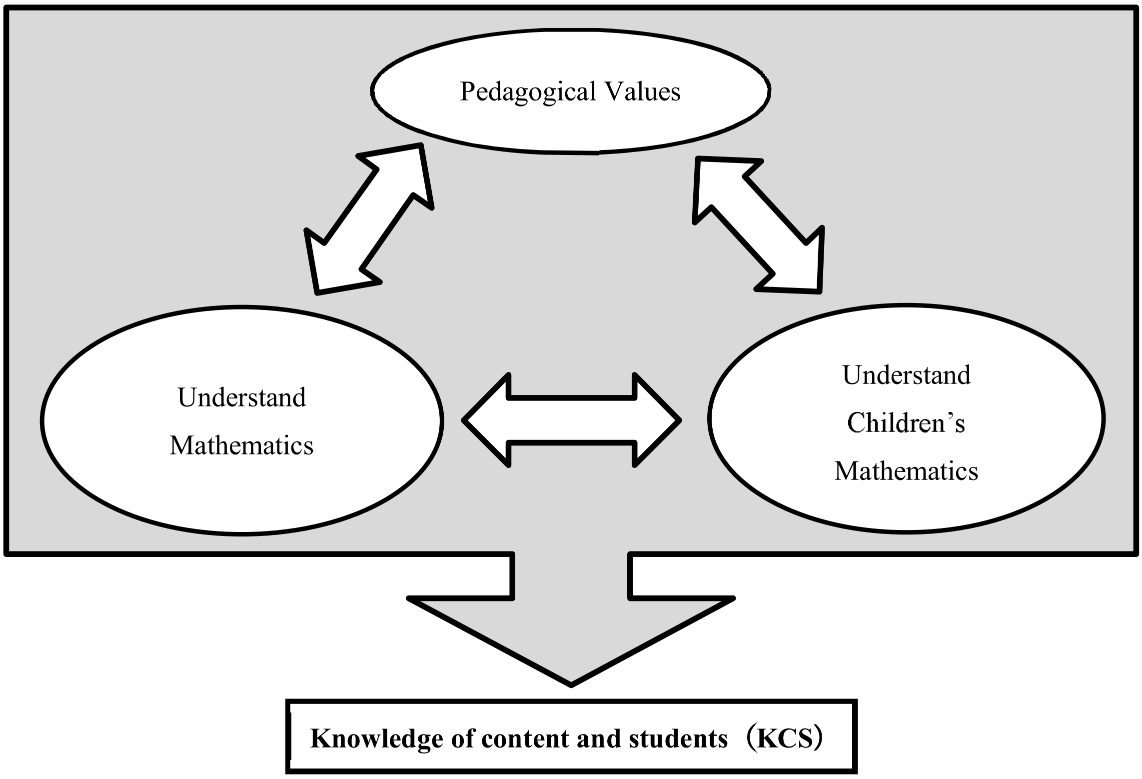
以上の考察からわかるように，「Subject Matter Knowledge」に含まれる 3 つの知（CCK, SCK, HCK）が得られる教材研究の局面には常に「Understand Mathematics」が関わっている．これは，Ball らの研究が教育活動を支える知の中でも，特に数学的なものを重視して進められているためである．このことから，算数・数学という教科の特性を重視し教材研究を思考した場合には，「Understand Mathematics」に優位性が生じることがわかる．

（２）Pedagogical Content Knowledge

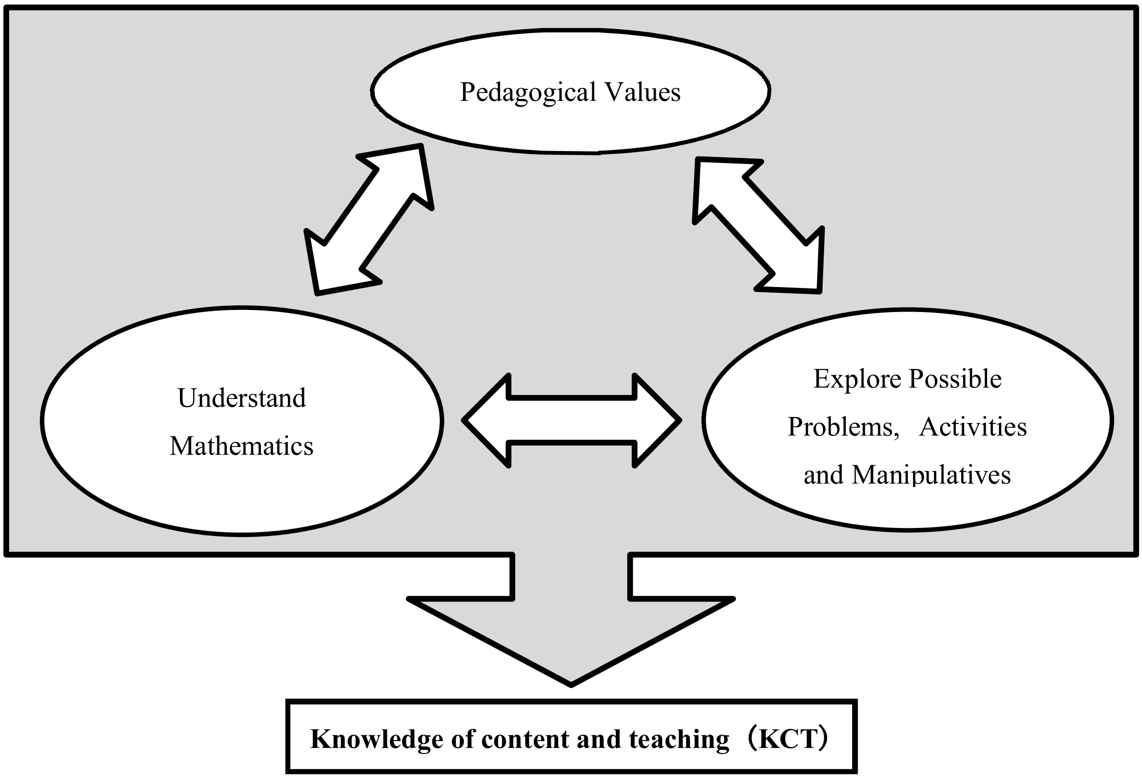
まず，「Knowledge of content and students（以下，KCS と略記する）」について考える．KCS は数学と学習者を繋ぐ知である．故に，主として「数学」と「学習者の数学」及び「その関係」を思考することでこれは獲得され，養われる（「数学内容の繋がり」や「生起し得る問題・活動・操作」が無関係というわけではない）．また，KCS には学習者の興味ややる気，反応などを考慮するといった PV にかかわる内容も含まれている．そのため，これを図示すれば図 2.3.4 のようになる．

次に，「Knowledge of content and teaching（以下，KCT と略記する）」についてであるが，KCT は数学と指導を繋ぐ知である．KCT は「数学の深い理解」と「その内容から生起し得る問題・活動・操作などの把握」を要求する．また，KCT に基づいて指導を構成する際には，何が指導すべき価値ある内容や考え方であるかを判断する PV も必要となる．これを図示したものが図 2.3.5 である．

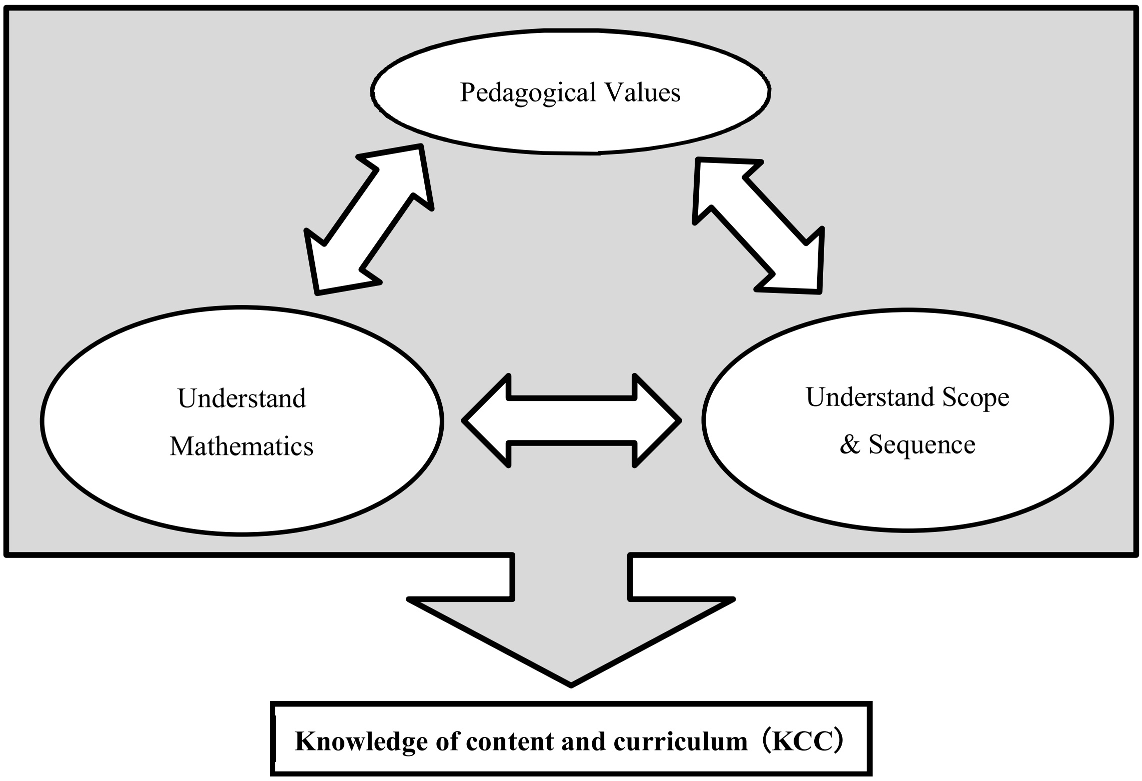
最後に，「Knowledge of content and curriculum（以下，KCC と略記する）」について考える．KCC は数学とカリキュラムを繋ぐ知である．これを得るためには，「数学」と「その繋がり」に関する理解を深めることが必要である．また，カリキュラムを考え，指導上の扱いを思考するためには，PV に基づく判断も求められる．これを図示したものが図 2.3.6 である．



【図 2.3.4：KCS の得られる教材研究の局面】



【図 2.3.5：KCT の得られる教材研究の局面】



【図 2.3.6：KCC の得られる教材研究の局面】

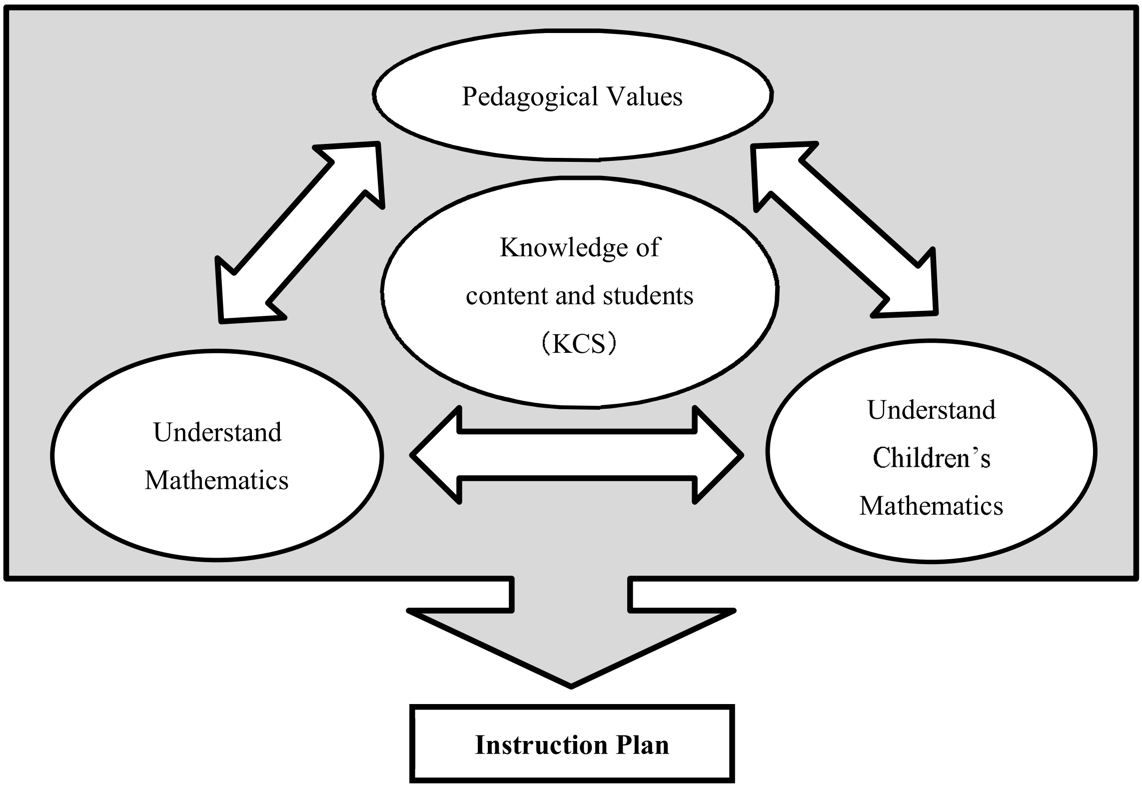
以上の考察より，「Pedagogical Content Knowledge」に含まれる３つの知が得られる教材研究の局面には，常に「Understand Mathematics」及び「Pedagogical Values」が関わっていることがわかる．「Understand Mathematics」が関わることに関しては，（１）の場合と同様，Ball らの研究意図に起因するものであろう．また，PV が関わるのは「Pedagogical Content Knowledge」が，その名の通り教育的な側面を有する知を考察したものであるためと考えられる．本研究においても，この２つの構成要素の重要性は認めている．算数・数学科の特性を考慮した，教育的に価値のある教材研究を思考する限り，この二つの構成要素ははずすことのできないものとなるであろう．

上掲の３つのモデルは，「Understand Mathematics」及び「Pedagogical Values」に優位性を持たせ，主要な構成要素の内３つに着目して教材研究を行った場合全てを尽くしている．具体的な教材研究の一つ一つの方法は，必ずしも主要な構成要素全てを同時に思考しているわけではなく，その都度中心的に考えられている要素がある．そのため，どの要素を中心に思考しているのかを明確化することで，多くの教材研究方法は四角錐型の教材研究モデル（図 2.2.4）の一部（切り口）として捉えられると予想される．次項においては，このような予想のもと，本項で提示したモデルを用いて具体的な教材研究方法を捉える枠組みを構築する．

３．教材研究方法を捉える枠組み

前項では，教材研究に関する四角錐型モデル（図 2.2.4）と 数学指導の為の知識（図 2.2.6）を関連付けた．これにより，四角錐型モデルの一部（切り口）を思考することで，そこから得られるものがより具体的に捉えられることがわかった．これまでにも述べてきたように，教材研究には様々な行為が含まれている．四角錐型モデルのような，先行研究で提示されているモデルは，「教材研究とは何か」を表現するために，教材研究と呼ばれ得る様々な行為を包括的に捉えるように作られていた．本研究では，そういった様々な行為（教材研究方法）一つ一つをより的確に捉えるために，より局所的にモデルを思考するのである．その際，誤解を避けるために１つ注意しておくことがある．前項で行ったのは，「先に得られるであろうもの（数学指導の為の知識）を設定し，それがどのような教材研究をすることで得られるかを示した」のである．故に，逆に思考した場合，つまり「先に教材研究モデルの切り口を設定した場合に，そこからどのような知が得られるか」についてを全て記述したわけではない．また，設定した知が異なるものであった場合に，同様に対応付けることが可能であるかは保証されていない．特に，Ball らの提示している「Mathematical Knowledge for Teaching」を思考する限りにおいては，「Understand Mathematics」と「Pedagogical Values」という２つの構成要素に優位性が存在していた．また，複数の先行研究によって既にそれらの知の機能や価値は明確になっていた．そういった条件下で，前掲の対応付けは行われたのである．本研究では，「Understand Mathematics」と「Pedagogical Values」の優位性を認めている．その上で，教材研究を思考する限りにおいて，考えるべきは「Pedagogical Content Knowledge」の得られる３つの教材研究場面のみで十分だと考えられる．つまり，図 2.3.4・図 2.3.5・図 2.3.6 で示した，３つのモデルで教材研究の方法を捉えるということである．先にも述べたように，これで全ての教材研究と呼ばれ得る行為及びその方法が捉えられるという保証はない．数学的であり，教育的に有意義なものに関しては説明可能であろうということである．本論文では，このような考えに基づき「Understand Mathematics」と「Pedagogical Values」に加えて，もう１つ主要な構成要素を定め，その３つの要素及びそれらの関係について思考することで，教材研究方法を捉えるような理論的枠組みを提案する．実際に，このような枠組みを用いて，具体的な教材研究方法を説明する場合には，「Understand Mathematics」や「Pedagogical Values」もより具体的なものとなる．例えば，「Understand Mathematics」としては「三平方の定理に関わる数学的内容の理解」が設定されたり，「Pedagogical Values」としては「定理の発見を追体験させることは有意義である．これにより驚きや感動を味わわせたい．」といったことが設定されたりする．また，このような具体的な教材研究において得られるものは，前述した知のみならず，その知に基づく具体的な指導計画などでもある（得られた知をもとにして，異なる構成要素に着目した教材研究が行われることもある）．そこで，モデルを次の図 2.3.7 のように改め，その関係性がより的確に表現されるよう

にする．図 2.3.7 では KCS に関わるモデルを示したが，KCT や KCC に関するモデルも同様に記述する．そして，このようなモデルに照らして教材研究方法を整理・記述・伝達するというのが，本論文で提案する教材研究方法を捉える枠組みである．



【図 2.3.7：KCS に関わる教材研究方法を捉えるためのモデル】

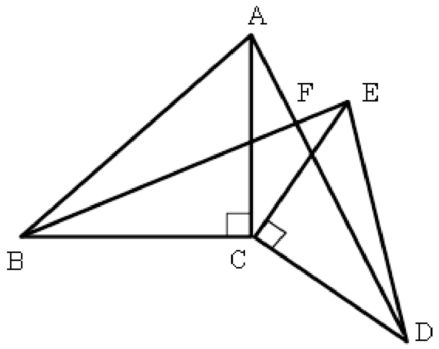
４．枠組みの適用とその性質

本項では，前掲のモデルに照らして具体的な教材研究方法を記述する．これにより，本枠組みが教材研究方法を捉える機能を有していることを示す．また，そこから枠組みの性質について考察する．教材研究方法に関わる，先行研究の整理も兼ねて，ここでは前節第 2 項で提示した（1）・（2）の 2 つの研究を思考する．

まず，（1）の中川（2005）の研究について考える．この研究は，1 つの具体的な教材研究方法として，「類比の考え方」を利用した方法を提案・考察するものであった．その中では，「命題を一般化，拡張することを図形の指導を通して伝えること」の教育的な価値が認められており，それを促す指導･教材を得るために教材研究を思考している．また，数学的な内容（具体例）としては，以下に示す命題（図 2.4.1）を挙げている．論文の中では，この命題を類比という観点（命題の構成要素間の関係に着目する）から分析しており，「合同と相似といった特殊と一般の関係を利用した命題の拡張」（今回の場合「角の相等関係を媒介した拡張」や「線分の関係を媒介した拡張」）といった，より具体的な方法を提示している．これにより，KCT に関わる知として，「命題（図 2.4.1）

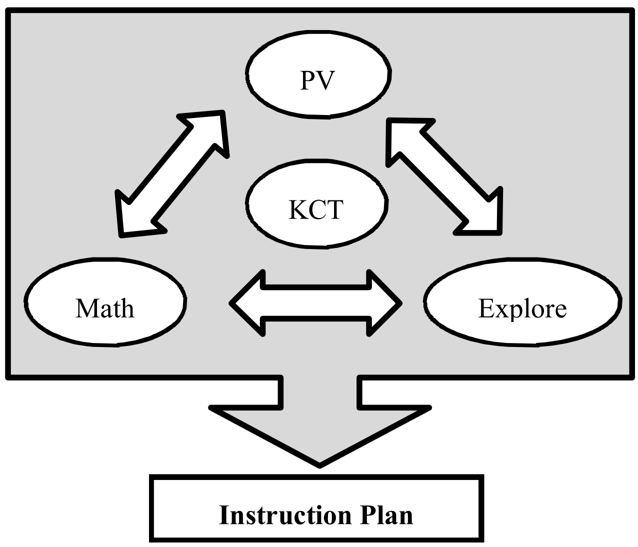
の一般にあたる命題」や「類比により拡張された命題は，証明を考えることが比較的容易であること」，「このようなアプローチにより，命題の統一的な理解や多角的な理解が促されること」などが得られている．中川（2005）では，これらの知を基にどのような指導を構築するかについては明記されていない．しかし，実際の教育場面ではこのような教材研究を基に，命題（図 2.4.1）を契機として一般化，拡張することを伝えるような図形指導が計画されるか，あるいは更に他の構成要素に着目した教材研究が続くことであろう．これを前項で提示したモデルに沿って整理・表現したものが図 2.4.2 である（以後，この枠組みを用いて教材研究を整理する際は，略称を用いて構成要素を表す）．

＜命題＞
△ CAB と△ CDE は∠ C ＝ 90°の直角二等辺三角形である．頂点 A と D，B と E を結び，その交点を F とすると，∠ AFB ＝ 90°となる．



【図 2.4.1：中川（2005）で提示されている命題】

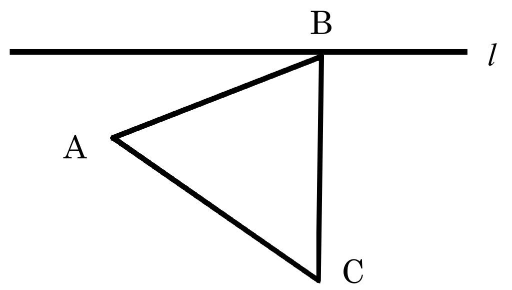
○ PV（教育的価値）：
「命題を一般化，拡張することを図形の指導を通して伝えること」に価値を置く
○ Math（数学の理解）：
図 2.4.1 の命題を中心に思考
○ Explore（問題等の探究）：
「合同と相似といった特殊と一般の関係を利用した命題の拡張」
・角の相等関係を媒介した拡張
・線分の関係を媒介した拡張
○ KCT（内容 - 指導の知）：
「命題の一般にあたる命題の発見」
「類比により拡張された命題の特性（証明を考えることが比較的容易など）の理解」
「命題の統一的な理解や多角的な理解」
○ Instruction Plan（指導計画等の成果物）：
この研究では明記されていないが，「図 2.4.1 の命題を通して，一般化，拡張することを伝えるような図形指導」，あるいは「他の構成要素に着目した教材研究」が続く．



【図 2.4.2：枠組みを用いた教材研究方法の整理①】

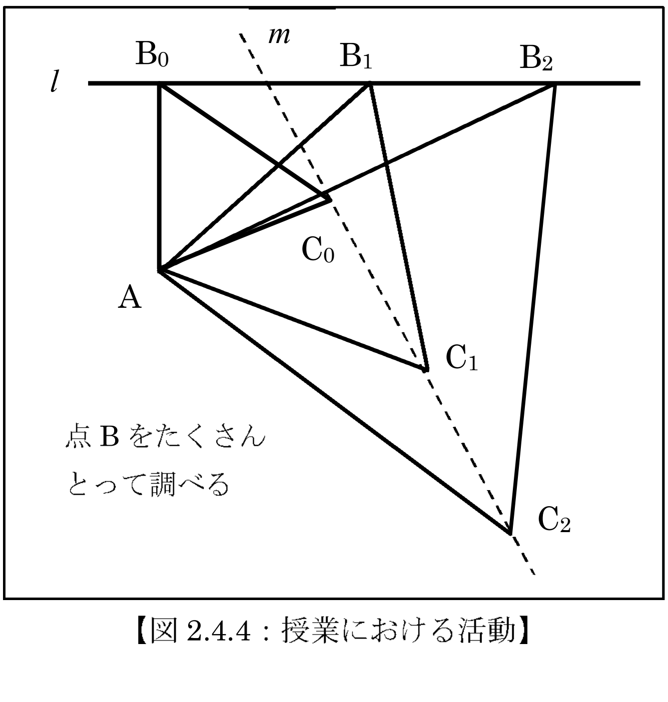
次に，(2) の太田 (2013) の研究についても同様に考えていく．この研究では，一つの具体的な教材研究方法として，「子どもの思考の把握」を契機とした方法が提案・考察されている．その中では，「教師が多様な見方や考え方を理解していること」及びそれに基づいて「授業での子どもの思考を把握し，その価値を見出すこと」が教育的に価値のあることとされている．子どもの思考の把握と検討という具体的な方法は，それを実現するためのものである．また，数学的な内容（具体例）としては，中学１年の作図や「図形の移動」の発展的な扱いとして位置付けられる，次のような問題 (図 2.4.3) を扱った授業を提示している．

＜問題＞
図のように，直線 l と，l 上にない定点 A がある．点 B を直線 l 上にとり，正三角形 ABC を作図する．点 B を直線 l 上で動かすとき，点 C はどのようになるか．



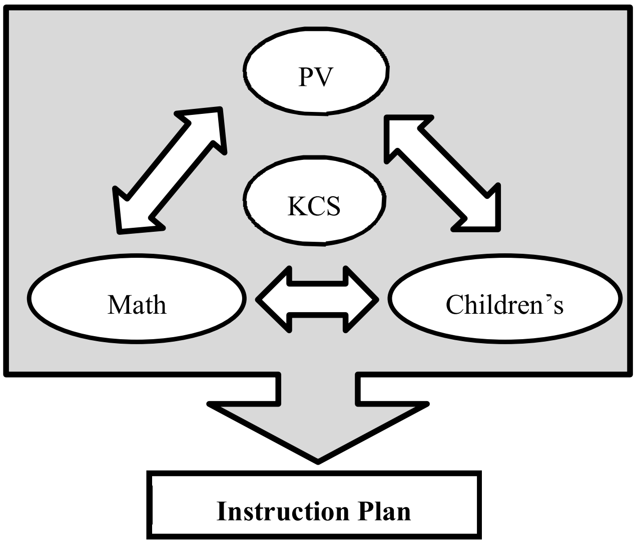
【図 2.4.3：太田 (2013) で提示されている問題】

論文の中では，授業で行われた「点 A から直線 l への垂線の足の位置をスタートとして，点 B を l 上で動かし，正三角形 ABC を作図して頂点 C をとる活動 (図 2.4.4)」に言及し，そこで子どもから出てきた「B と C が比例している」という考え方について考察している．これにより，KCS に関わる知として「点 B の動きから点 C の動きを探る関数の考えが用いられていること」や「△AB_1B_2 と△AC_1C_2 の対応に着目する可能性があること」，それにより「直線 l 上の点の集合が，点 A を中心に 60°時計回りに回転される」「この移動を決めているのは正三角形 ABC であり，直線 m は直線 l を 60° 回転したものである」という見方にも繋がる可能性があることに気付いている．このように，この教材研究方法は「問題の教材としての価値を再認識する機会を与えてくれる」と主張されている．授業における子どもの発言は，いつでも同じというわけではない．この問題 (図 2.4.3) を扱った



【図 2.4.4：授業における活動】

授業において,「B と C が比例している」という発言は得られないことも多いであろう．しかし，このように教材の価値に関する理解が深まることは，発問や評価などの改善に繋がり，より優れた授業の実現に寄与すると考えられる．これを前項で提示した枠組みを用いて整理・表現したものが図 2.4.5 である



○ PV（教育的価値）:
「教師が多様な見方や考え方を理解していること」及びそれに基づいて「授業での子どもの思考を把握し，その価値を見出すこと」に価値を置く

○ Math（数学の理解）:
図 2.4.3 の問題を中心に思考

○ Children's（子どもの数学）:
図 2.4.4 の活動における，生徒の「B と C が比例している」という発言について考察.

○ KCS（内容 - 指導の知）:
「点 B の動きから点 C の動きを探る関数の考えが用いられている」
「$\triangle AB_1B_2$ と $\triangle AC_1C_2$ の対応に着目する可能性がある」
「直線 l 上の点の集合が，点 A を中心に 60° 時計回りに回転される」
「この移動を決めているのは正三角形 ABC であり，直線 m は直線 l を 60° 回転したものである」

○ Instruction Plan（指導計画等の成果物）:
「問題の教材としての価値が再認識される」
問題をより有効に用いた授業展開が構想できる.

【2.4.5：枠組みを用いた教材研究方法の整理②】

ここまで，構築した枠組みを用いて先行研究の整理を行ってきた．これにより，本枠組みを用いることで，要点をおさえた教材研究方法の記述が可能であると理解されたであろう．また，このような具体例を思考することで，教材研究は着目している構成要素の中だけで留まるものではなく，それを中心に他の構成要素にも関わっていくものであるとわかる．実際，中川（2005）の研究では，命題の探究（Explore Possible Problems, Activities and Manipulatives）により，他の命題との繋がりに関する理解（Understand Scope & Sequence）も深まっている．このような関わる構成要素を全て記述していては，要点がぶれたり，情報の肥大化を引き起こしたりする．そのため，方法を整理し伝える上では，中心的に思考している構成要素を明確にすることが有用である．そのため，本枠組みでは研究開始時に想定・着目している構成要素と，結果的に関わる構成要素を

区別し，主要な構成要素を特定している．このように構成要素の厳選をしている点も本枠組みの特徴である．また，本枠組みは柔軟でもある．本論文では「Understand Mathematics」と「Pedagogical Values」に優位性を持たせ，それらを含む 3 つの構成要素で教材研究を捉えている．しかし，このように着目する構成要素を絞り，そこから得られるものを明確化するという方法は，様々な拡張・応用が可能であり必要に応じた変更を許容する．例えば，抽出する構成要素は必ずしも藤井（2013）の四角錐型の教材研究モデルで示唆されているものでなくても良いかもしれない．この点を変更すれば，本枠組みは算数・数学科以外の科目における教材研究をも記述する可能性がある．また，着目する構成要素の数は必ずしも 3 つでなくても良いであろう．教材研究と呼ばれ得る行為は様々であるから，それらを全て捉えるためにはこのような変更が必要になる可能性も十分にある．更に言えば，「Understand Mathematics」や「Pedagogical Values」という要素を含まず，それでも有意義な教材研究方法が存在するかもしれない．本論文では，教材研究によって得られるものを「Pedagogical Content Knowledge」と関連付けるモデルを思考しているが，この関連付けも絶対的なものではない．着目する構成要素を変更すれば得られる知も変化するであろう．このような枠組みの柔軟性を考えると，本枠組みの規範的な特性に関する可能性も見えてくる．本論文では主として，枠組みを利用した教材研究方法の記述を行っているが，このような方法の整理と蓄積は次の新たな可能性を生む．それは，先に着目する構成要素や得たい知を定め，そこから「どのような教材研究方法をとるべきか」という示唆を得るという可能性である．「どのような構成要素に着目すれば，どのような知が得られるのか」また「特定の構成要素に着目した場合，より具体的にどのような教材研究方法が存在するのか」といったことが明らかになれば，本枠組みを規範的に用いることが可能となるであろう．本論文はそのための第一歩でもある．本章第 2 節の第 3 項における Shulman や Ball らの研究に対する考察でも述べたことであるが，数学教育学における理論には記述的特性と規範的特性の双方が求められる．本枠組みは，この双方を有した理論となる可能性を有しているのである．以上述べてきた枠組みの性質や可能性を整理すれば，以下の 4 つになる．

＜枠組みの性質・可能性＞

（１）教材研究方法の記述・整理を可能とする．

（２）主要な構成要素の厳選を必要とする．

（３）柔軟性があり，拡張・応用が可能である．

（４）（記述的特性に加え）規範的特性をも有する可能性がある．

続く第 3 章・第 4 章では，筆者がこれまでに行ってきた教材研究方法に関する研究を提示し，枠組みを用いて整理していく．これは，前述した「どのような構成要素に着目すれば，どのような知が得られるのか」また「特定の構成要素に着目した場合，より具体的にどのような教材研究方法が存在するのか」といったことを明らかにするためのものである．そのため，いずれの研究も本枠組みを規範的に用いて開発された教材研究方

法を提示するものではない．着目する構成要素を定めるという考え方は，これらの研究を行っていたときにも少なからず存在していたが，本章で論じている理論はこれらの具体的研究事例に支えられて構築されたものであるといった方が適切であろう．

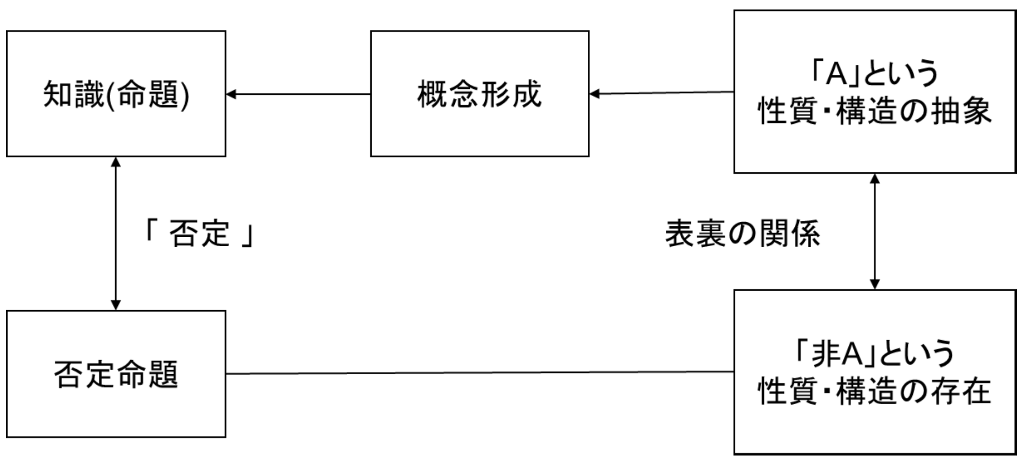
第３章　否定利用に着目した教材研究

本章では，教材研究方法の一つとして「否定利用」に着目した方法を提案する．これは，学習命題に対して否定利用を行うことにより，学習命題に対する理解を深め，優れた教育活動の実現を目指すものである．

第１節　否定利用の定義とその性質

本稿における否定利用とは「学習命題（A）及びその一部を否定することによって生成れる命題（B）を思考することで，学習命題（A）に対する理解を深める」というものである．算数・数学で扱われる内容は，学習対象が概念や問題解法であってもそれを命題の形に書き換えることで，この否定利用が可能となる．ここで大切なのは，本稿で論じている否定利用の目的が，あくまでも否定をする前の学習命題そのものの理解を深めることにあるという点である．「否定」という思考方法そのものの学習を目指しているわけではないし，否定を利用することにより何か新たな命題を生成しようとしているわけでもない．

Skemp（1987）などが述べている，シェマの考えを基本とした知識獲得過程に基づけば，そもそも知識獲得（学習）とは概念を自己の内部に形成する活動であり，それは多くの場合，範例からの抽象によって行われている．この抽象行為は類似性や共通構造によるクラス分けのようなものであるため，その裏には常に性質・構造を異にするものが存在する．ここで，「否定」という考え方は「A」という概念から「非 A」なる概念を生成するものであり，上記の抽象行為において異なるクラスに分けられたものを思考対象にするものである．そのため，意識されないにせよ，知識獲得過程は常に「否定」という考え方を伴っているのである（図 3.1.1）．故に，基本的な知識獲得の場面でいつでもその利用を考えることができる．



【図 3.1.1：知識と否定の関係のイメージ】

つまり，否定利用は概念を規定する際の捨象を行う段階で本来なされるべきものであると言える．否定を伴う概念形成は決して特殊なものではなく，我々が普段から使用しているものである．実際，このような概念形成が自然に行われていることは子どもが様々な知識を獲得していく過程をみると良くわかる．子どもは言葉を覚えると，非常に多くの誤用をする．その際，周囲から修正（否定）が行われ概念が形成されていく．例として，子どもが「イヌ」の概念を形成する場合を挙げておく．まず，子どもはある犬を見てそれが「イヌ」であると教わる．しかし，その段階で子どもはまだ「イヌ」の本質を理解していない．そのため，象を指さし「犬だ.」と言うなど，あらゆる四足歩行の動物を犬と呼んでしまう．そして，このような誤用に対して周囲から「それは犬ではない．象だよ.」といった修正（否定）を受ける．これにより，子どもは徐々に「non イヌ」を知っていき，「イヌ」の概念をより正確に形成していくのだ．我々はこのように「non イヌ」を知ることによって，遂には初見の犬を「イヌ」と判断したり，小型犬と猫を区別したりできるようにまでなる．実際，我々が犬だけを観察し，他の生物を念頭に置くことなく「イヌ」を定義すれば，猫が「イヌ」の定義を満たしてしまうなどの誤りが生じる可能性が非常に高い．また，子どもの概念形成過程で周囲からの修正（否定）が行われなかった場合には，一般的なものと異なる，ゆがんだ概念が形成されることも報告されている．

以上のように，我々が概念を形成する際に否定は非常に重要な役割を担っている．これは発達途中の子どもに限ったことではなく，成人においても同様の傾向がある．例えば，数学教育学において Stigler & Hiebert（1999）は研究をする上でも否定（非 A：諸外国の授業）が本質（A：自国の授業）の理解に資することを述べている．また，「学習指導は一つの文化的営みです。私たちは児童・生徒として何年間か学校生活へ参加することによって学習指導の方法について間接的に学ぶのですが，自分自身の文化の中での学習指導の最も普遍的な特徴にほとんど気づいていません.」とも述べており，これは否定（非 A：異文化の指導）を伴わずに本質（A：自国の指導）を理解することの困難性を言ったものである．

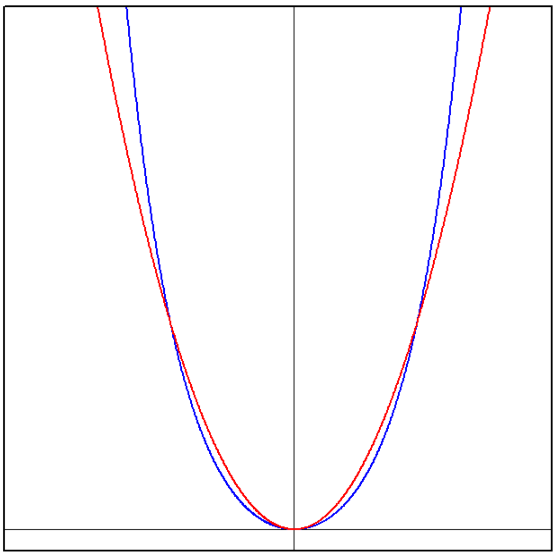
そもそも我々が概念（A）を規定する必要性を感じるのは，否定（non A）が存在するからである．実際，先の「イヌ」の例で言えば，犬と他の生物（象など）を区別するために，我々は「イヌ」という概念を規定している．また，文化人類学・比較言語学で有名な話として，エスキモーの言語に雪・氷を意味する単語が非常に多い（諸説あるが 80 語以上）という話があるが，これも同様の事を示唆している．そして，これは数学においても言えることである．例として「偶数」という概念を挙げておく．「偶数」は一般に「2 で割りきれる整数」と定義される．ここで，この「偶数」という概念が意味をなしているのは，「2 で割り切れない整数（2 で割って 1 余る整数)」である「奇数」が存在するからである．また，数学においては元の命題や定義だけでなく，その否定までもが意味をなすと判断された場合には，それを新たな概念として規定することがある．

実際，上記の「奇数」という概念もその一つであり，その他には「割り切れる数」に対する「余りがある数」，「合成数」に対する「素数」なども挙げられる．このように，否定を否定によって肯定的に命名することは象徴的更新と呼ばれ，数学において欠かせないものとなっている[30]．しかしこれは，既に規定された概念を学習する際には省略されることもある．特に，数学では性質を列挙する形で定義が与えられているため，自ら抽象や捨象を行わずとも学習が進行していく傾向が強い．しかし，このような既存の概念・命題の理解を目指す受動的な学習方法による理解では，概念・命題の本質を見抜けておらず，活用や応用といった内容，また自ら問題を生成・発展させる段階になると手が止まってしまうことが多いようである．例えば，現在我が国のカリキュラムにおいて「二次関数」の学習は主にその性質や定義を知ることで行われている．その学習段階において「non 二次関数」にあたるものは「一次関数（比例）」と「反比例」が存在する程度である．そのため，二次関数の学習にあたっては導入部分で「比例」と「二乗に比例」を比較する場合がわずかに存在するのみであり，他との比較や「non 二次関数」の利用はほぼ行われていない．その結果，座標が与えられていないと，懸垂線（カテナリー）のような曲線と二次関数を判別できない大学生が多数存在する（これは数学科の教師も例外ではない）[31]．しかし，現実場面では身の回りにある曲線や観察されたデータがあらかじめ二次関数であるとわかっていることはほとんどない．それ故に，目の前にある曲線が二次関数のグラフであるか否か判別ができなければ，せっかく学習した知識も活用できずに終わるか，あるいは誤用して誤った結論を導くことになる．このような理解は前述した「イヌ」の理解（初見の犬を「イヌ」と判断したり，小型犬と猫を区

---

30 詳しくは，岩崎（1992）参照．

31 参考までに懸垂線と放物線の比較を行った図（図 3.1.2）と，判別問題の解法を提示しておく．



【図 3.1.2：懸垂線と放物線の比較】

青：放物線
赤：懸垂線

2 つの曲線を重ねるとその違いは明らかである．判別方法としては，傾き 1 の直線を書いて（1,1）の点を求め，それを基準として（2,4）の点を通っているかを調べるといった方法が考えられる．

（全ての放物線は相似であるから，放物線であれば必ずこの条件を満たしている）

別したりできる）と比べると大きく劣るものであり，そこに「否定」の果たす役割の重要性があると言える．

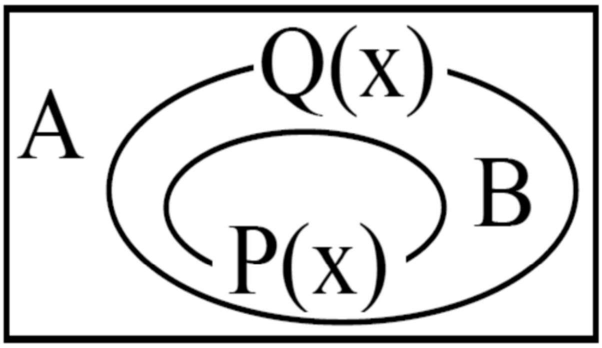
このように，否定は知識獲得（学習）において軽視することのできないものである．そのため，否定を利用してより深く概念・命題について考察するような学習方法や，否定を意識し主体的に概念を規定していくような学習方法を取ることは理解の深化・本質理解に繋がると考えられる．これは，学習者が学習を行う場合は勿論であるが，教師が教材研究を行う場合にも有意義なものであろう．続く第 2 節では，この否定利用による理解深化が何故・どのようにして起こるのかを，論理学的な観点と心理学的な観点から考察し明確化する．

第２節　否定利用の機能と有用性

本節では，否定利用の有している機能について考え，「否定利用による理解深化が何故，どのようにして起こるのか」を明確にすることを目指す．より具体的には，論理学的な観点（第１項）と心理学的な観点（第２項）から考察を行う．

１．論理学的考察

論理学的な側面から否定利用を整理する．すると，否定によって生成される命題を思考対象とすることで，学習命題の含意する異なる論理領域に光が当たることがわかる．実際，論理命題 P（x）⇒Q（x）のオイラー図は以下（図 3.2.1）の通りであるが，否定利用により下図のＡやＢの論理領域を思考することができる（ただし，ＰとＱが同値のときはＢが存在しない）．これは明らかに学習命題に関する情報量の増加を意味している．またそれだけではなく，否定利用を行うことにより学習命題の多角的な理解が行われ，論理領域の境界部分（boundary）も明確に把握される．これが否定利用の主な機能である．



【図 3.2.1　P（x）⇒ Q（x）のオイラー図】

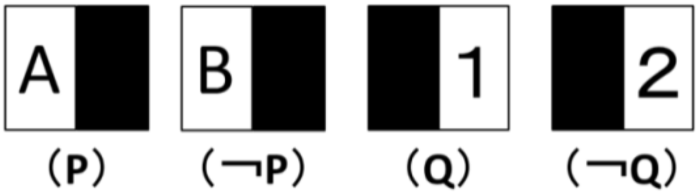
否定利用が有効に機能するか否かは，我々が普段どのように学習（命題理解）をしているかにも依存している．普段から我々が否定により生成される命題を思考していたり，上述したような命題の多角的な理解（論理領域の境界の認識）をしていたりすれば，否定利用は別段変わったことでは無くその効果も期待できない．そこで，次項では我々が普段どのように命題を認識・理解しているのか，心理学的な研究成果も踏まえて考察する．

２．心理学的考察

命題理解に関する研究として，FCP（Four Card Problem）という問題を用いたものがある．この FCP という問題は心理学では世界的に知られているものであり，図 3.2.1 のような内容である．FCP には様々なバリエーションがあり，それらを用いた実験からは複数の研究成果が得られている[32]．図 3.2.2 のものは，最も一般的なタイプの抽象的 FCP と呼ばれる問題である．その他にも，現実場面を意識して文脈が付与されているものや，命題を変化させたもの，指導者の助言等が存在するものなどがある．FCP を用いた実験の結果は，大人であっても正答率が低く，その理由の解明は心理学上の大きな課題であった（この課題は未だに完全には解決されていないとも言える）．

[32] 詳しくは，中垣（2010）参照.

以下に示す４枚のカードが存在するとき，命題「左がＡ（P）⇒右が１である（Q)」の真偽を確認するためには最低限どのカードを調べれば良いか答えなさい．



【図 3.2.2：FCP の具体例】

実際，抽象的 FCP に関する研究として Jhonson–Laird&Wason（1970）による大学生 128 人を対象とした実験での解答選択率は以下の通りである．

（P,Q）≒46%，（P）≒33%，（P,Q,¬Q）≒7%
（P,¬Q）≒4%，Others≒10%

正解者（P,¬Q）が約４％であることは抽象的命題の真偽検証の困難性を示している．このような結果は，その後に行われた複数の追研究でも同様に得られており，国や学力などの影響をさほど受けないということもわかっている．結局，大多数の者は命題の真偽判定を求められている場合であっても，不完全にしか命題内容を把握できないのである．また，誤答の傾向から我々は命題で表現されているものに目がいきやすく，ほとんど否定を考察していないこともわかる．このような結果が生じる原因は様々考察されているが，我々が無意識のうちに思考の節約をしているというのが正しいのではなかろうか．いずれにせよ，我々の命題理解・認識が不完全であることは確かであり，それ故に否定利用が有効に機能し得るとわかる．

第３節　教材研究における否定利用の実践①：代数・解析

前節では，否定利用が我々の命題理解の深化に資する可能性があることを示した．そこで，第３節・第４節では否定利用を教材研究に応用することを考えていく．教材研究を行う目的の一つには「指導者が指導前に教材内容に関する理解を深める」というものがある．故に，その際に否定利用を行うことは有意義であろう．

学校における算数・数学指導には概念形成を中心としたものだけでは無く，問題解決を中心としたものも存在している．また，一般に概念形成を中心とした授業に関しては教材・教具の研究・準備が良く行われるのに対し，問題解決を中心とした授業に関してはそれが不足しやすいようである．実際，教育実習生などの授業を参観しても，問題解決を主とした授業では，教材研究が不足し単に解法指導になってしまっている場合が多いし，教員志望学生に対してアンケートを取っても高校ではそのような指導を受けてきたと答える者が大半を占めている．そこで，本節ではあえて，平凡な高校数学の一問題を取り上げ，それに対して否定利用に基づく教材研究を行った場合を提示する．

今回，考察するのは以下の問題である．

$0 \leqq x \leqq 2\pi$のとき，次の関数の最大値と最小値を求めなさい． $f(x) = \cos^2 x - \cos x + 1$

この問題は実際に高等学校数学Ⅱの中で扱われているものである．このような問題を扱う場合，「$t = \cos x$と置きましょう．」という展開で，ただ解き方を伝えていくだけになってしまうことがある．勿論，解法を整理しておくことも教材研究の一つとして重要ではあるが，それだけで終わってしまっては問題の本質や重点が見えておらず，指導も深みの無いものとなってしまう．そこで，理解深化を狙って否定利用という観点から，この問題を考察してみる．まず，問題を一般的な命題の形に解釈しなおす．すると，問題文は「$0 \leqq x \leqq 2\pi$かつ$f(x) = \cos^2 x - \cos x + 1 \Rightarrow f(x)$の最大値は 3，最小値は 3/4 である」と書き換えられる．この命題の条件に対して否定を利用すれば，次のように様々なことが考えられる．（1）～（3）は命題の仮定を否定した場合，（4）・（5）は結論を否定した場合を思考したものである．

（1）　xの範囲が異なる場合はどうなるか．

（2）　$f(x)$の式の形が異なる場合はどうなるか．

（3）　$\cos x$が他の三角関数であった場合はどうなるか．

（4）　最大値が 3 でないことはあり得るか．

（5）　最小値が 3/4 でないことはあり得るか．

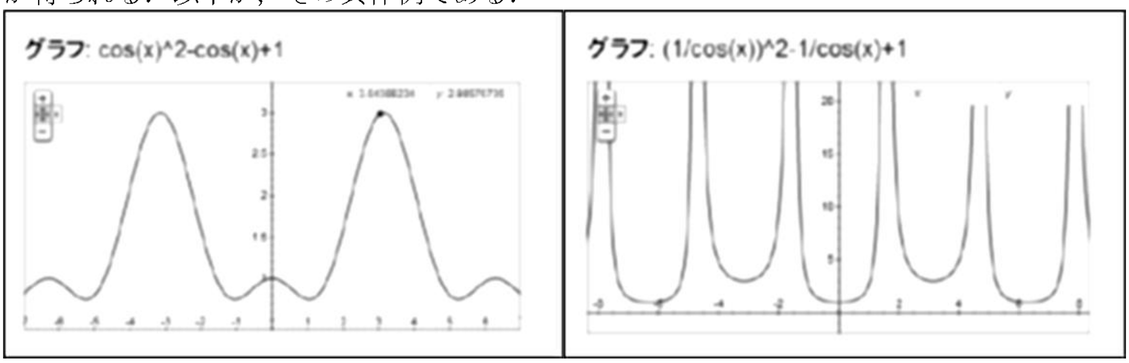
そして，これらを思考することでこの問題の特性が見えてくる．例えば，（2）のような考察を行うと，この問題は既習の二次関数の最大・最小問題に帰着させることにより，容易に解けるようになっているということが良くわかる．$f(x)$が 3 次関数や 4 次関数の形を取っていた場合には，微分を用いて最大値・最小値を求めるのが一般的な手法であ

る．故に，後にそのような内容を指導する際は，この問題と関連付けて指導をするということも考えられる．また，更に深く追求し二変数関数の場合などを考察すれば，大学数学の内容（例えば，ラグランジュの未定乗数法など）にも結びつき，最大・最小問題の本質により近づくことができる．次に，(3) のような考察を行うと，今度は cos の特性が見えてくる．今回の x の範囲では sin と置き換えても変化が無い事から cos と sin の関係性が再確認される．しかし，cos を tan に置き換えると問題は大きく変わってくる．単純に考えて最大が無限に発散することがわかるであろう．このようなことは sec や csc に置き換えても生じる．この問題が最大値・最小値を両方持つためには cos（有界な関数）を用いている点も重要なのである．最後に，(4) や (5) に関する考察を行う．まず，否定された内容を肯定的に読み換えて，「最大値が 5 の場合はあるか」「最小値が－1 の場合はあるか」を考えてみる．すると，本問題においては$-1 \leqq \cos x \leqq 1$であることから，この二つの可能性が無いことが直ちにわかる．実際，前者に関しては $1^2-(-1)+1=3$ であるから $f(x)$は高々3 にしかなり得ない．また，後者に関しても $\cos^2 x \geqq 0, -\cos x + 1 \geqq 0$より $f(x)$は負の値を取らないとわかる．更に言えば，このように単純に見積もって出した値でも，前者の高々3 という値が実現可能解（$x=\pi$のとき）であることから最大値は求まってしまう．つまり，この問題はわざわざ変数の置き換えなどしなくとも，最大値が求まる問題だったのである．このように，イメージを伴っていれば直ちにわかることを見落として，解法指導をするのはナンセンスであろう．ちなみに，現在は ICT 機器の活用により，この程度の関数であれば容易にグラフを描くことができる時代である[33]．これからの教員には，そういった技術の進歩を取り入れ，より優れた学びを構築して頂きたいものである．

このように，否定を思考することで，問題の異なる側面が見えてくる．時には他の学習内容との関連（Scope & Sequence）を見出すこともできるし，グラフの提示といった学習者の理解を補助する方法を考えることもできる．また，今回の最大値を求める場合のように，当初考えていたものとは別の解法に気付くこともある．このような教材研究は授業者の問題に対する理解を深め，より優れた授業を計画することを助ける．

---

[33] 特殊なソフトを使わずとも，例えば，Google 検索でこの関数を検索すれば直ちにグラフが得られる．以下が，その具体例である．



【図 3.3.1：Google 検索を用いたグラフの描画】

第４節　教材研究における否定利用の実践②：幾何

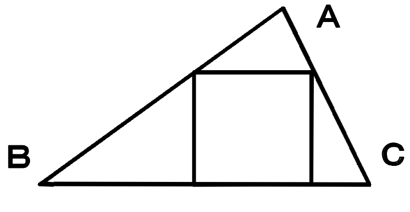
前節でとられているアプローチは，Brown & Walter の提唱した“What if not Strategy”と良く似ている．実際，単に行っていることだけを見れば，“What if not Strategy”は問題の属性をリスト化し，それに対して否定を利用するものである．また本手法は，問題を命題の形に書き換え，その条件に対して否定を利用するものである．このような類似性は，どちらも手法の核が否定を利用する点にあることから生じている．しかし，そういった点だけを見て，短絡的にこれを同一視することは誤りである．何故ならば，そもそも両者の利用意図や目的は大きく異なっているからである．故に，このような文脈を抜きにして考察をすることは避けなければいけない．そもそも，“What if not Strategy”は Brown & Walter（1983）の著作「The Art of Problem Posing」によって広く知られるようになったものである．本のタイトルを見てもわかるように[34]，これは問題を生み出すための術として提唱されたものである．そのため，“What if not Strategy”における否定の利用は，命題の論理領域の外側を探究することが主な役割である．これは，命題の論理領域の内側及び境界の把握を主目的とする，本稿の否定利用とは大きく異なっている．前章の枠組みに沿って言えば，PV として設定されている内容が異なるということである．つまり，図 2.3.7 のようなモデルは同型であるが，異なる教材研究方法と捉えるべきものである．それ故に，同一問題に対してこれらを利用した場合でも，得られる知は異なる可能性がある．本節では，幾何学的な具体例を挙げ，その差異を確認する．

１．問題と“What if not Strategy”による考察

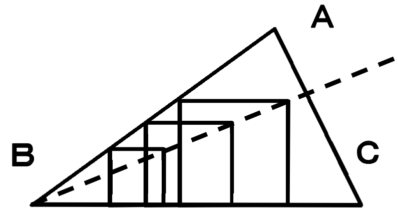
本項では一つの有名な問題として，Polya（1945）の著作「How to solve it」の中で紹介されている以下の問題を考えてみる．

＜問題＞
（鋭角）三角形 ABC に内接する正方形を作図せよ．ただし，正方形が内接するとは，三角形の辺 BC 上に正方形の一辺があり，残りの二頂点が辺 AB，AC にそれぞれ接していることを言う．

つまり，この問題は図 3.4.1 のような図形の作図を求める問題である．



【図 3.4.1：問題図】



【図 3.4.2：Polya の解法】

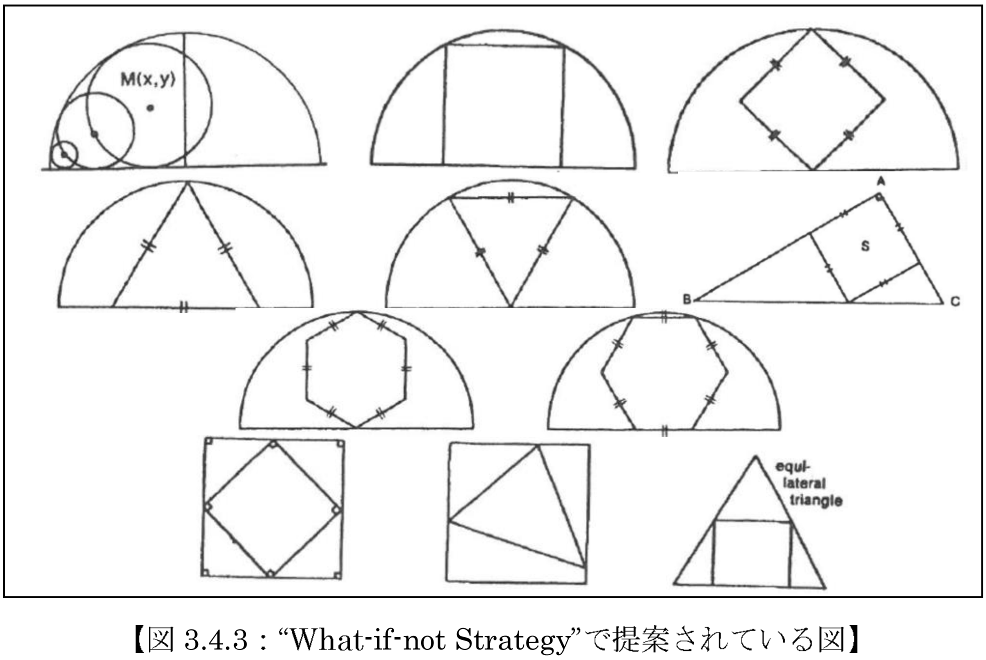
[34] この本の和訳本は「いかにして問題をつくるか―問題設定の技術―」というタイトルであり，その目的もより明確になっている．

実は，この問題は Brown & Walter によって上掲の著作の中でも考察されている．Brown & Walter は図 3.4.2 のように「正方形を動かし，頂点の軌跡を考える」という Polya の解法を引用し，内接正方形の存在及びその作図方法を前提とした上で，以下のように問題を広げている. まず, 問題中の属性に着目し, 次のようなリストを作成する.

（1）　この問題は，三角形を扱っている.
（2）　この問題は，内接図形を扱っている.
（3）　その内接図形は，正方形である.
（4）　その内接図形は，三角形の底辺上に一辺をもっている.
（5）　この問題は，正方形の面積を扱っている.
（6）　外側の図形は三角形である.
（7）　2 つの異なった形が含まれている.
（8）　それらの形は平面内にある.
（5）’ この問題は，正方形の周長を扱っている.
（5）”この問題は，正方形の軌跡を扱っている.

そして, これらを否定して他のものに置き換えた場合として, 以下のような例 (図 3.4.3) を挙げている．ここで行われていることは主に以下の 3 つである.

（Ⅰ）三角形の否定
　→円・正方形・特殊な三角形に変更
（Ⅱ）正方形の否定
　→円・正三角形・正六角形に変更
（Ⅲ）内接の定義の変更
　→図形ごとに他に考え得る定義があれば変更



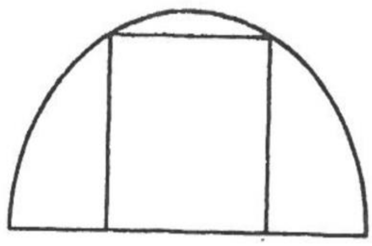
【図 3.4.3：“What-if-not Strategy”で提案されている図】

実際，提示されている例は全て，これらの（Ⅰ）~（Ⅲ）あるいはその複合で説明が可能である．また，上掲の書籍では属性（5）や（5）”に関連して，面積や軌跡への着目という視点も与えられている．しかし，これらは否定をすることにより得られる視点というわけでは無く，それに先行して属性リストの作成を行う時から存在している視点である．以上みてきたようにして，“What if not Strategy”は前述の主目的を果たしている．しかし，これには本稿の観点からすると大きな欠点が存在している．それは，元の問題（学習命題）に対する理解が深まっていないという点である．勿論，そういった観点から生成された問題を考察していけば，理解深化を狙うこともできるわけであるが，少なくとも上掲書ではそのようなことが行われていない．

２．否定利用による考察

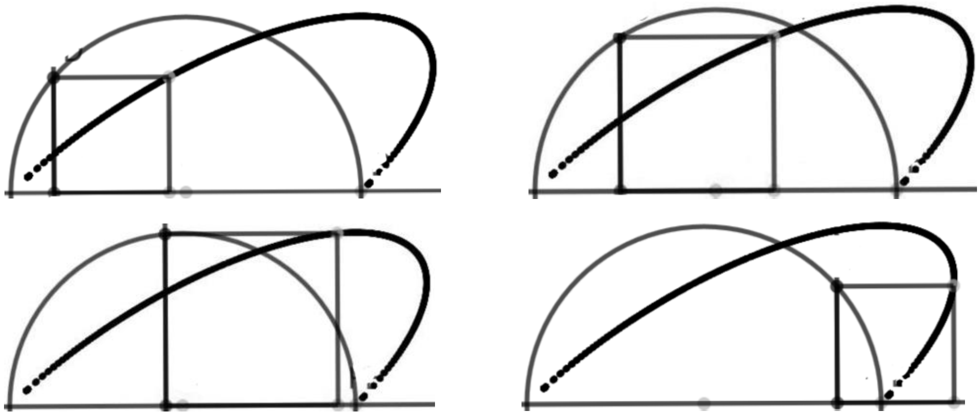
この問題に否定利用を行った場合にはどうなるであろうか．まず，問題を命題の形に書き換えて，「正方形が（鋭角）三角形 ABC に内接している⇒（鋭角）三角形の辺 BC 上に正方形の一辺があり，残りの二頂点は辺 AB，AC にそれぞれ接している」としてみる．この問題は命題中の条件が多く，かつ単純な幾何学図形についての問題であるため，条件の否定や置き換えが数多く考えられる．実際，本稿の否定利用は非常に広い考え方であるため，“What if not Strategy”によって考察されていたものも全て考え得る．そのため，ここでそれら全てを考察することは避ける．そこで，ここでは興味深い結果を得られる，2 つの場合を提示しておく．

まず，命題の仮定を否定した場合として，円に正方形が内接する場合（図 3.4.4）を考える．これは，前掲の“What if not Strategy”を用いた場合にも提示されているものである．前掲書では Polya の解法を参考にし，正方形の 1 つの頂点の軌跡を考えることが提案されている．しかし，実際のこの軌跡は以下（図 3.4.5）のようになっており，三角形の場合と同様に考察できるものではない．難易度もはるかに高いので，元の問題と同時に考察することが必ずしも良いとは言えないであろう．しかし，この問題の場合は軌跡に着目せずとも，正方形の作図が可能である．実際，この場合円の中心が正方形の底辺の中点と一致することが明らかである．そのため，円の半径を r とすると，正方形の高さは $r\cdot\sin\theta$，底辺の長さは $2r\cdot\cos\theta$ と表される．従って，正方形の縦と横の辺長が等しいことから，$r\cdot\sin\theta = 2r\cdot\cos\theta$ が立式され，これを解くことで $\tan\theta = 2$ が得られる．つまり，円の中心を原点として $y = 2x$ の直線を作図し，円と直線の交点を正方形の 1 つの頂点とすれば作図ができる（図 3.4.6）．このように，問題によっては異なる作図方法も考えることができるのである．この解法は円の対称性を用いて正方形の位置を特定しているため，そのままの形では元の問題（外側が三角形の場合）に適用できない．しかし，外側の三角形が二等辺三角形のよう



【図 3.4.4：円の中の正方

な（対称性を持った）特殊なものであれば，同様にして正方形の作図方法を考えることも可能であろう．



【図 3.4.5：正方形の一頂点の軌跡】

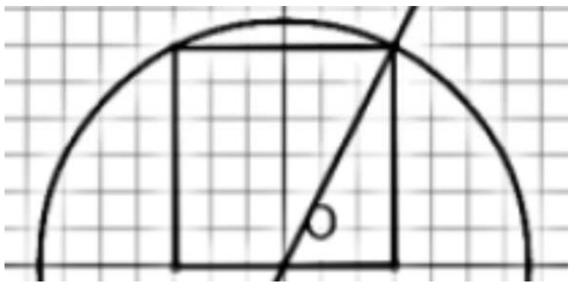


図 3.4.6：$y = 2x$を利用した作図

このように，否定利用により生成された問題を考察することで，正方形の底辺の中点の位置を考える作図方法が存在すること，及びそれが有効な場合が存在することがわかった．このことから，元の問題に対しても，このようなアプローチを考える学習者がいるかもしれないと予想ができる．また，そのような学習者がいた際には，今回の考察を基にそのセンスを認め適切に評価することができるであろう．実際，指導者の教材研究不足故に，学習者の良い着想が潰されるという光景は度々見受けられる．そのため，指導者はこういった教材研究を通し，解答に向かうための様々な思考ルート（エレガントでないものや，上手くいかないものも含む）を把握しておくと良い．

次に，命題の結論を否定した場合の一例として，正方形の 1 つの頂点が三角形に接していない場合を考える．このような場合，正方形の位置が定まらず解が無数に考えられる．しかし同時に，位置が定まれば，大きさが一意に定まる事もわかる．また，図 3.4.7 のように 2 つの極端な場合を思考することで，どうやら元の問題の答えも，この 2 つの間にありそうだと予想される．実際，正方形の位置・大きさが連続的に変化しているこ

とを考えれば，中間値の定理より解の存在を示すことができる[35]．ここで，どのように正方形の位置と大きさが変化していくのかを考えれば，“What if not Strategy”では前提とされていた，Polya の示した解法（図 3.4.2）が得られるわけである．つまり，この否定利用による考察は，解法発見に至るプロセス（思考の流れ）を明確化している．このように，解法発見に至るプロセスを知っているのと，単に解法のみを知っているのとでは命題理解の質が大きく異なっている．そして，このような深い理解が指導の質を上げることは言うまでも無いであろう．また，このような解法発見に至るプロセスを学習させたいと考えた場合には，ICT を利用し実際に図形を動かしてみるような授業を構想することもできる．前節でも述べたことであるが，自身の学習経験を基にして，学習者の理解を補助する方法を考えることできる点は，本教材研究方法の長所である．

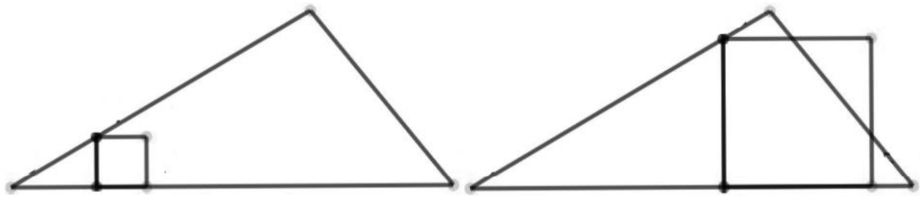


図 3.4.7：2 つの極端な場合

以上見てきたように，否定利用は“What if not Strategy”とは異なる考察を導く．そして，問題に対するアプローチの幅を広げたり，解法に至るプロセスを明確化したり，学習者の理解を補助する方法を思考させたりする効果がある．このように，問題に対する理解を深める点が否定利用の良さであり，教材研究において否定利用が果たす機能である．

[35] 図 3.4.5 及び図 3.4.7 は飯島康之氏の HP（飯島研究室）で公開されている GC（Geometric Constructor）を用いて作成したものである．本ソフトでは描画した図形を動かすことが可能なので，正方形の位置・大きさを連続的に変化させて考察することができる．

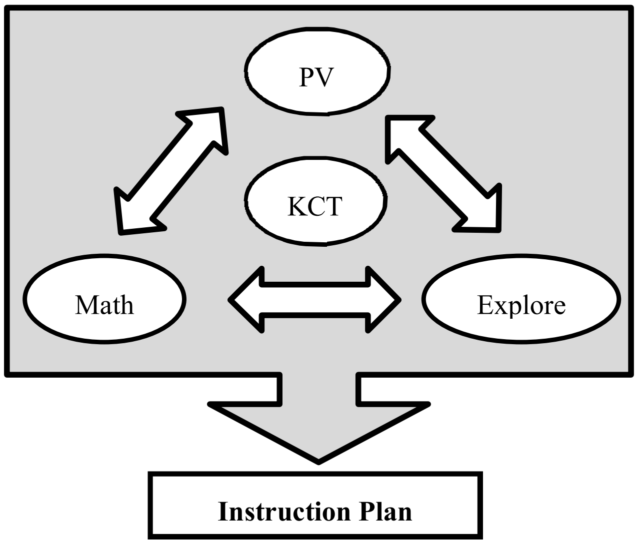
第５節　否定利用に着目した教材研究

本章の最後に，否定利用による教材研究について整理しておく．まず，この教材研究の方法を端的に述べれば，「学習内容を命題の形に書き換え，その条件に対して否定を用いることで別の命題を生成する．その後，生成された命題を考察することで学習命題の理解深化を狙う」というものであった．本章では，その具体的な実践事例として，代数・解析的な問題（第 3 節）と，幾何学的な問題（第 4 節）を提示した．また，それらの事例から否定利用の効果のいくつかを明らかにした．特に第 4 節では，“What if not Strategy”との比較も行い，類似手法との差異も示している．これらの研究の主目的は，（教材研究の成果を公開することではなく）教材研究方法を開発・提案し，教材研究方法に関する研究を充実させることであった．故に，今後はこの方法が様々な人によって（事例として挙げられていない）他の内容にも利用されるようになることが望ましい．そして，そのためには本教材研究方法の要点を明確にし，整理しておくことが有効である．これを支えるのが，前章で構築した枠組みである．本節では第 3 節と第 4 節の事例を，それぞれ枠組みを用いて整理し，「この 2 つの事例が共通の教材研究方法によるものであること」や「その方法の要点」，また「枠組みの有用性」などを明確化する．

本教材研究方法では，「学習命題の深い理解とそれに基づく指導」に価値を置き，「学習内容を命題の形に書き換え，その条件に対して否定を用いることで別の命題を生成し，それを思考する」という探究を行っている．第 3 節では代数・解析的な問題として，関数の最大値・最小値を思考する問題を扱った．この事例を枠組みを用いて整理すれば図 3.5.1 の通りである．特筆すべきこととしては，教材研究を進める中で，当初着目していなかった Scope & Sequence 関わる理解も深まったことが挙げられる．次に，第 4 節では幾何的な問題として，内接正方形の作図問題を扱った．教育的価値や探究方法は第 3 節のものと同じでも，対象としている数学（内容）が変わることで得られる知の内容も異なるものとなった．また，第 4 節では数学（内容）と探究方法をほぼ等しくする，“What if not Strategy”との比較も行い，教育的価値が教材研究に与える影響も明らかにしている．この事例を整理したものが図 3.5.2 である[36].

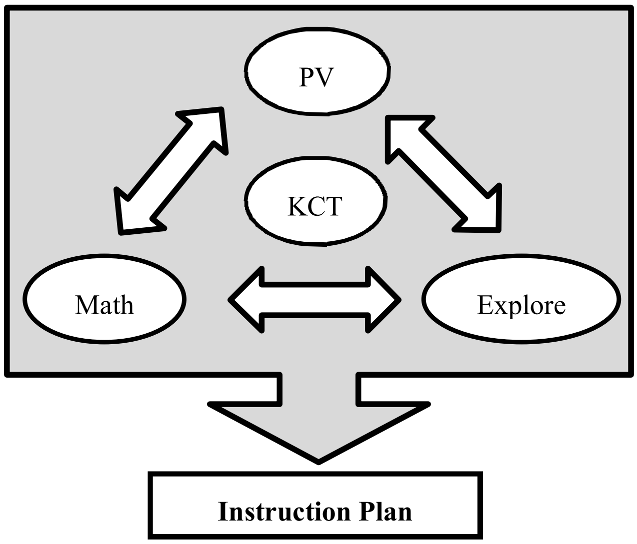
[36] ただし，図 3.5.2 には“What if not Strategy”に関わる部分は含まれていない．“What if not Strategy”による教材研究を整理・記述するのであれば，図 3.5.2 の PV を『「命題から新たな命題をつくり出すこと」またそれによって「命題の拡張や発展について思考すること」に価値を置く』といった内容に変更し，Explore の内容を「属性リストの作成と，属性の否定」に変更する必要があるであろう．しかし，そもそも“What if not Strategy”はあくまでも Strategy であるため，明確な教育的価値を有していない点に注意が必要である．故に，これを教材研究場面に用いる際には，PV を良く考えて設定しなければいけない．例えば，「問題作成そのものを学ばせたい」というのと，「問題作成を通し，命題の繋がりを学ばせたい」というのは大きく異なるものである．PV は探究の方向付けをし，価値ある成果の判断基準になる．故に，PV をどのように設定したかにより得られる知の内容も変化する．

○ PV（教育的価値）：
「学習命題の深い理解とそれに基づく指導」に価値を置く
○ Math（数学の理解）：
第３節の問題を中心に思考
○ Explore（問題等の探究）：
問題の仮定や結論を否定した場合を思考.
・$f(x)$の式の形が異なる場合
・$\cos x$ が他の関数であった場合
・最大値が 3 でない場合
・最小値が 3/4 でない場合



○ KCT（内容 - 指導の知）：
「問題の異なる側面が見える」
・$f(x)$が二次であることの意義.
・$\cos x$ が有界であることの意義.
「他の学習内容との繋がり（Scope & Sequence）を見出すことができる」
・微分や極値問題（例えばラグランジュの未定乗数法など）との繋がり
「学習者の理解を補助する方法が思考される」
・グラフの提示（ICT 機器の活用など）
「別の解法に気付く」
・単純な見積もりによる値域の予想
○ Instruction Plan（指導計画等の成果物）：
明記していないが，単純に代入をして解を求めるのではなく，グラフの概形を思考するような授業の展開が考えられる．また，上記のような得られた知をもとに，他の構成要素（例えば，Understand Children's Mathematics）に着目した教材研究を行うことも考えられる.

【図 3.5.1：枠組みを用いた教材研究方法（否定利用）の整理①】



○ PV（教育的価値）：
「学習命題の深い理解とそれに基づく指導」に価値を置く
○ Math（数学の理解）：
第４節の問題を中心に思考
○ Explore（問題等の探究）：
問題の仮定や結論を否定した場合を思考.
・円に正方形が内接する場合
・正方形が内接しない場合
○ KCT（内容 - 指導の知）：
「問題解決のための異なるアプローチ方法に気付く」
・正方形の底辺の中点の位置を思考する方法（及びそれが有効に機能する場合）
「解法発見に至るプロセスを明確化する」
・正方形の大きさを連続的に変化させることで，Polya の解法に至る.
「学習者の理解を補助する方法が思考される」
・動的な幾何学ソフトの利用
○ Instruction Plan（指導計画等の成果物）：
明記していないが，単に問題を提示し解法を思い付くかを問うような指導ではなく，解法に気付かせたり，様々なアプローチ方法を評価したりするような授業が構想できる．また，上記のような得られた知をもとに，他の構成要素（例えば，Understand Children's Mathematics）に着目した教材研究を行うことも考えられる.

【図 3.5.2：枠組みを用いた教材研究方法（否定利用）の整理②】

教材研究方法を捉え記述する本枠組みは，単にその探究方法だけでなく，教育的価値や得られる知などをセットにして提示する．これは，その教材研究方法の要点や特性を明確にするだけでなく，似て非なる方法を区別する上でも役立つことがわかる．着目する構成要素から異なる大きな差異のある教材研究方法も存在すれば，着目する構成要素は同じであるが PV や Explore の内容を異にする差異の小さな教材研究方法も存在する．枠組みの構築により，このような教材研究方法間の差異の度合いを思考できるようになったことは，本研究の大きな成果の一つと言えるであろう.

第４章　定理の導出に着目した教材研究

本章では，教材研究方法の一つとして「導出」に着目した方法を提案する．これは，定理が導出される過程を思考・探究することにより，「教材（教科内容）のより深い理解」とそれに基づく「多様な指導方法の把握」を意図して行われるものである．数学的知識は我々人類が長い歴史の中で導き出してきたものである．また，その導出は決して一意ではなく，様々なものが考えられる．特に，教育数学においては，数学的知識が必ずしも厳密な体系のもとに整理され提示されるわけではない．そのため，仮定する知識によって，その導出方法は更に多様化する．つまり，数学の知識獲得過程は決して単線的ではないということである．様々な知識獲得の流れを把握していることは，指導の幅を広げることへと繋がる．また，多様な学習者に応じた指導を考えることを可能とする．そこに，導出に着目した教材研究の有用性が存在する．

本章では，まず第１節で本研究における「導出」の定義と性質を整理する．そして第２節で関連する先行研究について概観した後に，第３節・第４節で導出に着目した教材研究の実践事例を示す．より具体的には，第３節では三角形の決定条件から広がる導出研究を，第４節では平行線の性質をもとにしたメネラウスの定理の導出を提示する．

第１節　導出の定義とその性質

本教材研究方法の基本となるのは「導出（derivation）」という考え方である．本論における導出とは「既知のものから未知のものを導き出すこと」であり，その方法及び考え方も含めて導出という語を用いている．数学的知識の学習において，数学的体系（数学的繋がりや数学的構造と呼ばれることもある）を理解することは有意義であり，重要なことである．実際，現在の学習指導要領における高等学校数学科の目標にも以下のように記されている（文部科学省，2009，p.16）．

> *数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。*

「体系的な理解」という文言は平成 21 年の改訂で新たに付加された部分である．また，このような改善を行った理由は以下のように記載されており，これは決して高等学校数学科に特化したものでは無いことがわかる．つまり，小学校算数科や中学校数学科における指導においても「体系的な理解」は重視されるべきものである

> *数学を様々な場面で活用できるようにするためには，知識を体系的に理解しておくことが必要である。今回の改訂では，このことをこれまで以上に重視し，「体系的な理解」とした。*

そもそも，体系的な理解無くして数学の学習が成立し得るかは疑わしいが，以上のように体系的な理解の重要性が理解され，これまで以上に重視されるようになってきたのが現状である．導出はその定義からもわかるように，新たな知識を既習内容から導き出すものである．そのため，この導出に基づいた指導は体系的な理解を促す．

数学的知識は全て人類の長い歴史の中で導出されてきたものである[37]．それ故に，我々が知覚・認識している数学的知識は必ず一つの導出過程を有していると言える．しかし，数学的な価値観からすれば定理の導出過程は必ずしも価値があるとは言えず，論文が冗長になることを防ぐために捨て去られることもしばしばである．また，重要な数学的知識の中には千年以上も前から知られているものも少なくない．このような知識の場合には記録が散在・消滅し導出過程が不明となっている場合が多い．また，中には数学は神秘的なものであり，神によって創り出され天才によって見いだされたものであると信じる者もいる．このような者にとって論理的な導出過程は不要なものであり，意図的にそれを抹消しその神秘性を高めようとする行為も行われる．このように，数学的知識の中には様々な理由からその導出過程が不明確なものも多いし，それが数学者によっては探究されていない現状がある．これは，数学を学習する学習者にとっては大きな障害となる．前述の通り，数学的知識の導出過程を理解することは，数学の体系的理解を促すからである．そこで，この算数・数学教育学的な価値観に基づき，導出探究の意義を認め，研究を進めることが算数・数学教育では重要となる．これに関して，わずかではあるが数学者自身によって数学的な発見・発明のプロセスを探究することが行われた例も存在する．最も代表的なものとして，著名な数学者であるジュール＝アンリ・ポアンカレ（Jules-Henri Poincaré）による，自身の数学における発見・発明の再認識とそれに関する講演が挙げられる．また，この講演に影響を受け，ジャック・サロモン・ア

---

37 これに関連して，数学的知識は「発見されるもの」であるか，それとも「発明されるもの」であるかという議論が存在する（例えば，アダマール（1945）の著作「AN ESSAY ON THE PSYCHOLOGY OF INVENTION IN THE MATHEMATICAL FIELD」でも，はじめにこのことについての言及がなされている）．これは既に存在している数学的構造を我々が発見・認識していると考えるか，我々が発明を行うことで数学的構造を作りあげていると考えるかという哲学的な対立によって生じているものである．新たな数学的知識の知覚や理解を論じる際には，この論争が常に付きまとうわけであるが，いずれの哲学に依拠しようとも我々が導出を行っていることは揺るがない事実である．故に，本論文ではそれが数学的な領域においてなされている限り，発見・発明という表現を用い，両者を明確には区別しないこととする．実際，アダマールも上掲の著作の中で，「発明（Invention）ではなく，発見（Discovery）というべきかもしれない」と述べた上で，この両者の心理的条件には違いがないとして，区別をしないこととしている．

ダマール（Jacques Salomon Hadamard）も数学における発見・発明が如何になされるかに関する研究を行っている．彼らのような一流数学者による数学の発見・発明過程に関する研究は非常に興味深いものである．しかし，いずれも数学的に価値を評価される類のものではなく，心理学における研究成果として認識されている．ここでは，主としてアダマールによる数学的な発見・発明の心理に関する研究について考察し，導出研究への示唆を得たいと思う．

アダマールは，発見・発明に至るまでにはいくつかの段階が存在することを複数の事例を通して述べている．そして，そこからは直観と論理の働きが見て取れる．良く知られている発見・発明に関わるエピソードとして，ポアンカレの報告[38]やニュートンのリンゴの話[39]がある．これらは，その直観に関わる一面が強調されて伝えられている節がある．しかし，アダマールはその後に行われる論理的な確認・検証の作業も重要なものとして論じている．同時に，論理や言語の働きに重きを置きすぎることもまた警戒すべきとしている．そして，その根拠としてアダマール自身をはじめ，言語や記号ではなく漠然としたイメージを用いて思考し，発見・発明をしている数学者が多く存在することを報告している．そういったことからも，発見・発明において直観と論理が共に重要な働きをすることには疑いの余地がない．しかし，この点に関してはポアンカレとアダマールで多少捉え方が異なるようである．発見・発明に至る道筋は人により様々である．一流の数学者であっても，思考方法には得手・不得手がある．これをポアンカレは幾何学者と解析家に代表させ，直観型で思考する人間と論理型で思考する人間がおり，それはその人間の頭脳の本来の性質によると捉えている．これに対して，アダマールはエルミート（Hermite）を例に挙げ，ポアンカレの考え方ではその仕事が論理的とも直観的とも取れると述べ，このような二分論が必ずしも上手く機能しないことを示している．また，続いて論理型とされる代表格としてワイエルシュトラス（Weierstrass）がある論文内に図形を描いている例を挙げ，いかに理論的手法を得意とする者であっても図形を描く（イメージや直観で思考する）ことがあるという事例を示している．そして，結論として「論理は直観の後に続く」という考えを提示している．数学における発見・発明には結論が直観的に予見されている場合と，そうでなく推論の結果として生じる場合が存在するようである．しかし，推論の結果として発見・発明が行われていたとしても無意識のレベルでその研究を推し進めた直観があると考えるのである．また，アダマー

[38] ポアンカレが，旅先で乗合馬車の踏段に足をかけた瞬間にフックス関数に関わる発見・発明の着想を得たというものである．その時，彼は数学上の仕事のことは忘れていたという．また，即座にその考えの正しさに確信を持てたとも述べている．この話は，ポアンカレの著作「科学と方法（原題：SCIENCE ET MÉTHODE）」の中でも言及されている．

[39] アイザック・ニュートンが「リンゴの木からリンゴが落ちるのを見て万有引力を思いついた」という逸話のことである．他にも，似たような話として，アルキメデスが「入浴中に水が湯船からあふれるのを見てアルキメデスの原理を発見した」という逸話もある．古くから多くの人によって，このような「天才のひらめきによる発見」という話が好まれてきたようである．

ルはその上で，無意識に深さの度合いがあると考えることで，人による思考方法の差異を説明できるのではないかと予想している．そして，その観点からいくつかの事例を再考している．事実，論文等の形で表現される思考課程は，あくまでも意識下におかれたものだけである．論理に先行する直観がどこまで意識下におかれ，かつ表現されるかによって差異が生じているという考え方は，直観型の人間と論理型の人間という枠を崩し，より柔軟に各事例を説明する．また，アダマールは発見・発明と教育の関係についても言及をしている[40]．その中で，特に興味深いのは次の提言である[41]（Hadamard（1945），p.104）．

> *it is not useless to observe that that case of the mathematical student already belongs to our subject of invention. Between the work of the student who tries to solve a problem in geometry or algebra and a work of invention, one can say that there is only a difference of degree, a difference of level, both works being of a similar nature.*

つまり，一流の数学者がその研究活動における発見・発明と，学生の数学学習が性質を共有すると述べているのである．これに関して，かつてムーア（E.H.Moore）によって実験室法（Laboratory Method）という指導方法が提唱されたおりにも，研究者が研究を行うように学習者が学習を行うことが思考されたことがある．双方がその性質を共有しているのであれば，教材研究場面において導出を思考することでも，教育的に有意義な示唆が得られることであろう．ここに，本教材研究方法の教育的価値の背景が存在する．

アダマールの著作からは離れるが，ノーベル生理学・医学賞を受賞した生理学者 Szent-Györgyi Albert は，次のように述べたと言われている[42]．

> *Discovery consists of seeing what everybody has seen and thinking what nobody has thought.*

専門とする分野は異なっているが数学などにも通じるものがある，Discovery（発見）

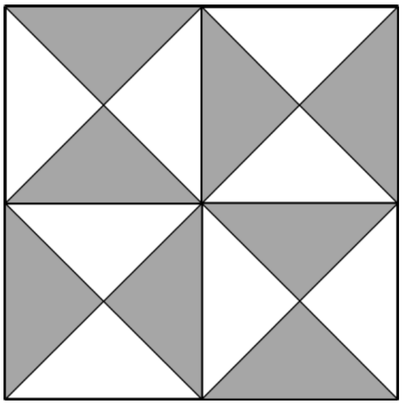
---

40 教育との関わりについては，ポアンカレも言及をしているので，決してアダマール特有の観点というわけではない．

41 和訳をすれば次のようになる．「数学の学生の場合でも，既に発見・発明という問題に属している．幾何学や代数学の問題を解こうと試みる学生の作業と発見・発明の作業との間には，程度や水準の差があるだけで，双方は似た性質を有している．」

42 和訳をすれば次のようになる．『発見は，「誰もが見たことがあることを見て，誰も考えたことのないことを考える」ことでなされる』

の要点をおさえた提言であると思われる．実際，ニュートンが万有引力の法則の発見を行った際，「リンゴの落下からヒントを得て」という逸話が知られているが，決してニュートンでなくとも，万人が物体の落下は見てきたはずである．ニュートンはフックに宛てた書簡で，「*If I have been able to see further, it was only because I stood on the shoulders of giants.*」と述べている[43]．物体が地球に引きつけられる現象は古代ギリシャから，その説明をしようという考えがあった．また，ケプラーによる説（ケプラーの３法則）など先人の研究成果も存在した．そういったものをふまえ，独自の観点でものを考えたからこそ，ニュートンは発見をなし得たのであろう．同じようなことがピタゴラス（学派）の三平方の定理の発見・発明に関する逸話についても言える．その逸話とは，ピタゴラスが図 4.1.1 のような石畳の模様を見て，三平方の定理を発見・発明したというものである．実際，我が国の教科書にはこの話を載せているものもあり，教師の中には生徒に三平方の定理を発見・発明させたいと考え，図 4.1.1 のような模様を提示する者もいる．しかし，ここまでの話からもわかるように，この逸話には重大な欠陥がある．この石畳は同時代の多くの人によって見られていたはずである．故に，石畳を見ただけで定理が発見・発明されるのであれば，ピタゴラス以前に石畳を作った人間が定理を発見・発明していて然るべきだと言える．結局，三平方の定理の発見・発明を促したのは，（石畳ではなく）ピタゴラス（学派）特有の考え方なのである．実際，ピタゴラス（学派）には「物事の根源は数である」という哲学的な思想があったと伝えられている．そういった思想に支えられ，誰も考えたことのなかったことを考えたからこそ，三平方の定理の発見・発明はなされたのであろう．このように，発見・発明について考える際，何を見たかだけでなく，何を考えたかが重要となる．故に，導出を考える際は，この発見・発明の核となるアイデアや考え方を思考する必要がある[44]．また，ニュートンの言葉からもわかるように，既有知識の存在もまた重要である．導出研究を行う際には，この「出発点となる知識（既有知識）」と「核となるアイデア・考え方」，そして最後に「得られ



【図 4.1.1: 石畳のデザイン】

---

[43] 和訳をすれば次のようになる．「私がさらに遠くを見ることができたとしたら，それはたんに私が巨人の肩に乗っていたからです.」

[44] この点に「導出研究」の特徴がある．関連して，「導出」と「証明」を混同する者がいる．「証明」は「命題が真であることを示す」行為であり，何故そのような命題や証明方法に至ったかは問題ではない．故に，それを促した「核となるアイデア・考え方」が何であったかは意識・明文化する必要のないものである．逆に，「証明」の中でこのようなアイデアや考え方が詳細に論じられた場合，その証明は冗長なものとなっているであろう．よって，「導出の探究」と「証明の探究」は似て非なるものであると言える．「証明の探究」の結果得られるものが，ユークリッドの原論のような命題及び証明の連鎖による無機的な数学的体系であるとすれば，「導出の探究」の結果得られるものは，有機的な数学の流れである．

る知識（学習命題)」を意識することが求められる．

第２節　先行研究と類似研究

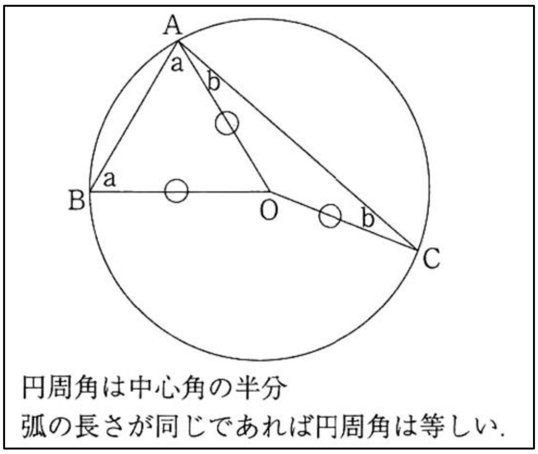
学習内容を既有知識と結び付けて指導することは，指導上の基本的な原則であるから，そのような工夫は多々行われている．しかし，教育的な観点から新たな導出方法を探究する研究は世界的に見ても数が少ない．実際，数学学習における発見・発明に関する多くの研究は特殊な状況下で何かに気付かせ，（主に帰納的推論によって）新たな知識を発見させることを目指している場合が多い[45]．また，「導出」を体験させるような指導実践を行い，その良さを論じる論文は存在するが[46]，新たな導出方法を探究することはあまり行われていない．一応，物理学等においては定理や問題解決方法の導出が探究されているが[47]，そこでは教育的な観点が希薄であったり，単に問題解決方法を多様化させているだけであったりする場合が多い．

ここでは，本研究と同様に「導出」を扱う類似研究として，杉山(2006)の「教材の新しい見方への挑戦を」を挙げておく．この研究は，主として円周角の定理の導入方法を数学的に探究したものであり，前提としてどのような既有知識を設定するかにより，同一命題であっても様々な方法で導出し得る事を示している．より具体的には，（その１）として二等辺三角形の学習から発展するように円周角の定理を位置付けたものを挙げている．概要としては二等辺三角形の性質を使う題材として，直角三角形の外心の性質を学び，その発展として円周角の定理を導出している（図 4.2.1）．そこには，証明学習の在り方に対する考えや，学年に応じて内容の扱いを変えるべきという考えが込められている．特に，指導する学年を変更した場合の内容の扱いの変化に関しては，「小数の指導」や「拡大図・縮図，対称の指導」などの例を挙げ，詳細に論じている．続いて，（その２）として挙げられているのは円に内接する四角形に関する学習から，円周角の定理の学習へと繋げる方法である（図 4.2.2）．既存の学習順序に捉われずに，指導の可能性を探究することが主張されている．そして，（その３）としては，円周角が何で決定するか[48]を思考する，関数の考えを用いたものが挙げられている．より具体的には円周角を決定する円周上の 3 点に，円を決定する円の中心を書き加え，それらを結んだ三角形の内角を思考することで，定理を導き出している（図 4.2.3）．ここでは，そのように作図された三角形 2 つを比較することでその値が一定であることを示しており，三角形の内角の和の指導と強く関連付けて指導することが提案されている．最後に，（その４）として挙げられているのは，平行線と角度の関係を巧みに用いた導出方法である．導出の流れとしては，円周上の点 P を共有する二本の弦を平行移動することにより接線になるようにする．すると二本の接線の交点，接点，円の中心から四角形が作られる．

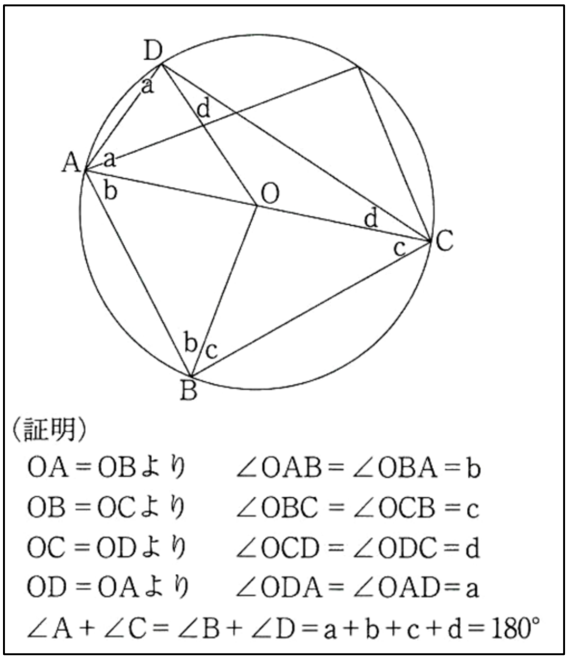
---

[45] 例えば，Lucas, K. K. & Son, J. W.（2012）や増島（1992）など．
[46] 例えば，菅野（2007）や木谷（2001）など．
[47] 例えば，Field, J. H.（2011）や Pearle, P.（2012），Joshi, A. & Serna, J. D.（2012）や Ehrmann, A. & Blachowicz, T.（2011）など．
[48] 円と弧で決定する．このことから，円周上の 3 点が円周角の決定に関わっていると考える．

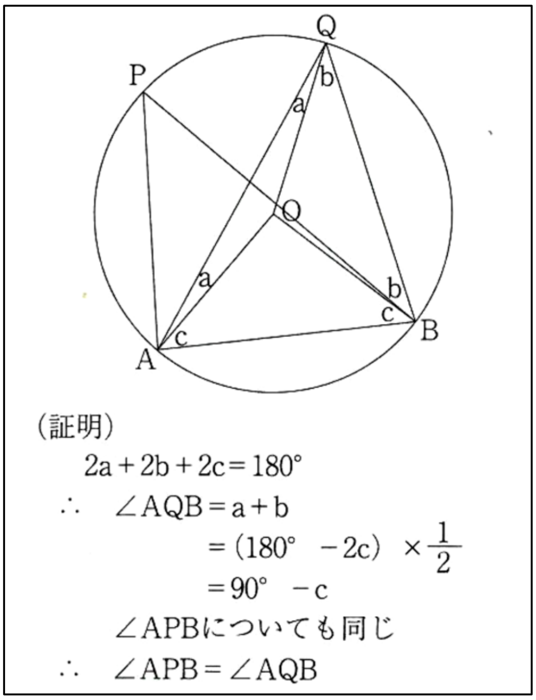
そこで，中心角にあたる角度が一定であることを示し，その補角にあたる角（この角の角度は点 P にできている円周角に等しい）も一定であることがわかるというものである（図 4.2.4）．また，この方法では円周角の大きさが中心角の半分であるという関係も同時に示すことが可能である．



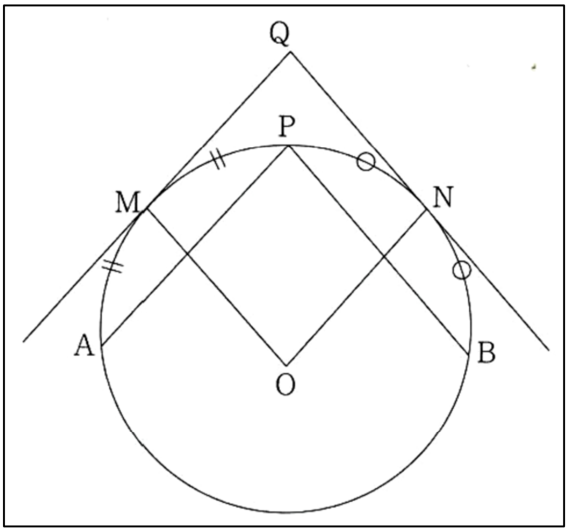
【図 4.2.1 :（その１）の参考図】



【図 4.2.2 :（その２）の参考図】



【図 4.2.3 :（その３）の参考図】



【図 4.2.4 :（その４）の参考図】

以上，杉山（2006）の研究を簡単に整理してきたが，そこで提示されている導出には常に核となるアイデア・考え方が存在していた．このように，導出を支える考え方を明確にすることには，指導上の留意点を明確にする効果と，類似の研究を推進する効果の

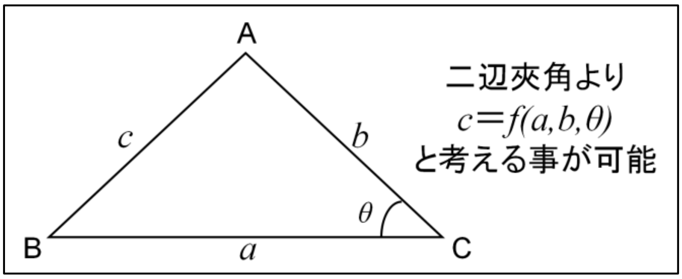
2つがある．事実，上掲の論文でも，最後には指導と研究の双方に対する言及がなされている．指導については，既有知識を用い発見・創造的に学習・指導をしていくことの大切さが主張されており，研究については，このような数学的な教材研究が重要であること，それがあまり行われていない現状があることが述べられている．そして，この2つが算数・数学教育における導出研究の主たる意義である．

第３節　三角形の決定条件からの導出

本節では，これまでに行ってきた導出に着目した教材研究の中から一つの事例として，「三角形の決定条件の中の数量から関数を見出す」ことで行われる導出について提示する．第１項～第４項では決定条件の一つである「二辺夾角」の条件を出発点とする導出研究を示し，第５項でこのような導出研究のよさと更なる可能性について整理する．

１．三角形の決定条件の中の数量から関数を見出す

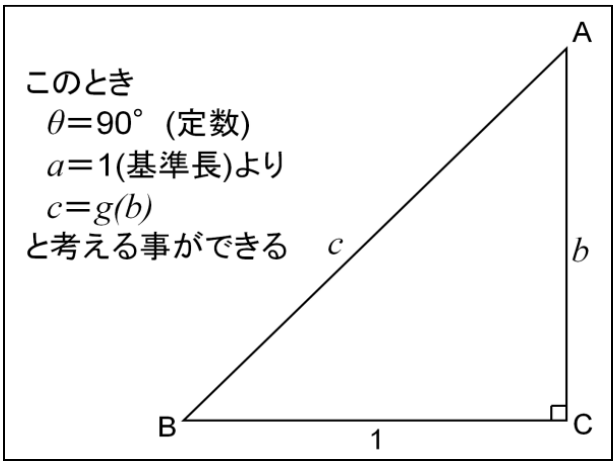
まず，三角形の決定条件の１つとして「二辺夾角」と呼ばれるものがある．これは，二辺とその間の角が決まれば三角形が一意に決まるという意味であるから，言い換えれば二辺とその間の角の大きさによって，他の辺や角の大きさも定まるという事である．この関係を関数と捉えれば，三角形の辺や角の大きさの関係を三変数関数と見ることができる．これを数学的に書き直すと次のようになる（図 4.3.1）．言うまでもなく，ここでは関数的な見方・考え方と呼ばれるものが用いられている．このような考え方を用いる事で，幾何学的内容と解析学的内容に繋がりが生じ，新たな学習・指導の広がりが得られる．



【図 4.3.1：二辺夾角を関数的に考える】

２．二変数を固定して考える

ここからは，前項で提示した三変数関数（図 4.3.1）がいかなるものであるかを探究していく．そこで，まず多変数関数を扱う際の一般的な手法として，変数の固定を行う．つまり，変数の数を減らすために一変数（角度 θ ）を固定（90°として）して考えるのである．これは，特殊な場合として直角三角形を思考対象とすることに等しい．また，さらに一辺 a を基準長１と考えれば，この関数は b の長さによって c が決まる関数（$c=g(b)$ ）と考えられる（これらの関数の式は，三平方の定理や余弦定理を学ぶことで記述可能となるが，関数関係は式が記述できなくとも理解可能である）．これを図示すれば次の通りである（図 4.3.2）．



【図 4.3.2：二変数を固定した場合】

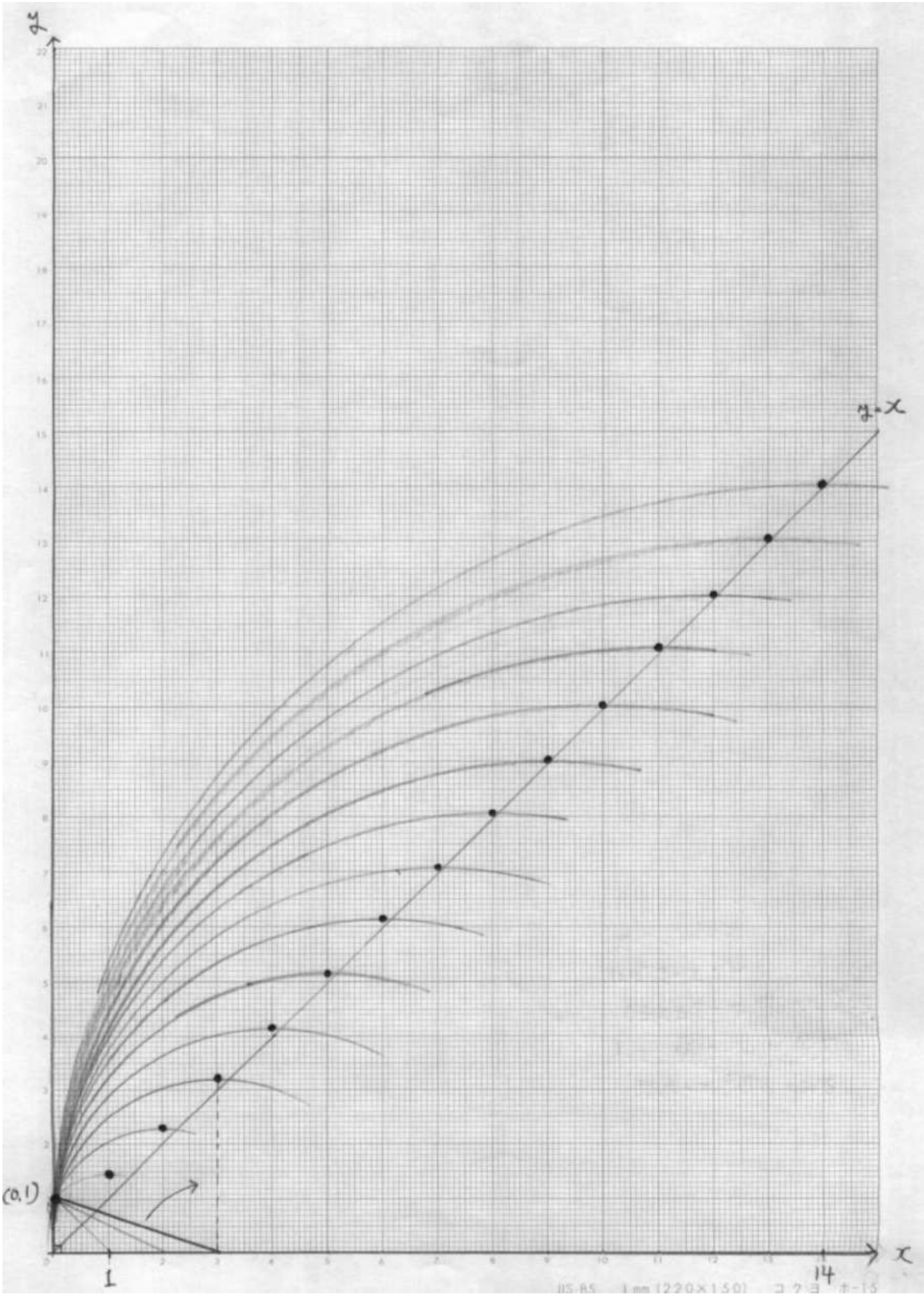
そこで，この関数関係をグラフで表現することを考えよう．多くの場合，関数のグラフは式から表を作成し，そ

の数値を x-y 平面上にプロットすることで作成される．しかし，関数のグラフを作成する方法は必ずしも式や表に依存したものだけではない．つまり，式や表はわからなくとも，関数関係をグラフの形で可視化することができるのである．例えば，今回の場合，基準長１を y 軸上にり，x（$=b$）を独立変数と考える．すると x（$=b$）の値に応じて，（0,0），（0,1），（b,0）を結ぶ直角三角形が決定される．つまり，図 4.3.2 における頂点 A を（b,0）に，頂点 B を（0,1）に，頂点 C を原点に対応させるわけである．このとき，グラフを描くためには各 x の値に対して $y=c$ となる点をプロットしていけば良い．ここで，c は辺 AB の長さであり，これは（b,0）から（0,1）までの距離に等しい．従って，コンパスを利用し，この長さを $x=b$ 上に移してくれればグラフの通過する各点(b,c)が得られることになる．実際に，方眼用紙の 1 マスを 1 として，これを実践すれば図 4.3.3 のようになる．このように点をプロットしていくと，この関数のグラフは（中学生であれば既習の）比例（$y=x$）のグラフに非常に近い形をしている事がわかる．しかし，その概形は明らかに比例とは異なり，特に $0 \leqq x \leqq 7$ の範囲では，$y=x$ からのずれも大きいように見える．そこで，次に方眼用紙の 1 マスを 0.5 として，同様の作図を行ってみよう．その結果は図 4.3.4 の通りである．この結果を見ると，x の値が小さい程 $y=x$ から離れる傾向が見てとれる．これは，元の直角三角形の辺長に関する関係を考えても理解できることである．そこで，このグラフの概形をより詳しく調べてみることにしよう．例えば，更に細かく x の値をとることも可能であり，方眼用紙の 1 マスを 0.2 とすれば図 4.3.5 が得られる．このように，x を細かくとり対応する点をプロットしていくことで，考察対象となっている関数の概形が見えてくる．このグラフは双曲線関数$(x^2-y^2=-1)$の一部であり，x が十分に大きいときにほぼ一致してしまう $y=x$ のグラフはその漸近線に対応している．故に，この作図活動は関数関係の理解だけでなく，双曲線関数を学ぶための素地にもなっているのである．

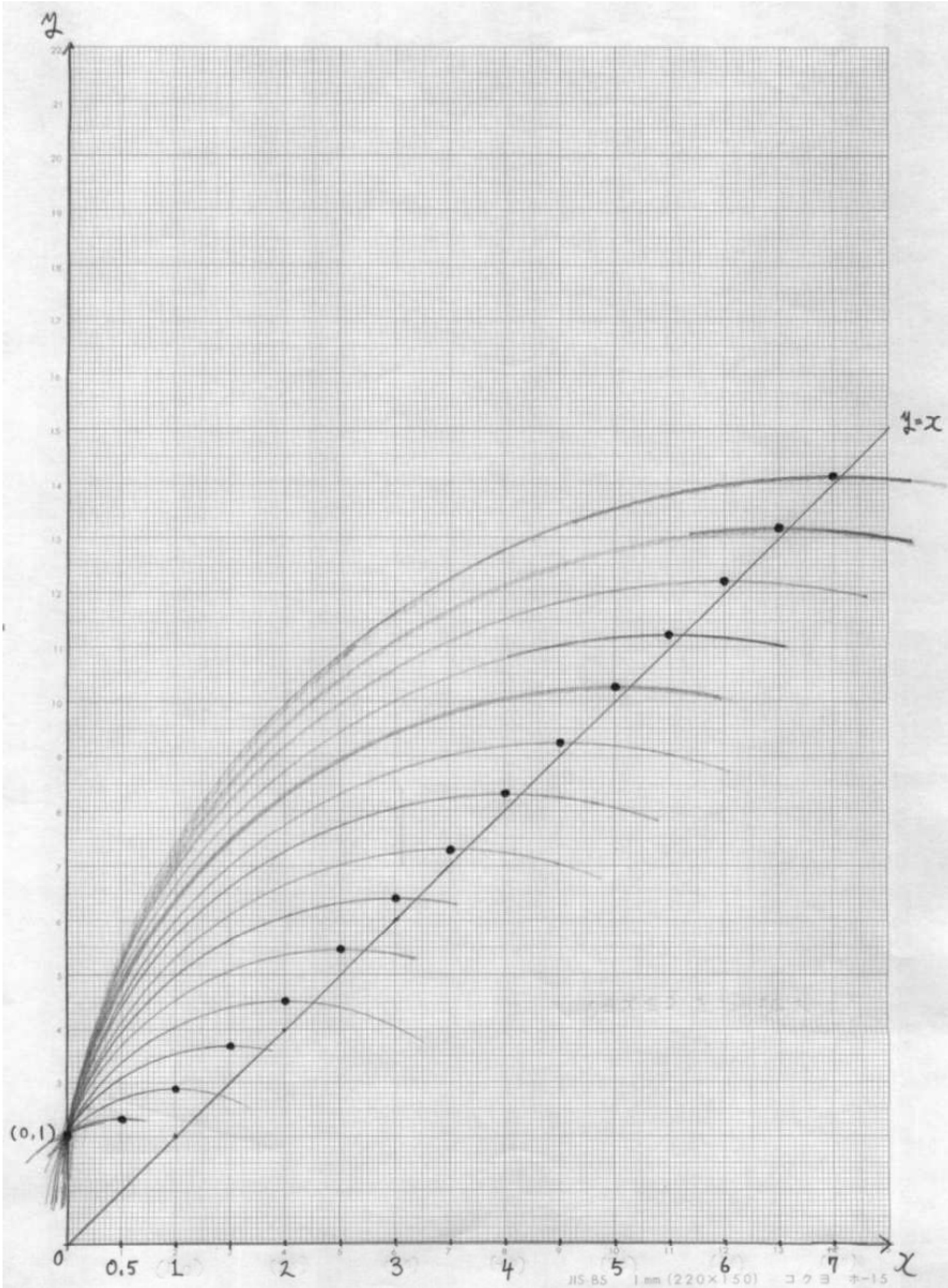
ここで，上掲の方法で作図したグラフは式 $x^2-y^2=-1$（$x \geqq 0, y \geqq 0$）で表されるものであった．そこで次は，高等学校数学科で学習される双曲線関数の一般形である，式 $x^2-y^2=1$ のグラフを作図する方法を示す．そのために，条件を少し変え図 4.3.2 の直角三角形において $b=g'(c)$という関数 g' を考える．ここで，この関数 g' は「斜辺と他の一辺が決まれば直角三角形が一意に定まる」という決定条件の中の数量から関数を見出すことで得られるものである（厳密に言えば，この決定条件は学校数学で必ずしも扱われる内容ではない．しかし，直角三角形の合同条件として学習される内容から直ちに理解可能なものである.）．そして，この関数 g' の作図を考える．まず，x-y 平面の原点 O を中心に半径 1 の円を描き，円周上の任意の点 D を定める．次に，D を通る接線を作図し，その接線と x 軸の交点を E とする．すると，O,D,E を結ぶ直角三角形が考えられ，この直角三角形 ODE は図 4.3.2 の直角三角形 BCA と対応していることがわかる．このとき E の x 座標は既に直角三角形の斜辺長 c となっているので，後は長さ b を y 軸方向に取ればグラフの通過点（c,b）が得られることになる．ここで，b は辺

DE の長さに等しいので，これをコンパスで $x=c$ 上に移すことは容易である．このようにして，点をプロットしたものが図 4.3.6 である．図 4.3.6 では接線作図のために，いくつかの直接グラフに関係のない線（半径 2 の円など）も描き込んでいる．そこで，次の図 4.3.7 ではこれらの線を極力排した状態でグラフの概形を見てみよう．ここで，作図の元になっている直角三角形の関数関係を考えると，今回作図している関数 g' は初めに作図した関数 g の逆関数になっていることがわかる．実際，図 4.3.7 のグラフは図 4.3.5 のグラフを $y=x$ に対し線対称に移したものになっている．

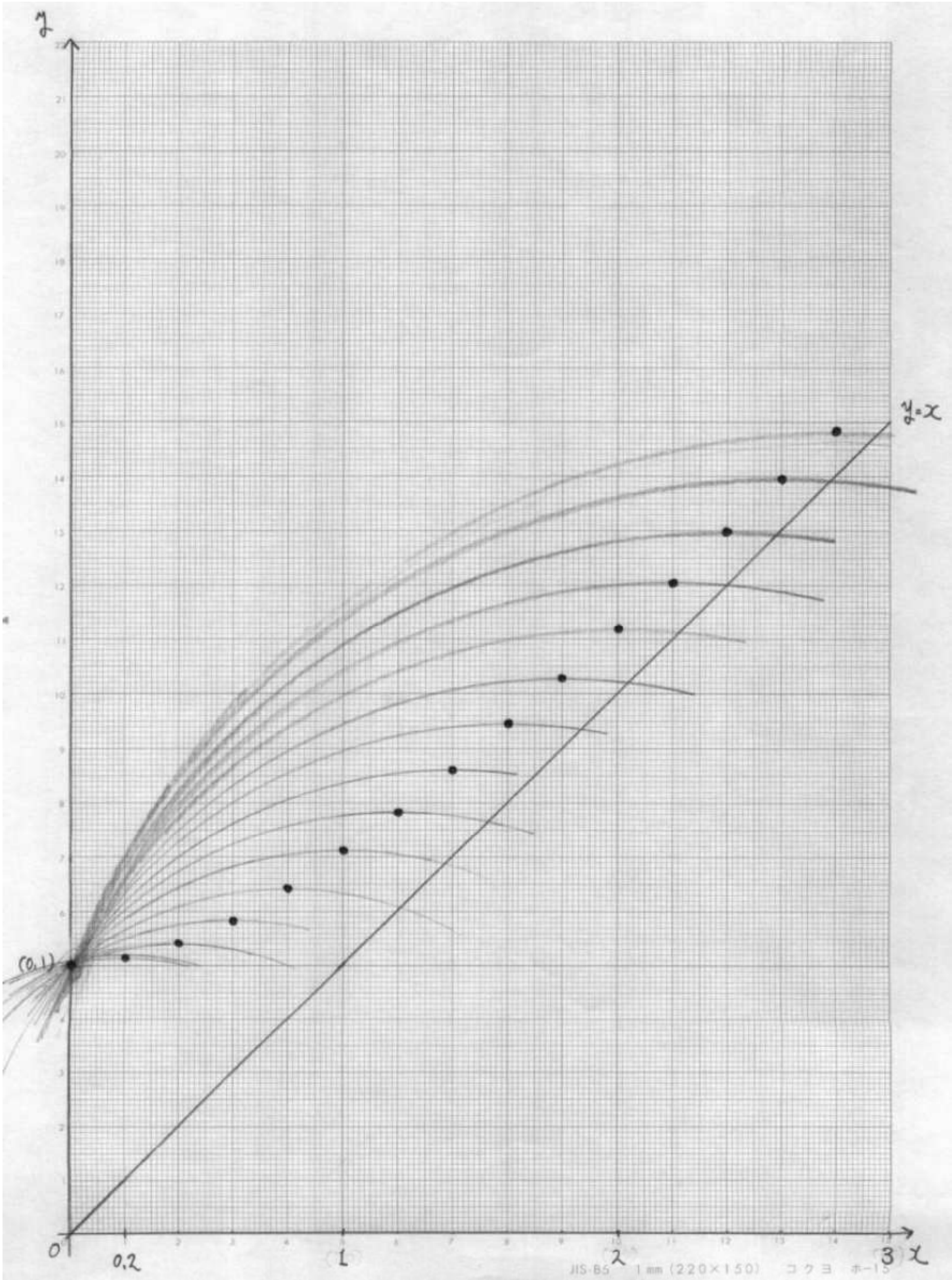
発展として，∠DOE を θ とおいて，g' の作図過程を振り返ってみる．すると，三角関数を用いる事で $c=1/\cos\theta$, $b=\tan\theta$ と表せることがわかる（$0\leqq\theta\leqq 90°$）．ここで，θ を変化させると（c,b）は $x^2-y^2=1$ 上を動くので，このことから
$(1/\cos\theta)^2-\tan^2\theta=1$　（$0\leqq\theta\leqq 90°$）の成立がわかる．実際，この関係式を整理すれば $1+\tan^2\theta=(1/\cos\theta)^2$ となり，これは高等学校数学科で「三角関数の相互関係」として学ばれる内容に対応している．



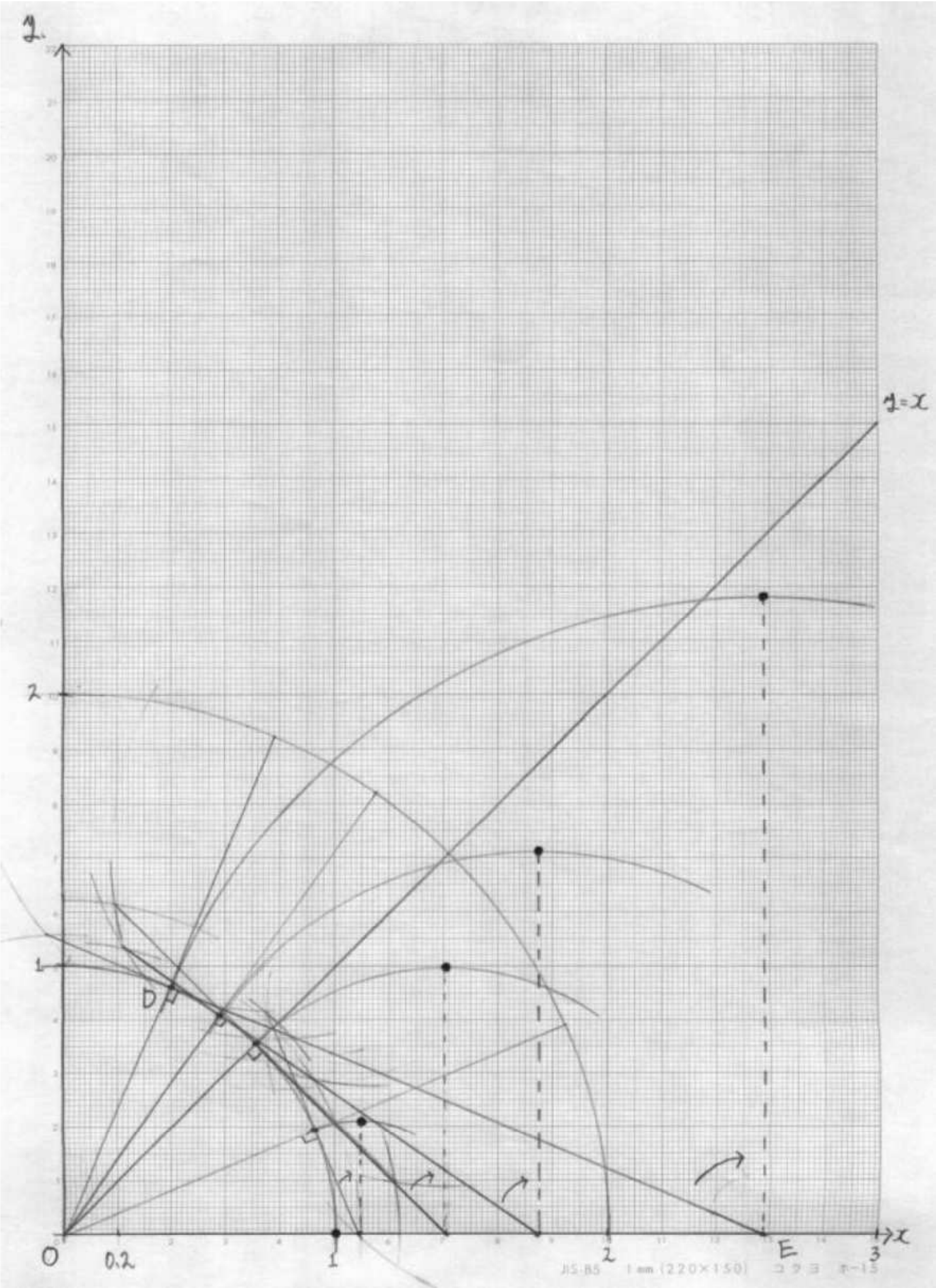
【図 4.3.3：グラフ作図の実践（1 マス＝1）】



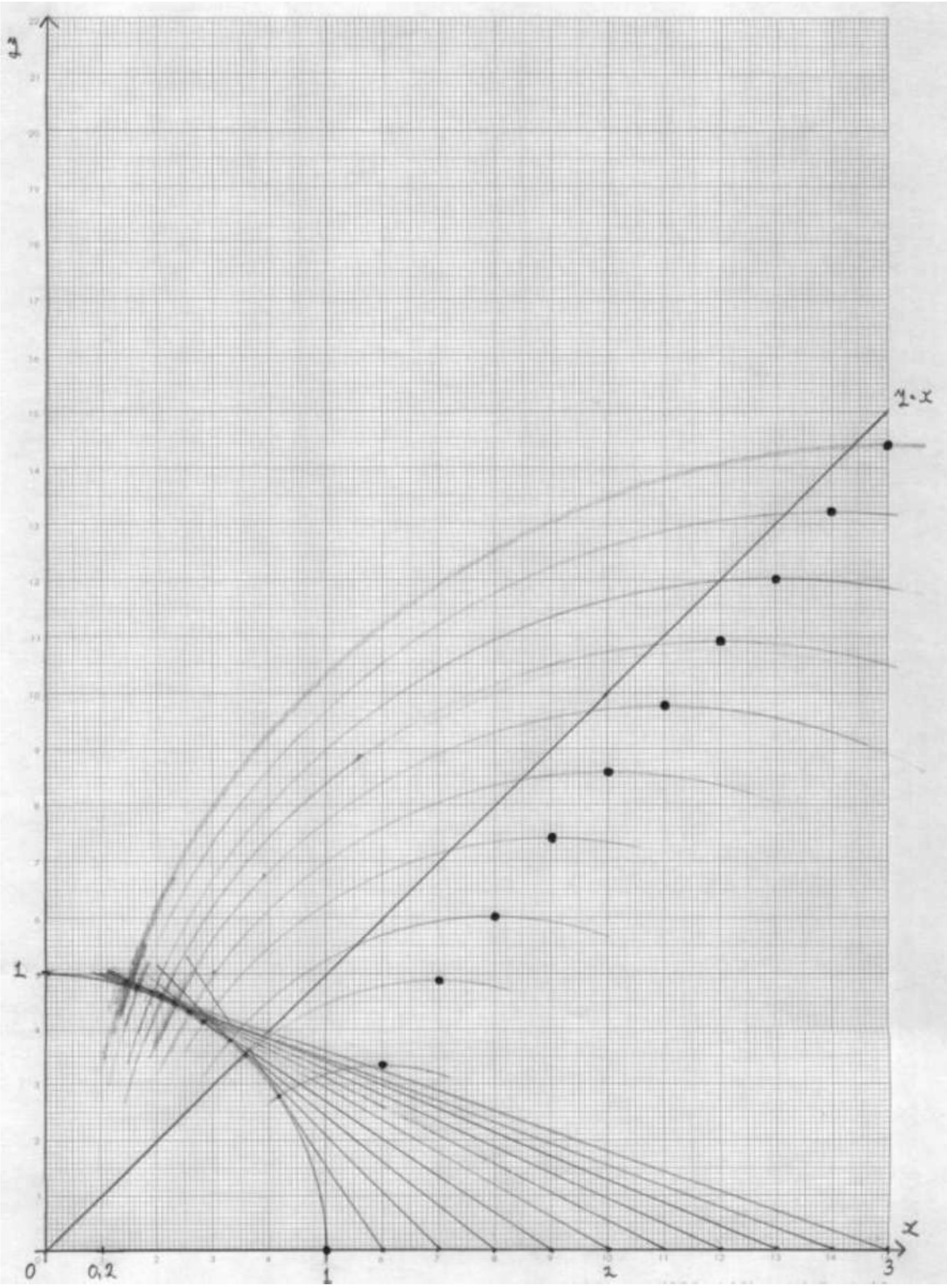
【図 4.3.4：グラフ作図の実践（1 マス＝0.5)】



【図 4.3.5：グラフ作図の実践（1 マス＝0.2）】



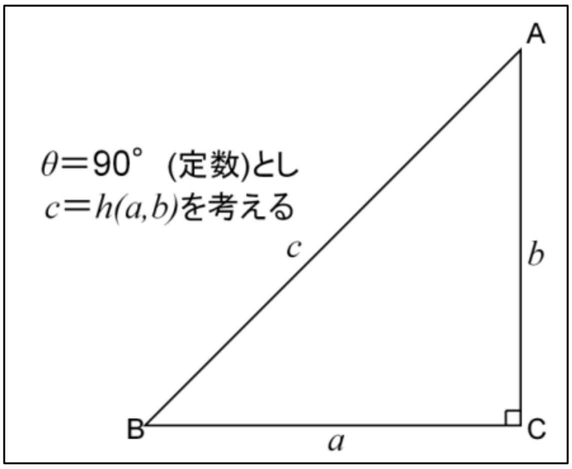
【図 4.3.6：一般形のグラフ作図の解説（1 マス＝0.2）】



【図 4.3.7：一般形のグラフ作図の実践（1 マス＝0.2）】

３．一変数を固定して考える

前項では二変数を固定して考えることで双曲線関数が得られる事を示した．ここで，少し考えれば基準長として１に固定していた辺の長さを変えた場合にも同様のグラフが描けることがわかる．そこで，本節ではもう一方の辺の長さも動かした場合の関数の振る舞いを思考する．つまり, 今回思考する関数は図 4.3.8 のような二変数関数である．



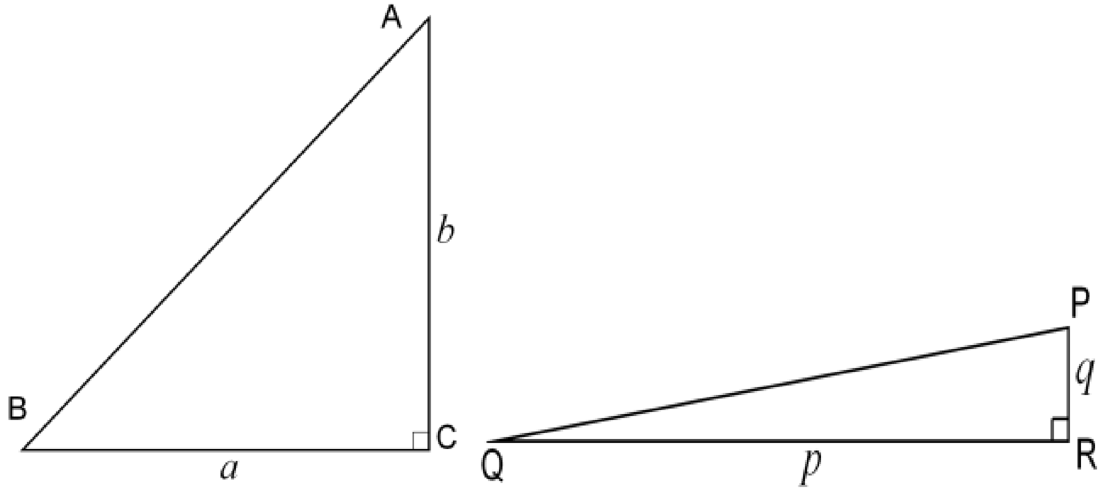
【図 4.3.8：一変数を固定した場合】

その上で，前項で提示したようなグラフ（図 4.3.3 など）を考えると，$c=c'$となるような（a,b）≠（a',b'）という組が無数に得られる事がわかる．これは，斜辺長が等しく合同でない直角三角形が無数に存在するということである．実際，このような直角三角形は斜辺長を固定した上で，その両端点を x 軸・y 軸上をスライドさせれば直ちに得る事ができる．

そこで，本節では上述した関数の逆を考え，斜辺の長さが等しい場合の直角を挟む 2 辺の関係を探っていく．つまり，$y=h\,(a,b)$と $z=h\,(p,q)$に関して，$y=z$ が成り立つ場合の a,b,p,q の関係を考察するという事である．すると，図 4.3.9 のような二つの直角三角形 ABC，PQR に対して以下の命題 1 が成り立つ．

命題 1

「斜辺の長さが等しい ⇒ $a^2+b^2=p^2+q^2$」



【図 4.3.9：斜辺長の等しい二つの直角三角形】

＜証明＞
まず，頂点 B，Q を重ね辺 QR 上に頂点 C が乗るように配置する（図 4.3.10）．
このとき，条件より AB＝PQ であるから
△ABP は二等辺三角形である．
そのため，頂点 B から辺 AP へ垂線を下ろせば，その足は辺 AP を二等分する．
ここで，その垂線の足を M と置く．
さらに，M から QR へ垂線を下ろしその足を L とし，P から AC へ垂線を下ろしその足を N とする．
ここで，頂点 B，Q の重なっている点を原点 O(0,0)と表し，頂点 L，M，N の各座標を示せば図 4.3.11 のようになっている．
このとき，AP⊥OM であるから
∠PAN＝∠MOL が言える．
よって，△PAN と△MOL は相似である．

$$\therefore \quad \mathrm{PN} : \mathrm{ML} = \mathrm{AN} : \mathrm{OL}$$

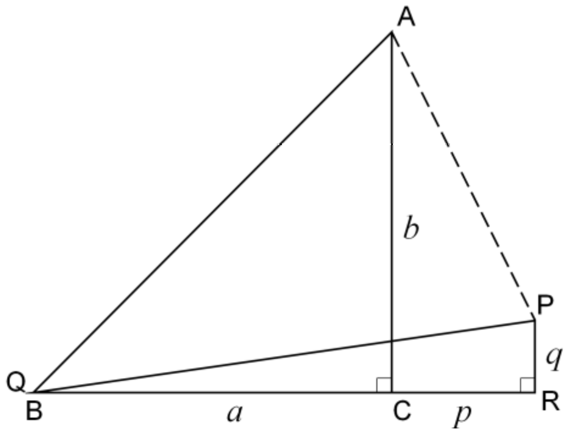
$$\Leftrightarrow \quad p-a : \frac{b+q}{2} = b-q : \frac{a+p}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b+q}{2}\cdot(b-q) = (p-a)\cdot\frac{a+p}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2-q^2 = p^2-a^2$$

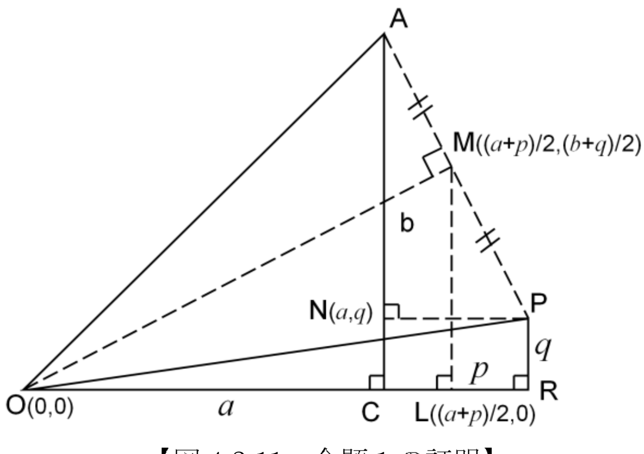
$$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2 = p^2+q^2$$

■



【図 4.3.10：直角三角形の重ね合わせ】

＜補足＞
上記の証明を見ればわかるように，$a^2+b^2=p^2+q^2$ という関係式は斜辺が等しいという条件から導出されるものであり，あらかじめわかっている必要はない．つまり，「$a^2+b^2=p^2+q^2$」は上記の命題を知らなくとも，演繹的に到達可能な関係なのである．



【図 4.3.11：命題 1 の証明】

上述した命題 1「斜辺の長さが等しいならば $a^2+b^2=p^2+q^2$ である」の証明を逆にたどることで，ほぼそのまま逆の命題（命題 2）を証明することができる．

命題 2
「$a^2+b^2=p^2+q^2 \Rightarrow$ 斜辺の長さが等しい」

＜証明＞

まず，元命題の証明と同様に三角形を配置し点 L，M，N，O を定める．（ただし，M は垂線の足ではなく，辺 AP の中点とする）

ここで，条件より

$a^2+b^2=p^2+q^2$

$\Leftrightarrow$　PN : ML＝AN : OL　（命題１の証明より）

よって，対応する二組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

△PAN と△MOL は相似である．

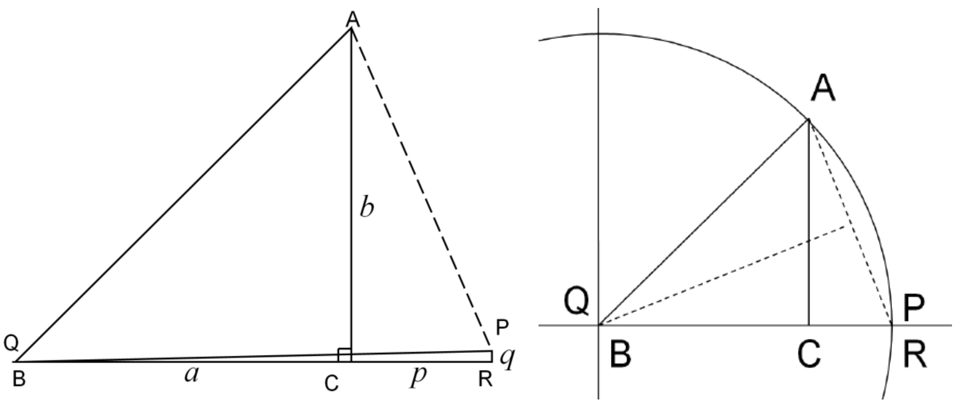
したがって，∠NPA＝∠LMO が成り立つ．

また，AC // ML なので∠PAN と∠PML は同位角で等しい．よって∠PMO は直角である．

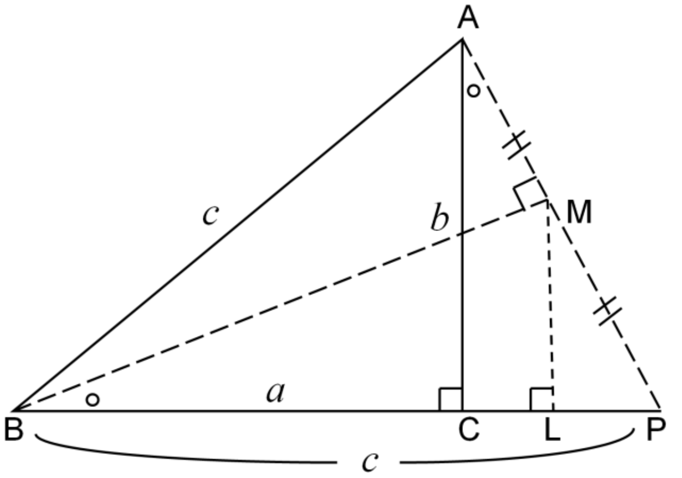
以上より， AM=MP かつ AP⊥OM が成り立つので，△AOP は二等辺三角形である．

よって，命題は成り立つ．　■

ここまでの議論より，任意の直角三角形二つに対し「斜辺の長さが等しい $\Leftrightarrow$ $a^2+b^2=p^2+q^2$」が成立する（三平方の定理の原始的定理）．そこで，これを満たす二つの直角三角形 ABC，PQR において，△ABC を固定し，△PQR の直角を挟む二辺の長さを変えてみる．すると，斜辺の長さ及び a^2+b^2 の値は一定であるから，辺 PR を短くすると辺 QR の長さが斜辺 PQ の長さに近づいていくことがわかる（このことは，前項の学習経験を基にすれば，極限操作になれていない者でも理解できるであろう）．ここで，この操作の極限「$q \to 0$」を考えると「$p \to$ 斜辺の長さ」となる．そこで，斜辺の長さを c と置くと，「$p^2+q^2 \to c^2$」が成り立ち，「$a^2+b^2 \to c^2$」が得られる．以上より，三平方の定理($a^2+b^2=c^2$)の成立が予想される（図 4.3.12）．また「斜辺の長さが等しい $\Leftrightarrow$ $a^2+b^2=p^2+q^2$」の証明を見直すと，$q=0$, $p=c$ としても命題が成り立つことがわかる．実際，次のような図（図 4.3.13）で証明を考えれば良い．これにより，任意の直角三角形に関して「$a^2+b^2=c^2$」の成立が言え，三平方の定理が導出される．



【図 4.3.12：極限操作のイメージ】



【図 4.3.13 : 三平方の定理の証明（概略)】

４．変数を固定せずに考える

言うまでもない事ではあるが，図１で提示した関数について，変数を固定せずに三変数関数と考えれば第二余弦定理を得る事ができる．三平方の定理を一般化しようと考え，第一余弦定理を介して第二余弦定理を導出するという指導方法は一般に良く知られているためここでは省略する．

５．本事例のよさと可能性

本節では，定理の導出に着目し，三角形の決定条件（二辺夾角）の中の変量から関数を見出し，それを探究することでどのような定理や知識が導出されるかを思考した．これにより，「三角形の決定条件」・「双曲線関数やその漸近線」・「三角関数の相互関係」・「三平方の定理」・「余弦定理」などの知識は一つの数学的な流れの中で関係付けられた．このように，導出研究には「出発点となる知識（既有知識）」・「核となるアイデア・考え方」・「導出される知識」が存在し，それらが関連付けられるという良さがある．また，本事例では幾何学的な内容を関数という解析的な観点から考察している．これは，失われつつある幾何学領域と解析学（関数）領域の結びつきを強め，昨今その重要性が再認識されつつあるスパイラル型の学習をも実現するものである．故に，これにより幾何学領域の学習体系が整理されるだけでなく，改良運動の際に注目されていた「幾何と代数の融合材としての関数の働き」（磯田，1999）が再認識されることと期待している．加えて，本節で提示している導出方法は，歴史の中に残されているものとは異なる可能性が高い[49]．このように，現代的

[49] 少なくとも三平方の定理が初めて論じられた頃には，関数という言葉は用いられていなかったという意味である．ただし，言葉が存在しないことと，概念・考え方が存在しないこととは必ずしも等しくはない．実際，「数で万物を説明しよう」という考え方や「星の動きで他の変動を説明しよう」という考え方は存在していたと言われている．そういったことを考えれば，関数関係を思考するということが行われていた可能性も否定できない．

観点やカリキュラム上の順序を考慮して導出を思考することは，指導の可能性を大きく広げる．

本節の内容は，それ自体が更に広がる可能性を有しているものである．今回は三角形の決定条件の中でも，二辺夾角に着目し，そこから他の知識を導出することを論じた．この観点と方法は，直ちに「他の決定条件を出発点とした場合にはどのような知識が導出され得るのか」という問いを生起させる．この問いに関しては，十分に研究が進んでいるとは言い切れないことと，本論文の主旨からそれる可能性が高いことから，ここで詳述することは避ける．参考のために簡単に概要のみを示しておくと次の通りである．まず，一般に三角形決定条件として学習されている条件には「二辺夾角」・「二角夾辺」・「三辺」の 3 つが存在する．これらはいずれも，条件の 3 つが定まれば三角形が一意に定まる事を意味している．従って，条件で与えられていない「辺の長さ」や「角の大きさ」は 3 つの条件と関数関係にある．加えて，三角形が一意に定まれば，その面積も定まることから「面積」も決定条件と関数関係にあると考えられる．そう考えると，決定条件で与えられているものを独立変数，そこから決定される他の辺や角，面積の大きさに関する情報を従属変数とした 12 個の三変数関数が思考できる．これを整理したものが，図 4.3.14 である．

独立変数	従属変数	従属変数	従属変数	従属変数
二辺夾角	他の角 1	他の角 2	他の辺	面積
二角夾辺	他の角	他の辺 1	他の辺 2	面積
三辺	他の角 1	他の角 2	他の角 3	面積

【図 4.3.14：三角形の決定条件をもとにした関数関係】

これらの関数はいずれも三変数関数であるため，それ自体は非常に複雑なものである．しかし，三角形の決定条件は直観的・経験的に真と認める事ができるため，関数関係の認識だけであれば比較的容易に行う事ができる．具体例として，以下に二辺夾角の場合を示しておく．

＜例（二変夾角）＞

右図において a, b, γ（二辺夾角）が既知の場合

$c = f_1(a, b, \gamma)$

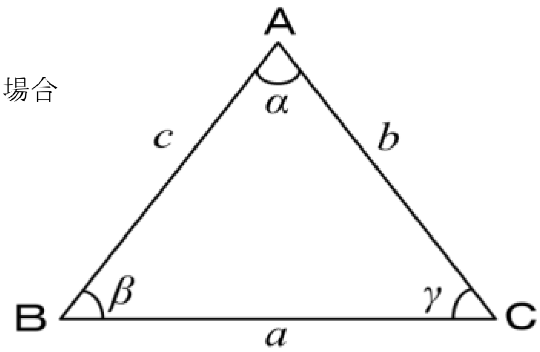
$\alpha = f_2(a, b, \gamma)$

$\beta = f_3(a, b, \gamma)$

面積を S とすれば

$S = f_4(a, b, \gamma)$

以上，4 つの関数関係が考えられる．



【図 4.3.15：三角形の中の数量（変数）】

第１項～第４項で示したように，導出という観点からこれらの 12 個の関数を思考することで，様々な知識が結びつく可能性がある．どのような内容と関連しているかを予想するために，それぞれの関数の式表現（定義域は省略）を示しておこう．ただし，式の中で用いられている記号は全て図 4.3.15 に従うものとする．また，記述を簡潔にするために，現行のカリキュラムでは扱われていない逆三角関数を用いている．しかし，本内容は逆三角関数を用いずとも指導可能である（カリキュラム構成の立場から再度逆三角関数の指導を検討しても良いであろう）．

＜二辺夾角（a, b, γ）が既知の場合＞

まず，余弦定理より以下が成り立つ．

$c = f_1(a, b, \gamma) = (a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}$　… ①

①をふまえる事で，余弦定理あるいは正弦定理より以下の２式も得られる．

$$\alpha = f_2(a, b, \gamma) = \cos^{-1}\left\{\frac{b - a\cos\gamma}{(a^2+b^2-2\mathrm{abcos}\gamma)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$= \sin^{-1}\left\{\frac{a\sin\gamma}{(a^2+b^2-2\mathrm{abcos}\gamma)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$\beta = f_3(a, b, \gamma) = \cos^{-1}\left\{\frac{a - b\cos\gamma}{(a^2+b^2-2\mathrm{abcos}\gamma)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$= \sin^{-1}\left\{\frac{b\sin\gamma}{(a^2+b^2-2\mathrm{abcos}\gamma)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

更に，面積 S に関しては以下の良く知られている面積公式がこれに対応している．

$\mathrm{S} = f_4(a, b, \gamma) = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

以上が二辺夾角から得られる 4 つの関数を記述したものである．これを見てもわかるように関数の求め方は一意ではないため，指導を考える際には注意・検討が必要である．

＜二角夾辺（a, β, γ）が既知の場合＞

まず，三角形の内角の和が一定であることから以下が得られる．

$\alpha = f_5(a, \beta, \gamma) = \pi - (\beta + \gamma)$　… ①

また，①及び正弦定理より以下の２式も得られる．

$$b = f_6(a, \beta, \gamma) = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} \quad \cdots ②$$

$$c = f_7(a, \beta, \gamma) = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} \quad ・・・ ③$$

更に，面積 S に関しては 3.1.で用いた面積公式及び②より以下が成り立つ．

$$\mathrm{S} = f_8(a, \beta, \gamma) = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$$

＜三辺が既知の場合＞

まず，この場合の最も有名な関係式として面積 S に関する以下の公式（ヘロンの公式）が挙げられる．

$S = f_9(a, b, c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

（ただし，$s = \frac{a+b+c}{2}$ ）

また，この式は式変形により次のようにも記述可能である．

$S = f_9(a, b, c) = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)}$ … ①

従って，3.1.で用いた面積公式及び①より，以下の３式が得られる．

$\alpha = f_{10}(a, b, c) = \sin^{-1}\left\{\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}}{2bc}\right\}$

$\beta = f_{11}(a, b, c) = \sin^{-1}\left\{\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}}{2ac}\right\}$

$\gamma = f_{12}(a, b, c) = \sin^{-1}\left\{\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}}{2ab}\right\}$

このように各関数の式表現を求めただけであっても，三角形の決定条件が「正弦定理」・「余弦定理」・「正弦を用いた面積公式」・「三角形の内角の和」・「ヘロンの公式」など様々な幾何学領域の内容と関連していることがわかる．ちなみに，このように「三角形の決定条件をもとに，他の辺や角の大きさを思考し，その式表現を求める」ことは球面三角法でも行われている[50]．球面三角法ではこれを「三角形（の決定条件）を解く」といったりもする．この表現を用いるとすれば，上記の式表現は「(ユークリッド）平面上の三角形（の決定条件）の解」であったわけである．ここで大切なのは，この思考方法が球面三角形にまで拡張可能であり，かつ数学的にも有意義なものであるという点である．数学教育学においては，「拡張」という思考方法を重視するあまり，時として定理や定義の無意味な拡張が行われる．しかし，「拡張」という思考方法の良さを伝えるためには，意味や価値のある「拡張」が求められる．そう考えたとき，本事例のように平面幾何学と球面幾何学の双方にまたがって有効であり，かつ双方の理解深化に寄与するような内容は実に優れたものであると言えよう．

その他にも，この思考方法に基づく研究は様々考えられる．例えば，三角形を一意に定める条件は前述した３つだけではない．比較的良く知られているものとして，「二辺の長さと（夾角でない）一つの角の大きさ（二辺一対角)」によって三角形が決定する場合がある．ただし，この場合はいつでも三角形が一意に定まるわけではなく，「与えられている二辺のうち長い方の辺の対角が与えられている」という条件が必要となる．これを図 4.3.15 の記号を用いて表現すると，(β, b, c) が与えられているとき $c < b$ が成り立つ場合ならば三角形が一意に定まるということである．ちなみに，辺長の大小関係が逆である場合は角の大き

[50] 球面上では三角形の決定条件が異なるため，得られる数式も異なるものとなっている．

さによって，「三角形ができない」あるいは「二通りの三角形ができる（直角三角形の場合は重解と考える)」という結果になる．この二辺一対角の場合も，適切に条件付けられていれば三角形を一意に決定することから，前述したような関数関係が思考できると言える．また，当然の話であるが同様に「二つの角の大きさと（夾辺でない）一辺の長さ」によって三角形を決定することも思考できる．この場合は三角形の内角の和の公式を介すことで，直ちに「二角夾辺」の場合に帰着させせられる．また，考察されることが少なく，あまり知られていないと思われるが「周長と二角の大きさ（周長二角)」が与えられた場合も三角形は一意に定まる．以下に，その作図方法と一意性証明を示しておく．また，それを図示したものが図 4.3.16 である．

＜周長二角による作図方法＞

記号は図 4.3.15 に従う．周長を L とし，L と β,γ を既知とする．
まず長さ L の線分を底辺としその両端点を B’，C’とする．
角 B’の値が β，角 C’の値が γ となるようにそれぞれ直線を描く．
そして，その直線の交点を A’とする．
次に，角 B’と角 C’それぞれの角の二等分線を作図する．
そして，角の二等分線の交点を頂点 A とする．
A を通る直線 A’B’に平行な線を作図し，底辺との交点を B とし，
A を通る直線 A’C’に平行な線を作図し，底辺との交点を C とする．
このときにできる．三角形 ABC の周長は L であり，底角の大きさは β,γ である．

（略証）

平行線の錯角は等しいことから，∠B’AB＝∠AB’A（＝∠ABC）が成り立つ．
従って△B’AB は二等辺三角形である．従って，B’B＝AB が成り立つ．
同様に，△C’AC も二等辺三角形であるから，C’C＝AC が成り立つ．
従って，（周長）＝AB＋BC＋CA＝B’B＋BC＋CC’＝L である．
また，底角が β,γ となっていることは平行線の同位角であることから明らか．

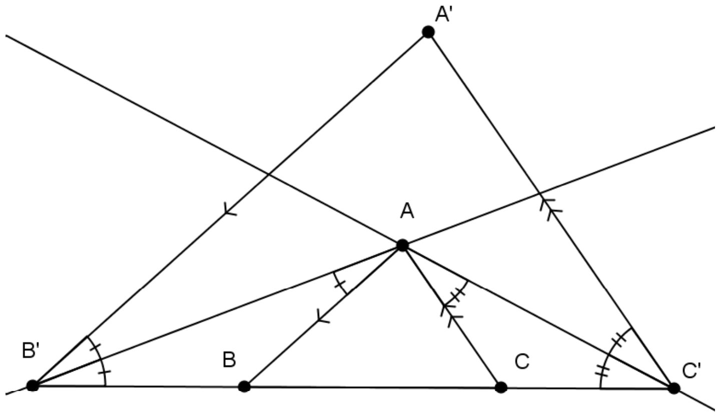
＜周長二角を満たす三角形の一意性証明＞

上記の作図方法から，既に存在性は示されているので，一意性のみを示す．
三角形の二つの角の大きさが既知であれば，残りの角の大きさも求まる．
従って，この条件下で作られる三角形は全て相似である．
ここで，「周長二角が等しく合同でない△ABC と△DEF が存在する」と仮定する．
△ABC ∽ △DEF なので，対応する辺の比は等しい．
つまり，AB＝k・DE，BC＝k・EF，CA＝k・FD（k は実定数）が成り立つ．
∴ AB＋BC＋DE＝k（DE＋EF＋FD）

このとき，周長が等しいという条件から $k=1$ となり，各辺の長さは等しい．

従って，△ABC≡△DEF が成り立ち，これは仮定に矛盾する．

背理法より，周長二角を満たす三角形の一意性が示される．



【図 4.3.16：周長二角による三角形作図[51]】

つまり，この「周長二角」も三角形を決定する条件となっているのである．この例は，周長の値を変数と見る，新たな観点を与えてくれる．このように，三角形の決定条件だけに着目しても様々な発展可能性がある[52]．勿論，他の多角形の決定条件を思考し，そこから関数を作るという発展も考えられるであろう．また，少し飛躍は大きいが辺をベクトルに置き換えた場合にも，三角形の決定条件は変化する（二本のベクトルのみで三角形が構成される）．このように，本節のような教材研究を突き詰めていけば，決定条件という視点から指導の中に大きな数学的な流れを作ることも考えられるのである．

---

51 図 4.3.16 は GeoGebra を用いて作図したものである．本アプリケーション上では，点 A,B,C を自由に動かすこともできる．

52 同様に二角決定による相似に着目すれば，「面積と二つの角の大きさ（面積二角）」が決まっても，三角形が一意に定まるとわかる．このように，周長や面積を独立変数とすることで，新たな決定条件（条件付きのものも含む）は複数得られる．

第４節　メネラウスの定理の導出

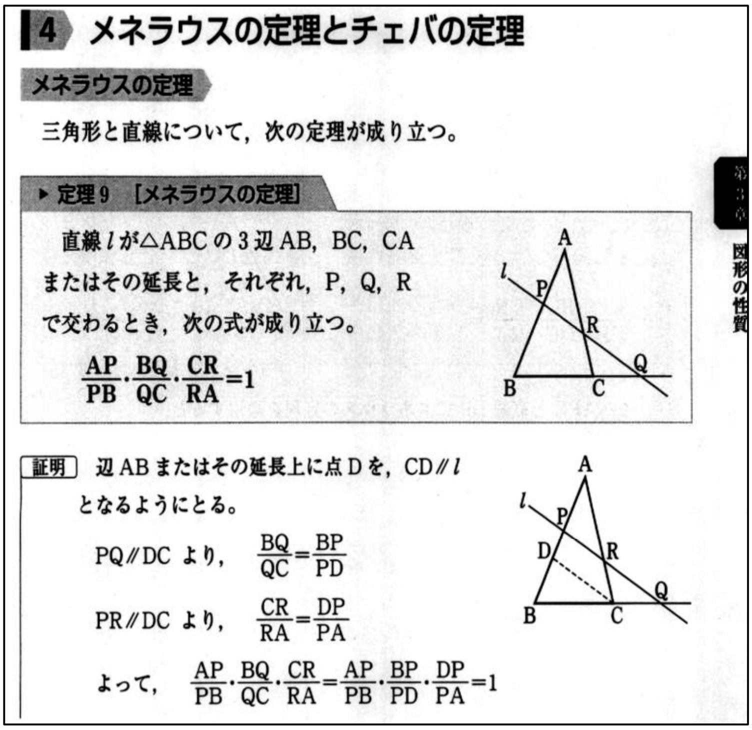
本節ではもう一つの具体例として，メネラウスの定理の導出に関する研究事例を紹介する．これにより，本教材研究手法が前節で示した事例にのみ有効なものではないことを示す．また，両事例に共通する考え方に着目することで，本手法の核となる思考方法もより明確になることであろう．

１．メネラウスの定理に関する先行研究

メネラウスの定理に関する先行研究は，その性質・構造に関するものと，その指導方法に関するものが主となっている．前者に関してはチェバの定理やデザルグの定理との関係（双対性など）を論じるものが多いようであり，定理の更なる拡張・一般化を目指したものも見受けられる．また，後者に関してはベクトルと関連付けた指導や物理学的内容と関連付けた指導，テクノロジーを利用した指導などが提案されている．また，定理の導出方法に関連する研究としては，村田・志村（1995）の幾何学定理発見システムに関する研究などがある．

複数社の検定教科書内容を見ると，メネラウスの定理の指導はチェバの定理の指導と前後することがあるとわかる．これによるメネラウスの定理への影響は極めて少ないものの，チェバの定理の証明方法は大きく異なっている．この指導順序という問題は，指導目標や既習内容から決定されるべきものであるため，その優劣は一概に判断できない．この点に関する考察は省略するが，本稿ではそれらを考慮し，チェバの定理とは独立にメネラウスの定理を導出する．

参考までに，メネラウスの定理に関する記述を高等学校の検定教科書（高橋他 33 名，2012）から抜粋すると次のようになっている（図 4.4.1）．このような，唐突な定理の提示とその証明という流れは多くの検定教科書でとられている，最も一般的なスタイルである．故に，教科書に沿って指導を行っている多くの教師の指導に，数学の系統性や数学的活動は存在していない．さらには，


4 メネラウスの定理とチェバの定理

メネラウスの定理

三角形と直線について，次の定理が成り立つ。

▶ 定理 9 ［メネラウスの定理］

直線 l が△ABC の 3 辺 AB, BC, CA またはその延長と，それぞれ，P, Q, R で交わるとき，次の式が成り立つ。

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

証明　辺 AB またはその延長上に点 D を，CD∥l となるようにとる。

PQ∥DC より，$\frac{BQ}{QC}=\frac{BP}{PD}$

PR∥DC より，$\frac{CR}{RA}=\frac{DP}{PA}$

よって，$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DP}{PA}=1$

第3章 図形の性質

【図 4.4.1 : 高等学校教科書のメネラウスの定理】

このようなスタイルで学び，教師となった教員の中には，指導をするにあたって「そもそも何故にメネラウスの定理を指導しているのか」・「メネラウスの定理が他の内容とどう関係しているのか」がわからないといったことを嘆いている者もいる[53].

２．メネラウスの定理[54]の導出

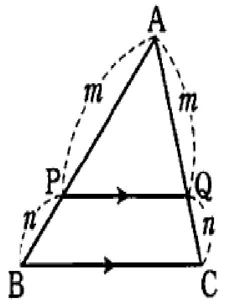
本節ではメネラウスの定理を既習内容である平行線の性質から導出し，その一般として位置づける．メネラウスの定理の学習は中学校段階で平行線の性質の学習（図 4.4.2）をする場面から始まる．これは，メネラウスの定理の証明において平行線の性質が利用されるというだけの意味ではなく，三角形に交わる他の一辺（直線）を思考する最初の機会という意味でもある．

△ABCの辺AB上の点P，辺AC上の点Qに対して，次のことが成り立つ。

PQ∥BC ⟺ AP：PB=AQ：QC

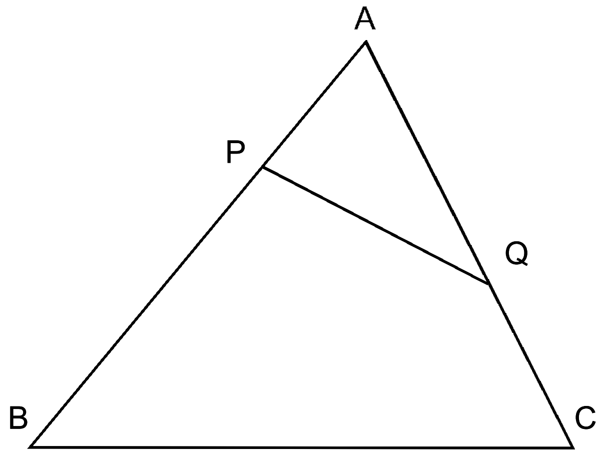
PQ∥BC のとき，次の式も成り立つ。

AP：AB=AQ：AC=PQ：BC



【図 4.4.2：平行線の性質】

平行線の性質を発展させ，図 4.4.2 における辺 PQ が辺 BC と平行でなかった場合を考えてみよう．すると，図 4.4.3 のような図形が得られることとなる．これに対し，平行線の性質同様，辺 AP，PB，BC の値から辺 PQ の値を求めることができるかを考えてみる．その際，辺の比を表現する方法としては“比(A：B＝C：D)”という表現が優れているものの，未知の値や関係を求めるのには分数による比表現の方が優れていることも合わせて指導しておきたい．ここで，平行線の性質（記号は図 4.4.2 に従う）を分数表現で記述すれば，その一つは



【図 4.4.3：平行線の性質の発展 1】

[53] これらは各教師が教材研究を行い，導入を工夫するなどして補わなければいけない．

[54] メネラウスの定理を非常に限定的なものとして認識している者がいるという話を聞くことがある．しかし，筆者は「メネラウスの定理」とは，メネラウスの定理が表している構造そのものを指していると解釈している．そのため，本論では関係式がメネラウスの定理と数学的に同型である場合には，それをメネラウスの定理と呼ぶこともある．

$\dfrac{AP}{AB}\cdot\dfrac{BC}{PQ}=1$ と書けることから，図 4.4.3 において同様の記述ができないかという事が問題になる．つまり，図 4.4.3 において $\dfrac{AP}{AB}\cdot\dfrac{BC}{PQ}=x$ （x は未知数）と表される x は如何なる数であるかを考える．ここで，既習知識である平行線の性質を利用する（図 4.4.4）．

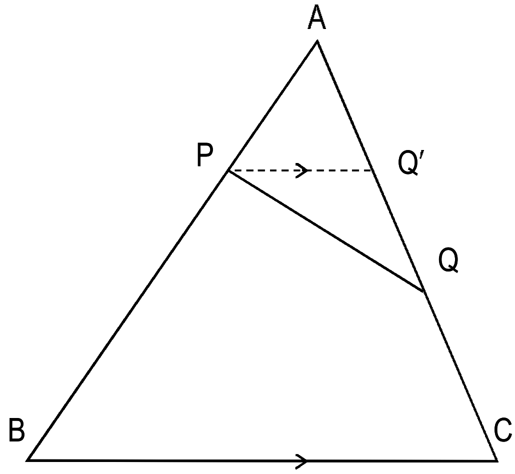
すると，$\dfrac{AP}{AB}\cdot\dfrac{BC}{PQ'}=1$ が成り立つことから，

この両辺に $\dfrac{PQ'}{PQ}$ をかけることで

$\dfrac{AP}{AB}\cdot\dfrac{BC}{PQ}=\dfrac{PQ'}{PQ}$ という関係式が得られる．

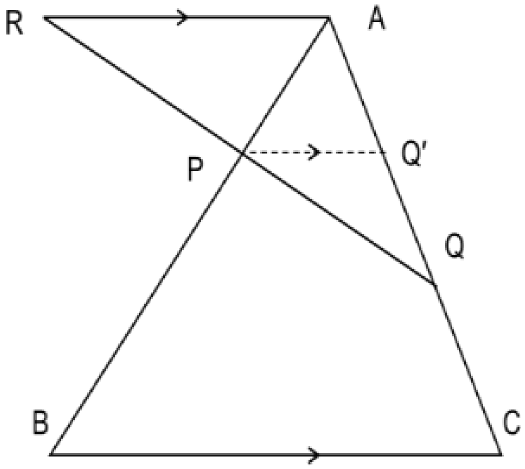
したがって，上述した x の値は $\dfrac{PQ'}{PQ}$ である．

また，この式からは $\dfrac{AP}{AB}\cdot\dfrac{BC}{PQ}\cdot\dfrac{PQ}{PQ'}=1$ という式が得られる．この式は，辺 PQ が平行でない場合は辺 PQ と辺 PQ′の差異（比）を考慮・補正すれば，平行線の性質に帰着させることができるという当たり前の事を示している．

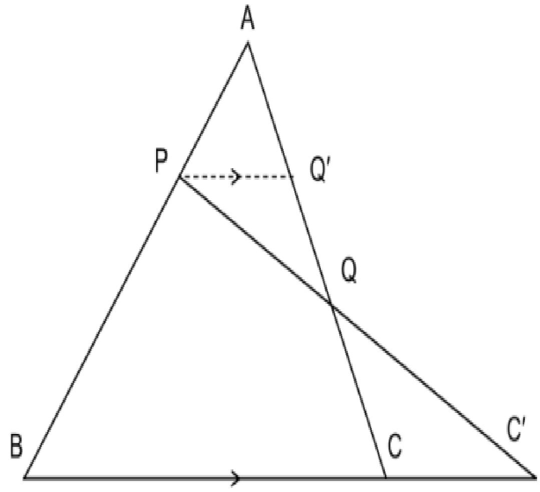


【図 4.4.4：平行線の性質の発展２】

この内容を発展させると，さらに次の 2 つの場合を考えることができる（図 4.4.5・図 4.4.6）．



【図 4.4.5：P 側への延長】



【図 4.4.6：Q 側への延長】

ここで，図 4.4.5 の図形は平行線の性質の発展問題として高等学校の入学試験などでも扱われるものである（PQ′は生徒側が引く補助線であり，△ABC と△QRA に対して平行線の性質を利用することで，問題を解決する場合が多い）．そして，図 4.4.6 はメネ

ラウスの定理と同一の図形である．ここで，図 4.4.6 で引かれている補助線 PQ′は教科書の証明（図 4.4.1）とは異なる．故に，この場合教科書（図 4.4.1）に記載されているような証明はできない．しかし，△PQQ′∽△C′QC が成り立つことは直ちにわかる（∵平行線の錯角より 2 組の角が等しい）．そして，このことから，$\frac{PQ'}{PQ} = \frac{C'C}{C'Q}$ が言える．従って，3 先に述べた関係式の系として $\frac{AP}{AB} \cdot \frac{BC}{PQ} \cdot \frac{C'Q}{C'C} = 1$ を得る事ができる．そして，これはメネラウスの定理と（数学的な意味で）同型である（実際，上記の式を変形し $\frac{C'C}{CB} \cdot \frac{BA}{AP} \cdot \frac{PQ}{QC'} = 1$ と表せば明らかであろう）．

３．本事例のよさと可能性

前項では，メネラウスの定理の導出について述べてきた．そして，その結果として「メネラウスの定理」が「平行線の性質」の一般に位置付けられる事がわかった．また，そういった観点から平行線の性質を振り返ってみれば，これはメネラウスの定理の（図 4.4.6 における）点 C′が無限遠点であった場合であるとわかる．これは，太陽光線を平行と考えることに等しく，そこまで理解の難しい内容ではない．昨今では，動的に幾何学図形を扱うことのできるソフトウェアも存在する．そういったソフトを用いて，点を自由に動かす活動を行えば，このような極限操作も直観的に理解されるであろう[55]．

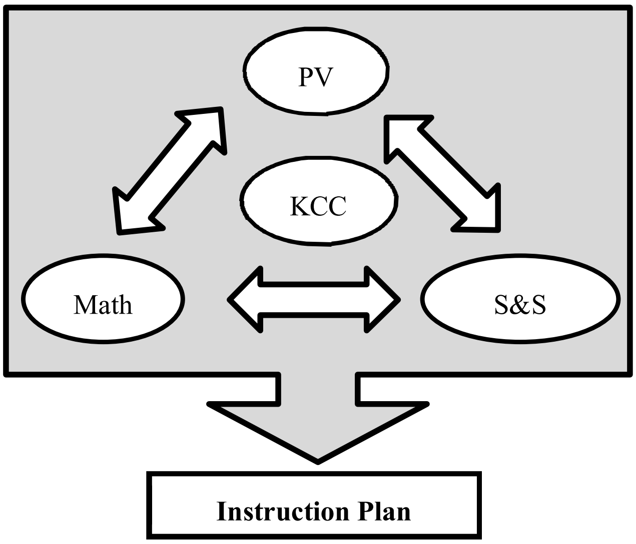
[55] 直観的に極限操作を扱うことは，前節の図 4.3.12 でも行われている．連続的に点の位置を限りなく近づけたり，遠ざけたりすることを思考させる際，動的な幾何学ソフトは実に有効に機能する．

第５節　定理の導出に着目した教材研究

本章の最後に，定理の導出に着目した教材研究について整理しておく．まず，この教材研究方法は，「既知のものから未知のものを導き出す」という観点から指導内容の繋がりを探究するものであった．本章では，その具体的な実践事例として，三角形の決定条件を中心とした事例（第３節）と，メネラウスの定理を中心とした事例（第４節）を提示した．また，それらの事例から導出研究の有用性や可能性を示した．特に第３節では，「決定条件から導かれる関数を思考する」という探究方法自体の応用・発展についても言及した．そこからは，数学的な流れのもとに様々な学習内容を関連付ける，一つの具体的な方向性が見えてきた．しかし，（前章同様）本論文におけるこれらの研究の主目的もまた，（教材研究の成果を公開することではなく）教材研究方法を開発・提案し，教材研究方法に関する研究を充実させることである．故に，今後はこの方法が様々な人によって（事例として挙げられていない）他の内容にも利用されるようになることが望ましい．そして，そのためには本教材研究方法の要点を明確にし，整理しておくことが有効であった．そこで，本節でも第 2 章で構築した枠組みを用い，第 3 節と第 4 節の事例をそれぞれ整理しておく．

本教材研究方法では，「数学的知識の体系的な理解とそれに基づく指導」に価値を置き，「定理の導出を思考することで，様々な学習内容を関係付ける」ということを行っている．このような研究を進める中で，定理の発見・発明には，多くの場合それを促す「核となるアイデア・考え方」が存在することがわかった．そこで，第３節では，「決定条件を関数として捉える」という考え方に基づき，三角形の決定条件（二辺夾角）の中の数量から関数を見出し，その探求を行った．そして，その結果として「双曲線関数やその漸近線」・「三角関数の相互関係」・「三平方の定理」・「余弦定理」などの知識が導き出され，関係付けられた．これを，枠組みを用いて整理したものが図 4.5.1 である．次に，第４節では「平行線の性質」と「メネラウスの定理」に関する事例を提示した．この事例と第３節の事例との違いは，「対象としている数学」と「導出の核となるアイデア・考え方」の部分にある．本事例で核となっているのは「一般化の考え方」である．本事例では，この考え方に基づいて平行線の性質を考察し，メネラウスの定理を導き出している[56]．この事例を整理したものが図 4.5.2 である．

[56] 当然のことではあるが，一般化を思考したからといって，必ずしも有意義な帰結が得られるわけではない．本事例では，事前に「平行線の性質」と「メネラウスの定理」が結び付くことを予想した上で，探究を行っている．



○ PV（教育的価値）：
「数学的知識の体系的な理解とそれに基づく指導」に価値を置く

○ Math（数学の理解）：
三角形の決定条件（二辺夾角）を中心に思考

○ S&S（繋がりの理解）：
「決定条件を関数として捉える」という考え方を重視して，探究・考察．
- 三角形の決定条件の中の数量から関数を見出す．
- 変数を固定して，探究する．

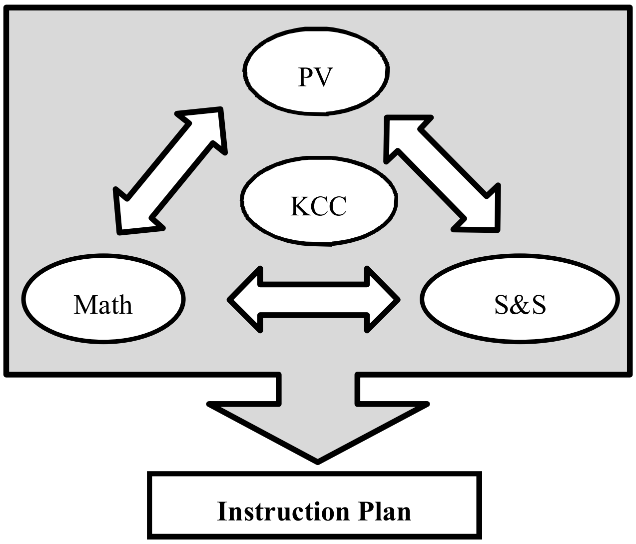
○ KCC（内容 - カリキュラムの知）：
「内容の繋がりに関する理解が深まる」
- 「二辺夾角の決定条件」が「双曲線関数やその漸近線」・「三角関数の相互関係」・「三平方の定理」・「余弦定理」などの知識と繋がる．

「変数を固定し，多変数関数を思考するような教材・指導が考えられる」
「数学的な流れのあるカリキュラムや指導が構想される」
「発見・発明や理解を促す，核となるアイデア・考え方が見えてくる」
「内容をカリキュラムの中でどう位置づけるかにより，様々な学習が構想できる」
- 「発見的な学習」・「探究活動を伴う学習」・「スパイラル型の学習」・「既習内容を振り返り内容を整理する学習」など

「内容を発展させ，決定条件を中心とした更に大きな学習の流れも思考できる」
「現代的観点から歴史的な内容を振り返ることの良さがわかる」
- 関数という観点から，三平方の定理の導出を思考することで，今までとは異なる指導の流れが見えてきた．このように指導の可能性を広げる効果がある．

○ Instruction Plan（指導計画等の成果物）：
項目的な知識の羅列ではない，数学的な流れを有したカリキュラムと，それに基づく指導が構想される．しかし，内容の繋がりやカリキュラムを中心に思考しているため，学習者の反応や理解に関する考察は不足気味である．故に，続けて他の構成要素（例えば，Understand Children’s Mathematics）に着目した教材研究を行うことも考えられる．

【図 4.5.1：枠組みを用いた教材研究方法（導出）の整理①】



○ PV（教育的価値）：
「数学的知識の体系的な理解とそれに基づく指導」に価値を置く
○ Math（数学の理解）：
「平行線の性質」と「メネラウスの定理」を中心に思考
○ S&S（繋がりの理解）：
「一般化」という考え方を重視して，平行線の性質を探究・考察．
・平行を二直線の関係の特殊な場合と捉える．
○ KCC（内容 - カリキュラムの知）：
「内容の繋がりに関する理解が深まる」
・「メネラウスの定理」が「平行線の性質」の一般に位置付けられる．
「数学的な流れのあるカリキュラムや指導が構想される」
・唐突な定理の提示とその証明という流れになることを防ぐことができる．
「発見・発明や理解を促す，核となるアイデア・考え方が見えてくる」
「内容をカリキュラムの中でどう位置づけるかにより，様々な学習が構想できる」
・「発見的な学習」・「探究活動を伴う学習」・「スパイラル型の学習」・「既習内容を振り返り内容を整理する学習」など
○ Instruction Plan（指導計画等の成果物）：
唐突にメネラウスの定理を提示するのではなく，数学的な流れの中でメネラウスの定理を思考させるようなカリキュラムや指導が構想される．しかし，内容の繋がりやカリキュラムを中心に思考しているため，学習者の反応や理解に関する考察は不足気味である．故に，続けて他の構成要素（例えば，Understand Children’s Mathematics）に着目した教材研究を行うことも考えられる．

【図 4.5.2：枠組みを用いた教材研究方法（導出）の整理②】

本教材研究方法は，導出という観点から数学の繋がり（Scope＆Sequence）を思考することで，カリキュラムや指導の可能性を広げる．その過程では，「発見・発明や理解を促すアイデア・考え方」が思考されており，これは学習者の数学（既有知識）に大きく関わるものである．また，出発点となる知識から生起する問いや活動の連鎖によって，導出は行われる．このように，定理の導出に着目した教材研究は「Scope＆Sequence」に留まらず，「Children’s Mathematics」や「Possible Problems, Activities and Manipulatives」にも関わっていく．これは数学の繋がりやカリキュラムに関する知

（KCC）と，他の数学指導の為の知（KCS や KCT）が相互に影響し合うことを示している．カリキュラムに変化が生じれば，その中での活動や学習者の理解が問題となる．逆に，可能な活動や学習者の理解を探究することで，カリキュラムを思考することもできる．このように，教材研究の構成要素は相互に関係している．そのため指導に向けた実際の教材研究場面では，その関係を意識して，様々な教材研究方法を複合的に用いていく必要がある[57]．様々な観点から多角的に教材研究を行い，より優れた指導の構築（教育目標の達成）を目指すことが肝要なのである．しかし，より具体的に「どのような方法をどのような順序で組み合わせると効果的か」ということについては，十分な答えを得られていない．これは質の高い教材研究の実現を目指す上で，解決すべき一つの重要な課題と言えるであろう．

[57] 例えば，「KCC を得るような教材研究を行った後に，KCT を得るような教材研究，KCS を得るような教材研究を行う」などが考えられる．この場合，より具体的には「数学の繋がりに関する理解を深め学習内容のカリキュラム上の位置付けを明確化した後に，当該内容においてどのような活動や発問が行えるかを探究し，それをもとに生徒の理解に即した授業を構築する．」ということが行われることとなる．

第５章　まとめと今後の課題

本章では，第１節で本論文の内容及び成果を整理し，本研究の有用性や独創性を明確化する．本研究は教材研究の「方法」に特化した理論的研究の第一歩にあたるものである．故に，今後更に多くの研究が行われることが期待される．そのため，第２節では研究の可能性と今後の課題も明らかにし，後続研究に対していくつかの指針を示すこととする．

第１節　研究の内容及び成果

本節では，順を追って本論文の内容を整理していく．そして序章で提示した研究課題①～③[58]がどのように思考されたか，またそれによりどのような成果が得られたかを示していく．

第１章「教材研究の規定」で論じたのは，「教材」･「教材研究」という言葉の定義についてである．これらの言葉は，無定義のまま（定義が意識されない状態も含む）慣習の中で広く用いられているものであり，その定義が一義的に定まっていない現状がある．そこで，複数の先行研究を参照し，これらの言葉がどのように使用されているかを整理した．また，その結果を基に本研究ではこれらの言葉をどのように用いているかを明示した．以下が，本研究における「教材」と「教材研究」の定義である．

教材：	教育目標を達成するために，題材を教育的に編成したもの
教材研究：	当該の教育目標を達成するために，何かの内容と学習者の認識を「教材」という概念で適切に関係づけようとする教師の営為

この章では，研究課題①が思考されており，特に教材研究という語の多義性については，先行研究で示されている数多くの定義を例示するなどして，これを明らかにしている．また，求められる教材が教育哲学や科学技術の進歩により変化してきたこと，そして変化し続けていることにも言及し，そのような多様な定義が生じてきた理由についても考察した．以上のように，第１章の主たる研究成果は，本研究における研究対象を明確化したこと，及び課題①の一部を解決したことである．

第２章では，まず「教材研究」研究の現状と課題について言及した（第１節）．そこでは，以下の２つの観点から，何故今「教材研究」研究が求められるのかを考察した．

（1）教材研究の価値・有用性の（再）認識	（国際的な動向）
（2）教師の入れ替わりによる文化の変容	（国内の動向）

58 研究課題の詳細に関しては本論文６頁で提示している通りである．ここでは，参考までにその見出しのみ再度提示しておく．

① 教材研究の定義を明確化すること
② 教材研究の方法に関する先行研究を整理すること
③ 教材研究の新たな方法を探究し提案すること

より具体的には，「授業研究」研究との関わりや研究のグローバル化，大規模な世代交代による教師文化の変容，社会の変化を受けた教育目標の変容などにより，教材研究の結果のみの伝達や「見る」・「まねる」・「盗む」といった（非言語的な）形での教材研究方法の伝達では，不具合が生じていることを指摘した．そして，教材研究を充実させるためには，その過程を整理・記述し，伝えるような枠組みが求められるという結論を得た．そして，そのような理論枠組みの構築を目指し，先行研究の整理・考察を行った（第2節）．その際，先行研究をその内容と具体性の強さから，「実践的な研究」・「方法の研究」・「理論の研究」の3つに大別した．簡単に先行研究及びその考察結果をまとめていく．まず，「実践的な研究」では，昨今インターネット上で様々な研究成果が共有・蓄積されるようになっていることに言及した．しかし，それらを見ても教材研究の方法・プロセスの伝達については，その方法が確立されておらず，十分に行われていないことがわかった．次に，「方法の研究」では，具体的な教材研究方法を提案するものと，教材研究の際に（経験的に）有効に機能する方法を示すものについて考察した．これらの研究からは，教材研究を支える考え方にも，具体的な思考方法から抽象的な作法まで様々なものが存在することがわかった．また，これらの具体的な方法に関する研究は，後に抽象的な理論研究を思考する際の良い具体例にもなっている．最後に「理論の研究」では，前述した教材研究方法に関する理論的な枠組みの構築に向け，観点を異にする複数の理論研究を考察した．そこでは，まず教材研究の変数（要素）の多さが指摘されており，研究を進めるためには主要な構成要素を抽出する必要があることがわかった．加えて，それらの構成要素間の関係や，結果として得られる知に着目することが有効であることも示唆された．そこで，構成要素とそれらの関係について思考している研究として，Watanabe,T.ら（2008）の Kyozaikenkyu Process モデル（図 2.2.3）と，それに改良を加えた藤井（2013）の教材研究モデル（図 2.2.4）に言及した．そこでは，主要な構成要素として以下の5つに着目することがなされていた．

- Pedagogical Value（PV）
- Understand Scope & Sequence（S&S）
- Understand Mathematics（Math）
- Understand Children's Mathematics（Children's）
- Explore Possible Problems, Activities and Manipulatives（Explore）

特に，PV については，その優位性が主張されており，これは本研究における教材研究の定義に照らしても妥当なものであった．他方，数学指導の為の知識に関する研究についても言及し，教材研究において得られ，養われる知についての示唆を得た．またそこからは，理論やモデルの規範的特性と記述的特性を思考するという観点も得られた．そして，これらの先行研究を基に，教材研究方法を捉える理論的な枠組みの構築を行った（第3節）．そこでは，以下の手順・方法で枠組みの構築を行っている．本研究の核はこの方法にあると言える．

（Ⅰ）教材研究の主要な構成要素の抽出 （Ⅱ）主要な構成要素とそれらの関係への着目 （Ⅲ）主要な構成要素及びそれらの関係を探究すること（教材研究）で得られるものの明確化

本論文では，その具体例として，藤井（2013）の教材研究モデルをベースにした「教材研究方法を捉えるためのモデル」と「それに沿って教材研究の方法を整理・記述するという枠組み」を提案した．そこでは，具体的な教材研究方法一つ一つを捉えるために，着目する構成要素を更に絞り，藤井の教材研究モデルの一部（切り口）を思考している．また，それらを Ball ら（2008）の「Mathematical Knowledge for Teaching」と対応付け，得られる知を明確化している．特に，本論文では算数・数学科における（特有の）教材研究を思考する限りは，「PV」と「Math」に優位性が生じると判断し，Pedagogical Content Knowledge（KCS，KCT，KCC）に関わる（図 2.3.7 のような）モデルを中心としたもののみ思考している．そして，その枠組みを用いて 2 つの先行研究を整理した（図 2.4.2，図 2.4.5）．またこれにより，本枠組みの性質や可能性が明確化された．その結果を整理・要約したものが以下の 4 つである．

＜枠組みの性質・可能性＞ （１）教材研究方法の記述・整理を可能とする． （２）主要な構成要素の厳選を必要とする． （３）柔軟性があり，拡張・応用が可能である． （４）（記述的特性に加え）規範的特性をも有する可能性がある．

以上のように，この章では研究課題①・②が思考されており，教材研究の現状や性質の明確化と，先行研究の整理が行われていた．また，主たる研究成果としては，「教材研究方法を捉える枠組みの必要性」・「モデル・枠組みの構成方法とその具体例」・「具体的な枠組みの利用例」・「その枠組みの性質及び可能性」などを示したことが挙げられる．このように，多くの内容及び成果を有する第 2 章は，本論文で最も重要な箇所と言える．

第 3 章では，「学習命題（A）及びその一部を否定することによって生成れる命題（B）を思考することで，学習命題（A）に対する理解を深める（否定利用）」という観点から，指導内容等を探究することで，数学と指導を繋ぐ知（KCT）を得るという教材研究方法を提案した．そこではまず，否定利用が我々の知識獲得と深く結びついており，あらゆる学習場面（教師による教材研究場面でも）で行えるものであることを述べた（第 1 節）．そして，論理学的観点と心理学的観点から，何故否定利用により理解深化が生じるのかを考察した（第 2 節）．その結果，我々の命題理解・認識が往々にして不完全であることと，否定利用によりその不完全さが補われることが明らかとなった．このように，否定利用の機能や有用性を明確化した上で，それによって得られる「学習命題の深い理解と，それに基づく指導」に価値を置き，否定利用に着目した教材研究方法を考察した．本教材研究方法の流れは「学習内容を命題の形に書き換え，その条件に対して

否定を用いることで別の命題を生成する．その後，生成された命題を考察することで学習命題の理解深化を狙う」というものである．本論文では，この方法を「代数・解析的な問題（第３節）」と「幾何学的な問題（第４節）」の２つに適用した実践事例を提示して論じた．また，その内容を第２章で構築した枠組みを用いて記述することで整理した（第５節）．結果として，一つ一つの実践事例から否定利用に着目した教材研究方法の効果が示されたことは勿論，構築した枠組みを用いることでその有用性を更に明らかにした．具体的には，本枠組みを用いて教材研究方法を整理することで，教材研究方法間の差異の度合いがより明確に思考できるようになった．以上のように，この章では研究課題③を思考し，否定利用に着目した教材研究方法を提案している．主たる研究成果は，（単に具体的実践事例からのみでなく）構築した枠組みを用いることで，「この方法が一つの教材研究方法として妥当なものであることを示したこと」や，「教材研究方法間の差異の度合いを捉え，それらを整理することが可能であると示したこと」である．

第４章では「既知のものから未知のものを導き出す（導出）」という観点から，教科内容を探究することで，その繋がりに関する知（KCC）を得るという教材研究方法を提案した．そこではまず，導出の性質について整理・考察し，その特性や教育的価値を明確化した（第１節）．これにより，導出が昨今改めて重視されている「数学の体系的な理解」に繋がるものであること，そして導出を思考するためには「出発点となる知識（既有知識）」と「得られる知識（学習命題）」に加え「核となるアイデア・考え方」を意識する必要があることが示された．そして，その上で先行研究・類似研究に言及し，特に杉山（2006）の円周角の定理に関する研究を参考に，導出研究の意義を論じた（第２節）．また，実践事例として「三角形の決定条件に関するもの（第３節）」と「メネラウスの定理に関するもの（第４節）」を提示し，枠組みを用いて整理した（第５節）．結果として，本教材研究方法の効果や有用性が示されたことは勿論であるが，数学の繋がり（S&S）を中心に思考した教材研究方法であっても，子どもの数学（Children's）や生起し得る問や活動の探究（Explore）に関する知が得られる可能性があるということも示された．教材研究は，その構成要素間の関係を意識して様々な方法を複合的に用いていく必要がある．本事例からは，より具体的に「どのような方法をどのような順序で組み合わせると効果的か？」という次なる課題も見えてきた．以上のように，この章でも研究課題③を思考しており，ここでは導出に着目した教材研究を提案している．また，主たる研究成果としては「この教材研究方法の妥当性を示したこと」や「教材研究に関する研究の次なる課題を明確化したこと」が挙げられる．

最後に，本論文全体を通した，研究成果を整理しておく．本研究は「教材研究とは何であり，如何になされるべきか」を明らかにしようという問題意識で進められてきた．そのために，前掲の研究課題を定めそれらを思考してきたわけである．その中で，教材研究方法を記述し，伝達することの必要性が明らかになり，そのための枠組みを構築するに至った．結果として，本研究では「教材研究方法及びその記述・伝達方法」が研究

されたわけである．全体を通し，過度な抽象論とならないよう，可能な限り具体的な内容についても言及した．しかし，研究成果をそういった具体的な内容（モデルや教材研究方法の提案）のみとすることは避けたい．本研究の重要な成果は，教材研究方法を捉える枠組みの必要性とその構築方法を示したことにある．実際，本論文で提示したモデルよりも優れたモデルが存在する可能性は十分にある．そのため，今後更なる研究を行い，工夫・改善をしていかなければならない．しかし，このような枠組みの必要性が損なわれることはなく，それを明確化し研究対象としたことは，算数・数学教育学における価値ある一歩と言えるであろう．

第２節　今後の課題

本研究は「教材研究方法」を研究対象としている．このようなそれ自身変わりゆく可能性を有している文化的な営為を対象とする限り，その全てを完全に明らかにすることは難しい．故に，前節末にも述べたように，今後更なる研究を行い，その工夫・改善を思考していくことが肝要である．そこで本論文の最後に，研究を通して見えてきた可能性及び課題を整理することで，後続研究に対していくつかの指針を示すこととする．

（１） 教材研究の主要な構成要素の検討

本研究では，藤井（2013）のモデルを参考にし，着目する構成要素を決定している．また，本研究意図に照らして，一部の構成要素に優位性を持たせ，思考対象を限定している．しかし，着目する構成要素が本研究のものである必要性は明確にしていない（これは，現時点で解決不可能な問であろう）．故に，「主要な構成要素として何を選び，（着目する構成要素の数も含め）そのどれに着目すべきか」という点には，まだ研究の余地がある．また，教材研究方法の整理・伝達・研究が求められるのは，何も算数・数学科に限ったことではない．したがって，自明な次なる課題として，本枠組みの他教科への応用が考えられる．この場合，「数学の理解（Math）」に重きを置いている本論文のモデルは，そのままの形では使えない．主要な構成要素を検討し，各教科に適したものへと改める必要がある．このように，目的に照らして着目する構成要素の検討を行い，より目的達成に寄与する形へとモデルを改良していくことが望まれる．

（２） 得られる知の捉え方の検討

本研究では，Ball ら（2008）の「Mathematical Knowledge for Teaching」を参考にし，教材研究で得られる知を捉えている．しかし，これもまた確定的なものではなく，変更し得る要素の一つである．先の（１）でも述べたように，より優れたものが存在する可能性は十分にあるし，他教科への応用を考えた場合には変更せざるを得ないものである．故に，得られる知の捉え方についても，目的に照らして検討を行い，必要に応じて改良をしていくことが望まれる．

（３） 教材研究方法の整理と探究（枠組みの規範的特性の強化）

本論文で提示したような枠組みで，既存の様々な教材研究方法を整理していくことが考えられる．第３章でも述べたように，本枠組みは様々な教材研究方法の差異や類似度合を説明し，今まで以上にこれを整理して捉えることができる．様々な教材研究方法が散在しているといっても過言ではない現状において，このような研究もまた有意義であろう．また，本枠組みは既存の教材研究方法を整理・記述するだけでなく，新たな教材研究方法探究の指針ともなり得るものである．主要な構成要素を意識する

ことで，無意味な教材研究を避け，有意義な教材研究のみを考えることができる．そして，このような研究成果が蓄積されることで，我々はそれらを参照し，必要に応じた教材研究方法を選択できるようにもなるであろう．このように枠組みの規範的特性が強化され，その実用性が増すことが期待される．

（4） 教材研究方法の適切な組み合わせの探究

第 4 章で述べたように，優れた教育活動を実現するためには，様々な教材研究方法を複合的に用いていくことが望ましい．例えば，異なる知が得られる方法を組み合わせ，多角的に教材研究を進めることが考えられる．このとき，どのような順序でどのような方法を組み合わせれば，より効果的であるかということが問題となる．この問題は，優れた教材研究及び教育活動の実現に大きく関わるものであり，大変興味深いものである．ただし，「2 つの教材研究方法（A）と（B）が存在したとき，（A）と（B）のどちらがより効果的であるか」ということを評価する方法を少なくとも筆者は知らない．故に，そもそも現時点では解決不可能な課題である可能性すらある．故に，この「適切な教材研究の質を評価する方法が存在するか」という問と合わせて，今後の課題としたい．

（5） 枠組みの実用と改良

教育学に関わる多くの研究は，理論と実践の往還によって，その質を高めていく．研究対象を教材研究という文化的な営為においている本研究もまた，そのような研究の一つである．故に，本論文で提示したような枠組みが，今後広く利用されるようになることを望む．これにより，教材研究方法を記述・整理・伝達する枠組みは，よりその目的に適した形へと改良されるであろう．

（6） 時代に合わせた内容の更新

時代と伴に教育を取り巻く様々なものが変化していく．社会の変化や我々の生き方の変化は，教育を通して養うべき能力の変化を引き起こしつつある．また，第 1 章でも述べたように，教育哲学の変化や，科学技術の進歩による教育環境の変化も起きる．故に，本論文の内容のいくつかの部分は，いつか時代遅れのものとなるかもしれない．そのため，必要に応じて内容を再検討し，時代に応じたものへと更新していくことが望まれる．ただし，これはあくまでも表面上の具体例等においての話である．本研究で主張している，教材研究方法の研究及び伝達の重要性や，そのためのアプローチに関する考察が，その価値を失うことはないであろう．

（7） 教材開発研究に関するモデル・枠組みの構築

第 1 章で，教材研究という言葉は趣の異なる 2 つの意味（「研究者の教材研究」と

「教員の教材研究」）で利用されていると述べた．そして，本論文では「教員の教材研究」を主たる思考対象として論じてきた．しかし，もう一方の「研究者の教材研究」もまた我々の教育活動を支える重要なものである．特にその中でも，新たな教材の開発を目的とする研究活動を「教材開発研究」と呼ぶ[59]．本論文で思考してきた「教材研究」は，教材と学習者を結び付けるものであった．これに対し「教材開発研究」は，題材を教材にする試みである．その定義からも明らかなように，教材はこのような「教材開発研究」なくしては生起し得ない．社会的な営為としての教育活動[60]を思考する限り，変わりゆく時代や社会に応じて新たな教材が求められていく．故に，我々はこの「教材開発研究」をもまた行い続けていく必要がある．したがって，その必要性があるかは別として[61]，この「教材開発研究」の方法をもまた整理・記述することが考えられる．そして，その際に本論文で提示している枠組み構築の方法は一つの参考となるのではないかと考えている．つまり，教材開発研究においても，その主要な構成要素を特定し，それらの繋がりを思考することで，一つ一つの方法を捉えられるのではないかということである．教材開発研究の方法を捉えるモデル及び枠組みが構築され，更にはそれが規範的にも用いられるようになれば，教材開発研究もまた充実すると考えられる．故に，このような研究もまた興味深い有意義なものである[62]．

以上，7 つの課題を示した．本研究の成果は前節で述べた通りであるが，これらの課題を得たこともまた価値ある研究の成果であったと考えている．これらの課題が解決され，日々多くの教員によって行われている，教材研究及びそれに基づく教育活動がより一層充実したものとなることを願っている．

---

59 ただし，第 1 章でも述べたように，これらの言葉を区別せずに混同して用いている者もいる．

60 特定の技術や知識の習得を目指す学習・教育活動ではなく，例えば人間形成を目的とするような公教育のことである．

61 多くの教員は，国家などにより規定された教科内容や提示された指針に従って教育活動を行っている．故に，本論文で論じられている「教材研究方法」に比して，「教材開発方法」を伝達する必要性は希薄かもしれない．

62 一見すると，この問題は（本論文で構築した）教材研究を捉えるための枠組みをそのまま転用すれば解決できるのではないかと思われるかもしれない．しかし，教材開発研究では非数学的な事象を（教育的な価値のもとに）数学と結びつけるなども行われている．故に，非数学的なものを受容しない本論文のモデルでは説明が不可能である．また，単純に「題材」・「数学」・「教育的価値」の 3 要素で説明をしようとすると，これは漠然とし過ぎており役に立たない枠組みとなってしまう．このように，着目する構成要素を定める点に本課題の難しさはあると思われる．

引用・参考文献[63]

Ball, D. L. *et al.*（2008）, Content knowledge for teaching: What makes it special?, *Journal of Teacher Education 59*, pp.389-407.

Brown, S. & Walter, M.（2005）, *The Art of Problem Posing （Third Edition）*, Routledge. （First Published, 1983）（和訳本は，平林一榮 監訳，いかにして問題をつくるか：問題設定の技術，東洋館出版, 1990.）

Ehrmann, A. & Blachowicz, T.（2011）, Walking or running in the rain - a simple derivation of a general solution, *EUROPEAN JOURNAL OF PHYSICS 32*, pp.355-361.

Field, J. H.（2011）, Derivation of the Schrödinger equation from the Hamilton - Jacobi equation in Feynman's path integral formulation of quantum mechanics, *EUROPEAN JOURNAL OF PHYSICS 32*, pp.63-87.

Fujii, T.（2013）, The Critical Role of Task Design in Lesson Study, *ICMI Study 22 on Task Design （ICMI Digital Library）*.

Hadamard, J. S.（1945）, *AN ESSAY ON THE PSYCHOLOGY OF INVENTION IN THE MATHEMATICAL FIELD*, Princeton University Press.

JOHNSON-LAIRD, P, N. & WASON, P, C.（1970）, 「A Theoretical Analysis of Insight Into a Reasoning Task」, *COGNITIVE PSYCHOLOGY* 1, pp.134-148.

Joshi, A. & Serna, J. D.（2012）, Refractive index of a transparent liquid measured with a concave mirror, *PHYSICS EDUCATION 47(5)*, pp.559-562.

Lewis, C. C., Perry, R. R. & Hurd, J.（2009）, Improving mathematics instruction through lesson study: a theoretical model and North American case, *Journal of Mathematics teacher Education, 12*, pp.285-304.

Lucas, K. K. & Son, J. W.（2012）, Integrating Measurement and Computational Estimation in Geometry, *MATHEMATICS TEACHING IN THE MIDDLE SCHOOL Vol.18, No.5*, pp.308-311.

Pearle, P.（2012）, Simple derivation of the Lindblad equation, *EUROPEAN JOURNAL OF PHYSICS 33*, pp.805-822.

Poincaré, J. H. 著，吉田洋一 訳（1953）, 科学と方法，岩波書店（原著は SCIENCE ET MÉTHODE, 1901）.

Polya, G.（1945）, *How to Solve It : A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press.

[63] 本論文執筆にあたり，多数の文献を参考にさせて頂いた．しかし，本論文に関する知識の源を全て特定することは困難が多く，ここでは本文内で言及した文献のみを挙げるに留めている．

Shulman, L. S.（1986）, Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, 15(2), pp.4-14.

Shulman, L. S.（1987）, Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform, *Harvard Educational Review*, Vol. 57, No. 1, pp.1-23.

Skemp, R. R.（1987）, *The Psychology of Learning Mathematics（Expanded American Edition）*, Routledge. （First Published, 1971）

Stigler, J. & Hiebert, J.（1999）, *The teaching gap: Best idea from the world's teachers for improving education in the classroom*, Free Press.

Watanabe, T. , Takahashi,A., & Yoshida,M.（2008）, *Kyozaikenkyu*: A critical step for conducting effective lesson study and beyond, In F. Arbaugh & P. M. Taylor（Eds.）, *Inquiry into mathematics teacher education, Association of Mathematics Teacher Educators（AMTE）Monograph Series, Volume 5*, pp.131-142.

飯田慎司（2013），「算数・数学教師教育における教材研究の理論化に向けて」，日本数学教育学会 春季研究大会論文集 1, pp.191-194.

池田敏和（2014），中学校数学科 数学的思考に基づく教材研究のストラテジー24,明治図書出版.

池田敏和・坪田耕三・大野寛武・橋本吉彦（2002），「日本における算数・数学授業研究会の分析―第２回ポストICME9セミナーの報告―」，日本数学教育学会誌 84(2), pp.26-34.

石川実・宮川健（2012），「「手続きの説明」の学習における伝言ゲームの可能性：中学校図形領域における教授実験を通して」，日本数学教育学会誌 94 (11), pp.2-11.

磯田正美（1999），「関数領域のカリキュラム開発の課題と展望」，日本数学教育学会編 日数教 YEARBOOK 1998：算数・数学カリキュラムの改革へ, pp.203-220.

磯田正美（2008），「 教材開発からみた教材研究用語の内省的定式化に関する一考察：微積分の基本定理、数学中学校用第一類、Schooten の教科書を例に」，日本数学教育学会 第 41 回数学教育論文発表会論文集, pp.783-788.

岩崎秀樹（1992），「数学学習における「否定」の研究(1)」，日本数学教育学会 第 25 回数学教育論文発表会論文集, pp.13-18.

太田伸也（2013），「数学科授業における子どもの思考の把握から教材研究へ」，日本数学教育学会 春季研究大会論文集 1, pp.201-202.

岡崎正和（2013），「算数・数学科教材研究に含まれる教師の知識の様相について―数学教育学研究の課題にする為に―」，日本数学教育学会 春季研究大会論文集 1, pp.195-200.

小笠原喜康・柴山英樹（2008），「教材研究の方法論―知識観と学習観の問い直しから―」，日本教材学会 設立 20 周年記念論文集 「教材学」現状と展望 上巻, pp.51-63.

小野慶太郎（1982），人間形成における教材選択の視点，東洋館出版．
菅野栄光（2007），「What-If-Not 方略を用いた三角関数の発展的な指導―加法定理をもとにした諸公式の導出―」，日本数学教育学会誌．臨時増刊，総会特集号 89，p.311．
北俊夫（2008），「教材の活用」，日本教材学会 設立 20 周年記念論文集 「教材学」現状と展望 上巻，pp.170-180．
木谷隆人（2001），「関数の考えを育成する円周率の指導について―円周と直径の関係に注目させる円盤転がし実験の実施―」，日本数学教育学会誌 83(2)，pp.2-9．
小寺裕（2007），だから楽しい江戸の算額 和算絵馬「算額」の魅力がいっぱい，研成社．
古藤康弘（2008），「教材の種類・形態とその働き」，日本教材学会 設立 20 周年記念論文集 「教材学」現状と展望 上巻，pp.64-69．
小山正孝（2010），算数教育における数学的理解の過程モデルの研究，聖文新社．
佐々木力（2010），数学史，岩波書店．
佐々木徹郎（2013），「わが国の算数・数学教師教育における教材研究」，日本数学教育学会 春季研究大会論文集 1，pp.187-190．
佐島群巳（2008），「教材の歴史―教育改革と教材観の関係性―」，日本教材学会 設立 20 周年記念論文集 「教材学」現状と展望 上巻，pp.27-41．
佐藤俊太郎（1979），教材研究のすすめ―中学校数学―，明治図書出版．
塩見健之祐（1967），「数学教育研究の性格と領域に関する考察―数学教育学構想―」，日本数学教育会誌 数学教育学論究 第 14 巻，pp.1-9．
篠原助市（1935），教育辞典，宝文館（国立国会図書館デジタルコレクション，永続的識別子：info:ndljp/pid/1464471）
清水厚実（2008），「ⅱ 図書教材」，日本教材学会 設立 20 周年記念論文集 「教材学」現状と展望 上巻，pp.79-92．
杉山吉茂（1989），「数学教育学の学問的性格について」，学芸大数学教育研究 第 1 号（杉山吉茂（2012），杉山吉茂算数・数学教育論選集 確かな算数・数学教育をもとめて，東洋館出版，pp.12-22．収録）．
杉山吉茂（2006），「教材の新しい見方への挑戦を」，学芸大学数学教育研究 第 18 号（杉山吉茂（2012），杉山吉茂算数・数学教育論選集 確かな算数・数学教育をもとめて，東洋館出版，pp.321-342．収録）．
高橋陽一郎　他 33 名（2012），詳説 数学 A，啓林館．
辰野千壽（2008），「まえがき」，日本教材学会 設立 20 周年記念論文集 「教材学」現状と展望 上巻，pp.1-2．
中内敏夫（1978），教材と教具の理論，有斐閣（中内敏夫（1990），新版 教材と教具の理論 教育原論 2，あゆみ出版）．

中垣啓（2010）,命題的推論の理論(早稲田大学学術叢書), 早稲田大学出版部.
中川裕之（2005）,「類比に基づいて命題を発展させる教材研究―合同と相似といった特殊と一般の関係の活用―」, 日本数学教育学会 第38回数学教育論文発表会論文集, pp.541-546.
中込雄治（2012),「中学校 平面幾何・空間幾何の扱い」, 数学教育学会誌 臨時増刊 2012年度春季年会発表論文集，pp.49-51.
仲田紀夫・吉村啓（1982）, 数学科での教材開発（教職数学シリーズ 実践編5）, 共立出版.
中原忠男（1995）, 算数・数学教育における構成的アプローチの研究, 聖文社.
西田幾太郎（1980）, 思索と体験, 岩波書店.
日本教材学会編（2013）, 教材事典：教材研究の理論と実践, 東京堂出版.
日本数学教育学会編（2010）, 数学教育学研究ハンドブック, 東洋館出版, pp.2-8.
野口芳宏（2008）, 野口流 授業の作法, 学陽書房
橋本吉彦・坪田耕三・池田敏和（2003）, Lesson Study／今，なぜ授業研究か―算数授業の再構築―, 東洋館出版.
長谷川榮（2008）, 「教材学とは」, 日本教材学会 設立20周年記念論文集 「教材学」現状と展望 上巻, pp.9-21.
平林一榮（1987）, 数学教育の活動主義的展開, 東洋館出版.
福沢周亮（2008）, 「教材と心理」, 日本教材学会 設立20周年記念論文集 「教材学」現状と展望 上巻, pp.42-50.
藤井斉亮（2013）, 「理論構築の萌芽領域としての授業研究―Lewis（2009）の理論的モデルの検討―」, 日本数学教育学会 第 45 回数学教育論文発表会論文集, pp.31-40.
藤井斉亮（2014）, 「授業研究における学習指導案の検討過程に関する一考察」, 日本数学教育学会誌 96(10), pp.2-13.
増島清（1992）,「三平方の定理の指導について―斜めにおかれた線分の長さを求めることを通して―」, 日本数学教育学会誌 74, p.227.
宮川健（2011）, 「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格―わが国における「学」としての数学教育研究をめざして―」, 日本数学教育学会誌 数学教育学論究 94, pp. 37-68.
村田剛志・志村正道（1995),「平面幾何学定理の発見システム」, 情報処理学会研究報告 人工知能研究会報告 95(48)，pp.37-44.
文部科学省（2001）, 「教材機能別分類表（小学校・中学校）」, 文科初第７１８号, http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/kinou/011101/001.htm（最終閲覧日：2015年４月）.
文部科学省（2008）, 小学校学習指導要領解説 算数編, 東洋館出版.

文部科学省（2009），高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編, 実教出版.
山口満（2008），「教材とは」，日本教材学会 設立 20 周年記念論文集 「教材学」現状と展望 上巻, pp.22-26.

関連する自著論文

吉井貴寿（2011），算数・数学の知識獲得過程における否定利用の研究(1)―否定利用指導の基礎理論構築を目指して―, 日本数学教育学会 第44回数学教育論文発表会論文集, pp.999-1004.
吉井貴寿（2012），定理の導出に関する研究(2)―メネラウスの定理の導出―, 数学教育学会誌 臨時増刊 2012 年度秋季例会発表論文集, pp.48-50.
吉井貴寿（2012），算数・数学の知識獲得過程における否定利用の研究(2) ―「研究枠組み」と「具体からの学習に関する実践」―, 日本数学教育学会 第 45 回数学教育論文発表会論文集, pp.1085-1090.
吉井貴寿（2013），指導教材としての双曲線作図, 早稲田大学大学院教育学研究科紀要 別冊 21 号-1, pp.105-113.
吉井貴寿（2013），算数・数学の知識獲得過程における否定利用の研究(3) ―「推論なしの学習」に関する実践とその分析―, 日本数学教育学会 第 46 回秋期研究大会発表集録, pp.421-424.
吉井貴寿（2014），定理の導出に関する研究―三角形の内角の和―, 数学教育学会誌 臨時増刊 2014 年度春季年会発表論文集, pp.102-104.
吉井貴寿（2014），幾何学領域のカリキュラムに関する研究―三角形の決定条件を主軸としたスパイラルの構想―, 数学教育学会誌 臨時増刊 2014 年度春季年会発表論文集, pp.221-223.
吉井貴寿（2014），教材研究における否定利用, 日本数学教育学会誌 数学教育学論究 臨時増刊 第 47 回秋期研究大会特集号, pp.201-208.
渡邊公夫・吉井貴寿（2011），定理の導出に関する研究―三平方の定理の導出―, 数学教育学会誌 臨時増刊 2011 年度秋季例会発表論文集, pp.18-20.

おわりに

本論文執筆にあたり，指導教員の渡邊公夫先生からは「後輩の指針となる論文を期待している」という言葉をかけて頂いた．そこで，最後に本論文を執筆する上で大切にしていた考えについて言及しておこうと思う．それは，「温故知新」と「三個の例」である．「温故知新」に関しては，言わずと知れた四字熟語であろう．「論語」における孔子の言葉であり，師となる条件として，先人の思想や学問を研究するように述べたものである[64]．本研究では，教材研究という伝統的な営為を研究対象としている．そういった研究においては，故きを温ねずして，新しきを追い求めても上手くはいかない．歴史の中で培われてきた，先人の思想や知恵をよく学び，その上で新しきを探求することが大切であると考える．己を過信し，新しきものばかりを追い求めてはいけない．巨人（先人の積み重ねてきた知恵）の肩に乗り，更に先の世界を見ることで研究は進展するのである．一方で，昨今は情報が満ち溢れた社会となっている．先人の言葉も蓄積され溢れかえっており，我々は容易にそれらに触れることができる．このような社会においては，自身の考えを持たないがために，先人の提言に振り回されてしまう者も少なくない．後輩諸子には，この双方に気を付けて研究活動に励んでもらいたいものである[65]．続いて，「三個の例」についてだが，これは故事成語の「三顧の礼」をもじったもので，渡邊公夫先生の教えの一つである．「何かを理解したいとき」や「法則を見出したいとき」など，様々な場面で三個以上の具体例を思考する癖を付けると良い．それが抽象的な数学的知識であったり，数学教育学の理論であったりした場合には，これが実に有効に働く．言葉は冗談じみたものではあるが，我々の認知と深く関わる，実に有意義な言葉であると思われる．本論文においても，抽象的な理論を思考するにあたり，「先行研究」・「否定利用」・「導出」という三個の例を提示している．時に理論的な研究は具体性の乏しい空論となりかねない．故に，このような研究を進める方には，是非とも三個の例を思考してもらいたいものである．

本研究を振り返ると，教材研究の「結果だけでなく，そのプロセスを大事にしたい」という考えがある．この結果重視からプロセス重視へという考えは，昨今の学習指導においても言われているものであり，私が良く学び強く意識してきたものである．また，その結果として，本研究では教材研究の方法を研究対象とすることが行われている．かつて感銘を受けた，Freudenthal の「方法の対象化」という考えが，そこに表れていたように思う．そう考えてみると，結局の所，私も研究活動を通して，一学習者として学んでいたのだと気付かされる．本論文で引用・参考している文献以外にも，数多くの書

64 より正確には，「子曰，温故而知新，可以為師矣（子曰く，故きを温ねて新しきを知る，以って師と為るべし.）」である．

65 同じく，孔子の言葉を借りるとすれば，「子曰，学而不思則罔，思而不学則殆（子曰く，学びて思わざれば則ち罔し，思いて学ばざれば則ち殆し.）」ということである．

籍・論文や教えなどが私の研究の方向性に影響を与えていたと思われる．今後も日々の学びを肥やしにし，それが表れてくるような研究活動を続けていきたいものである．本論文執筆に至るまでに学ばせて頂いた，全ての方々と書物に感謝をし，ここに本論を閉じる．