早稲田大学大学院教育学研究科紀要　別冊　12号—1　2004年9月

シムソンの定理拡張における発想の分析

中　川　裕　之

1．本稿の目的とアプローチ方法

数学教育において，発見的学習法の必要性が訴えられてから長い年月が経っている。そして現在では，数学的な考え方を強調し，そのような視点で既習内容を振り返り，その日に学習する内容を発見するといったような指導が行われることが多い。

しかし，学問としての数学では，教室における数学と違い，必ずしもそのようにして新しい定理が発見されているわけではない。そうでない場合の方が多いはずである。そして，数学教育が学問としての数学を背景に持っているものであることから，数学教育において指導される考え方や発見するための方法も学問としての数学に通じるものでなくてはならないと考える。しかし，どのように改善するかが定かではない。

そこで，本稿では，シムソンの定理の拡張を，シムソンの定理を拡張して清宮の定理を発見した清宮俊雄の著書『幾何学—発見的研究法—』(1) を中心として分析し，そこから数学教育に対する示唆を得ることを試みる。

2．他の数学者によるシムソンの定理の拡張

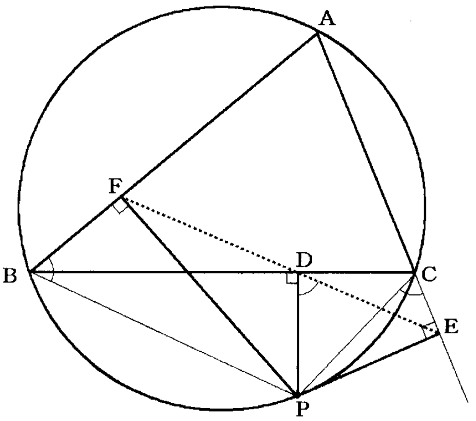
清宮は『幾何学—発見的研究法—』においてシムソンの定理の拡張を12通り示しているが(2)，そのうちの初めの3つは清宮の定理とは直接関係のない拡張である。そこでまず，それら3つの拡張の発想の分析を行うことにする。

まずは，カルノーによる［拡張1］であるが，この拡張はシムソンの定理の証明を分析することによって気付くことができる。よって，まずはシムソンの定理とその証明について述べる。

［シムソンの定理］

△ABCの外接円周上の点Pから辺BC，CA，ABにおろした垂線の足をD，E，Fとすると，3点D，E，Fは一直線上にある。

［証明］(3)



∠PDB = ∠PEC = 90°より4点P，E，C，Dは同一円周上にあるので，

∠PCE = ∠PDE …①

また，4点C，A，B，Pは同一円周上にあるので，∠PCE = ∠PBF …②

次に，∠PDB = ∠PFB = 90°より4点P, D,

F，Bは同一円周上にあるので

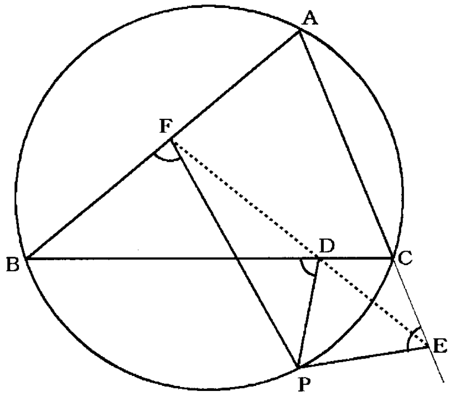
$\angle PBF + \angle PDF = 180^\circ$…③

①，②，③より $\angle PDE + \angle PDF = 180^\circ$ なので3点D，E，Fは一直線上にある。(Q.E.D)

証明を見てみると，$\angle PDB = \angle PEC = \angle PFB = 90^\circ$ という条件は，90° でなくとも，三つの角が等しいことさえ言えれば証明が成り立つことに気付く。そこで，直角を一般角に拡張しても結論が変わらないことから［拡張1］が発見されたと私は考える。

［拡張1］

△ABCの外接円周上の点Pから，BC，CA，ABと等しい角をなす直線PD，PE，PFをひき，BC，CA，ABと交わる点をD，E，Fとすると，3点D，E，Fは一直線上にある。



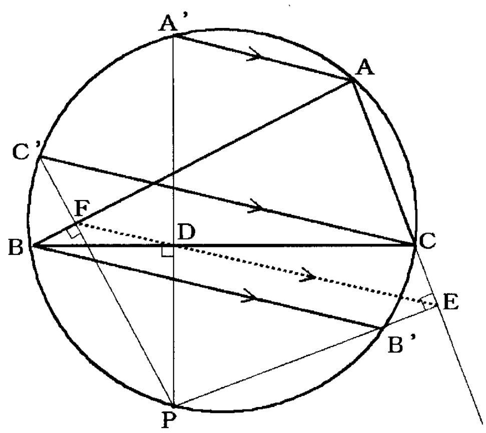
次にオーベルによる［拡張2］であるが，これはシムソンの定理の逆について考えるなかで発見されたと私は考える。シムソンの定理の逆は成り立つし，その一応の証明はシムソンの定理の証明を逆におっていけば可能である(4)。しかし，仮定や結論から得られる他の性質までもを含めて逆を考えることにすると，シムソンの定理の結論から次のようなものが導かれる。

次の図のように，点Pからそれぞれの辺におろす垂線を外接円にぶつかるまで延長し，△ABCとの外接円との交点をA'，B'，C'とすると，AA'//BB'//CC'//FDEとなる。

そして，3点F，D，Eが一直線上にあることはシムソンの定理の結論であるので，AA'//BB'//CC'を一つの条件として考え，そのことからシムソンの定理の結論が導けないかと考えることによって，次の［拡張2］が得られる。

［拡張2］

△ABCの外接円の弦AA'，BB'，CC'をAA'//BB'//CC'であるようにひく。円周上の任意の点をPとし，PA'，PB'，PC'がそれぞれBC，CA，ABと交わる点をD，E，Fとすると，3点D，E，Fは一直線上にある。



次に，AA'//BB'//CC'ならば $\angle PDB = \angle PEC = \angle PFB = 90^\circ$ であることを示すことを考えるのが自然な流れであろうが，これは証明できない。$\angle PDB = \angle PEC = \angle PFB$ は示せても，それらの角が 90° であることは示せないのである。そのことから，［拡張1］と［拡張2］は実は本質的には同じ拡張であったことが明らかになる。

しかし，［拡張2］のように仮定をAA'//BB'//CC'とすることによって，さらなる拡張を行う視点を得ることができる。平行な直線は無限遠点で交わるといわれる。この意味で平行な3

直線は無限遠点ではなく任意の1点で交わる3直線へと拡張することが可能となるのである。そのような拡張が［拡張3］である。

［拡張3］

△ABCと1点Oがある。直線OA, OB, OCが再び△ABCの外接円と出会う点をA' B' C' とし，外接円周上の点PとA' B' C' を結ぶ直線がBC, CA, ABと交わる点をD, E, Fとすると，3点D，E，Fは一直線上にある。

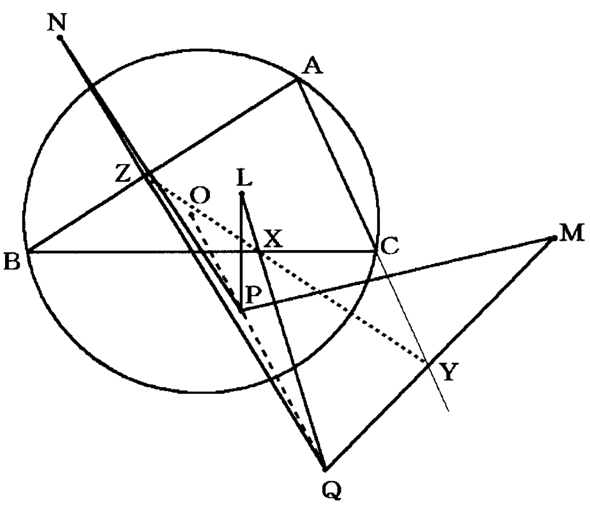
3．清宮の定理発見における発想の分析

清宮は清宮の定理をターナーの定理にならって得たと述べている。しかし，その詳細についてはどの著書にも述べられていない。そこで，シムソンの定理の［拡張4］として述べられているターナーの定理をまずはみていくことにする。

［拡張4］ターナーの定理

△ABCの外接円Oに関して互いに反点をなす2点をP，Qとし，3辺BC，CA，ABに関する点Pの対称点をそれぞれL，M，Nとする。3直線QL，QM，QNがBC，CA，ABと交わる点をX，Y，Zとすると，3点X，Y，Zは一直線上にある。

［証明］(5)

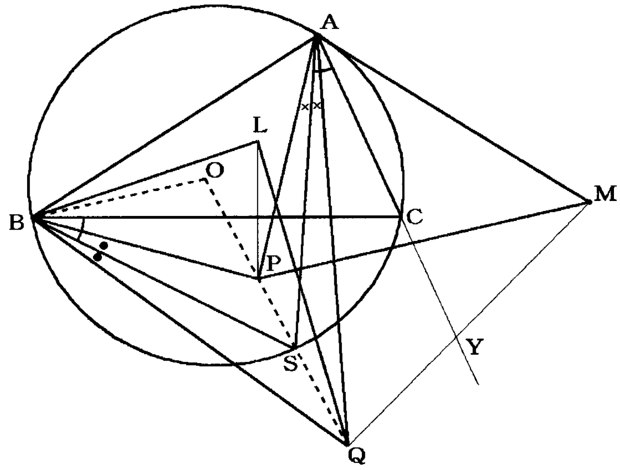


△ABCにおいてメネラウスの定理の逆を利用して3点X，Y，Zが一直線上にあることを示すことにする。そのためにまず以下のように線分比を面積比に変え，しかも，等しい角を持つ三角形の面積比を考えればよいように三角形を入れ換えておく。

$$\frac{AY}{YC}\times\frac{CX}{XB}\times\frac{BZ}{ZA}=\frac{\triangle QAM}{\triangle QCM}\times\frac{\triangle QCL}{\triangle QBL}\times\frac{\triangle QBN}{\triangle QAN}$$

$$=\frac{\triangle QAM}{\triangle QBL}\times\frac{\triangle QCL}{\triangle QAN}\times\frac{\triangle QBN}{\triangle QCM}$$

例えば，△QAMと△QBLは∠QAM＝∠QBLといった等しい角を持つ。まず，そのことを示すことにする。



2点P，Qは円Oに関して互いに反点であるから，OP・OQ＝(円Oの半径)^2＝OB^2

すると，方べきの定理の逆より直線OBは円BPQに点Bで接するので，接弦定理により

∠OBP＝∠OQB…①

また，線分PQと円Oの交点をSとすると，OB＝OSより△OBSは二等辺三角形となるので，∠OBS＝∠OSB…②

②－①より∠OBS－∠OBP＝∠OSB－∠OQB

∠PBS＝∠QBS…③（図の●）

次に，点Lは辺BCに対する点Pの対称点

であるから

$\angle PBL = 2\angle PBC$ …④，$BL = BP$ …⑤

③，④より $\angle QBL = \angle QBP + \angle PBL$

$= 2\angle SBP + 2\angle PBC$

$= 2(\angle SBP + \angle PBC)$

$= 2\angle SBC$ …⑥

また，$\angle QAM$ に関しても同様にすると

$\angle QAM = 2\angle SAC$ …⑦，$AM = AP$ …⑧

ここで，円周角の定理より

$\angle SBC = \angle SAC$ …⑨

⑥，⑦，⑨より　$\angle QBL = \angle QAM$

$\triangle QBL$ と $\triangle QAM$ について $\angle QBL = \angle QAM$ と二つの三角形が同じ大きさの角を持つことが分かったので，二つの三角形の面積比はその角を挟む二辺の積の比となり，さらに，⑤，⑧より以下のように変形できる。

$$\frac{\triangle QAM}{\triangle QBL}=\frac{AQ\cdot AM}{BQ\cdot BL}=\frac{AQ\cdot AP}{BQ\cdot BP}$$

他の三角形でも同様に

$$\frac{\triangle QCL}{\triangle QAN}=\frac{CQ\cdot CP}{AQ\cdot AP},\ \frac{\triangle QBN}{\triangle QCM}=\frac{BQ\cdot BP}{CQ\cdot CP}$$

となるので，最初の式に代入すると，

$$\frac{AY}{YC}\times\frac{CX}{XB}\times\frac{BZ}{ZA}=\frac{\triangle QAM}{\triangle QBL}\times\frac{\triangle QCL}{\triangle QAN}\times\frac{\triangle QBN}{\triangle QCM}$$

$$=\frac{AQ\cdot AP}{BQ\cdot BP}\times\frac{CQ\cdot CP}{AQ\cdot AP}\times\frac{BQ\cdot BP}{CQ\cdot CP}=1$$

となり，3点X，Y，Zが一直線上にあることが示せた。　(Q.E.D)

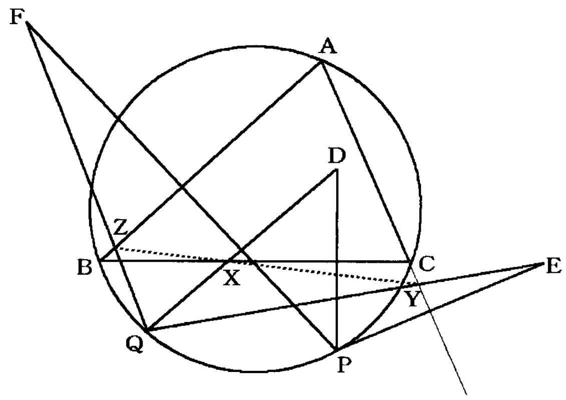
まず，シムソンの定理とターナーの定理を比較することによって，ターナーの拡張方法について分析する。まず，シムソンの定理では1点Pだけであったものをターナーの定理では2点P，Qに反転という知識を利用して増やしている。確かに，反点をなす2点が一致するのは円周上であり，そのときターナーの定理はシムソンの定理となるので，両定理は一般と特殊の関係になっている。また，垂線をひくという操作を，点Pと線対称な点をとり，点Qと結ぶという操作に変えているという点も新しいが，この点でも，互いに反点である2点が一致したときにはPL, PM, PNはQL, QM, QNと一致し，BC，CA，ABにおろした垂線となる。

しかし，証明ではメネラウスの定理の逆を利用している点や等しい角を持つ三角形の面積比はその角を挟む辺の積の比に等しいことを利用するなど，これまでの拡張とはかなり違った発想で思考が進んでいる。

次にターナーの定理と清宮の定理を比較してみる。

[拡張5] 清宮の定理

△ABCの外接円周上の2点をP，Qとし，点PのBC，CA，ABに関する対称点をそれぞれD，E，Fとする。QD，QE，QFとBC，CA，ABとの交点をそれぞれX，Y，Zとすると，3点X，Y，Zは一直線上にある。



[証明]

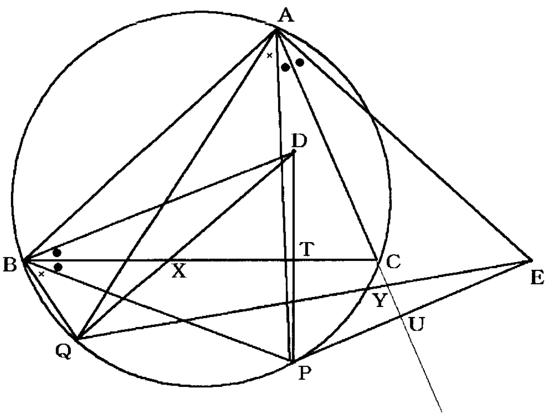
ターナーの定理のときと同様に，△ABCにおいてメネラウスの定理の逆を利用して3点X，Y，Zが一直線上にあることを示すことにする。

$$\frac{AY}{YC}\times\frac{CX}{XB}\times\frac{BZ}{ZA}=\frac{\triangle QAE}{\triangle QCE}\times\frac{\triangle QCD}{\triangle QBD}\times\frac{\triangle QBF}{\triangle QAF}$$

$$=\frac{\triangle QAE}{\triangle QBD}\times\frac{\triangle QCD}{\triangle QAF}\times\frac{\triangle QBF}{\triangle QCE}$$

まず，点Dは辺BCに対する点Pの対称点であるから，

$\angle$PBC $=\angle$DBC…②，かつBP $=$ BD…③



よって，$\angle$QBD $=\angle$QBP $+\angle$PBD

$=\angle$QBP $+ 2\angle$PBC…④

同様に，$\angle$PAC $=\angle$EAC…⑥

かつAP $=$ AE…⑦

よって，$\angle$QAE $=\angle$QAP $+\angle$PAE

$=\angle$QAP $+ 2\angle$PAC…⑧

ここで，円周角の定理より

$\angle$QBP $=\angle$QAP…⑨，$\angle$PBC $=\angle$PAC…⑩

④，⑧，⑨，⑩より　$\angle$QBD $=\angle$QAE

よって，③，⑦より

$$\frac{\triangle QAE}{\triangle QBD}=\frac{AQ\cdot AE}{BQ\cdot BD}=\frac{AQ\cdot AP}{BQ\cdot BP}$$

他の三角形でも同様に

$$\frac{\triangle QCD}{\triangle QAF}=\frac{CQ\cdot CP}{AQ\cdot AP},\ \frac{\triangle QBF}{\triangle QCE}=\frac{BQ\cdot BP}{CQ\cdot CP}$$

となるので，最初の式に代入すると，

$$\frac{AY}{YC}\times\frac{CX}{XB}\times\frac{BZ}{ZA}=\frac{\triangle QAE}{\triangle QBD}\times\frac{\triangle QCD}{\triangle QAF}\times\frac{\triangle QBF}{\triangle QCE}$$

$$=\frac{AQ\cdot AP}{BQ\cdot BP}\times\frac{CQ\cdot CP}{AQ\cdot AP}\times\frac{BQ\cdot BP}{CQ\cdot CP}=1$$

となり，3点X，Y，Zが一直線上にあることが示せた。　(Q.E.D)

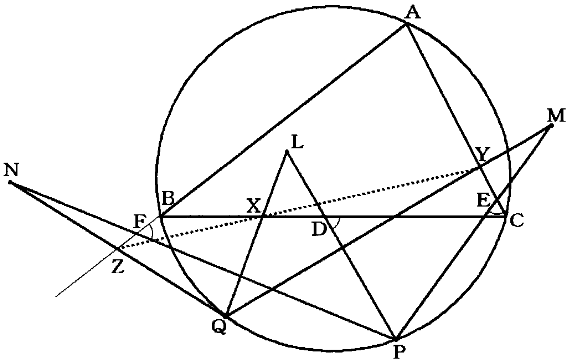
このようにほとんどターナーの定理と同様に証明することが可能となることから，清宮がターナーの定理の線対称な点をとったり，反点の性質である OP × OQ = r^2 を満たすような2点P，Qをとるというような表面的な操作以上に証明方法から多くの示唆を得ていることがわかる。つまり，表面的な操作やひらめきではなく，定理の証明方法から多くの示唆を得て清宮の定理を発見したことがうかがい知れるのである。

さらに，ターナーの定理の証明においては，互いに反点をなす2点という円周上にない点を扱っているが，証明においては線分PQと円Oの交点をSとし，その点において円周角の定理を利用して角を移していた。そのことから考えると，2点P，Qを初めから円周上の点とした清宮の定理のほうが素直であり，理解しやすいものとなっている。

ここまでターナーの定理とそれにならった清宮の定理をみてきたが，これらの拡張はある点でこれまでの拡張から後退している。それは[拡張1]と[拡張2]において，垂線を等角をなす直線に拡張していたことをここでは利用していない点である。したがって，その視点による拡張が可能となるはずであり，清宮も同様に考えて[拡張6]を発見したと思われる。

[拡張6]

△ABCの外接円周上に2点をP，Qとする。BC，CA，AB上に点D，E，Fを拡張1の場合のように，PD，PE，PFがそれぞれBC，CA， ABと等角をなすようにとる。PD, PE, PFの上にそれぞれ点L, M, NをDL：PL = EM：PM = FN：PN（点L, M, Nは同時に線分PD, PE, PFの上，またはそれらの延長上にとる）であるようにとり，QL, QM, QNがそれぞれBC, CA, ABと交わる点をX, Y, Zとすると，3点X, Y, Zは一直線上にある。



4．ターナーの定理と清宮の定理の関係の探求

清宮はこの後もさらに様々なシムソンの定理の拡張を行っているが，その目的に関して，『幾何学―発見的研究法―』のなかでは何も述べていない。しかし，その4年後に出版された清宮の著書『基礎数学選書7 初等幾何学』[6] のなかでは，前者の著書に示している［拡張9］～［拡張11］を同様の方法で行う際に，「ターナーの定理と清宮の定理の関係を最終的に明らかにするのが目的である」[7] と述べている。

ターナーの定理も清宮の定理もシムソンの定理の拡張にあたる。そういった意味で二つの定理の関係は明らかであろう。しかし，ターナーの定理にならって清宮の定理が得られるといった思考をこれまで追ってきたが，確かに二つの定理が直接的にはどういった位置関係にあるのかが明確には今のところみえてこない。そこで清宮は両定理をさらに拡張し，二つの定理を特殊に持つ一般的な定理を得ようとしているのである[8]。

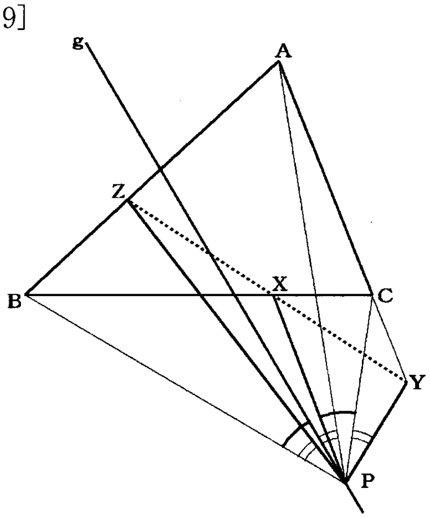
最初に，ターナーの定理の拡張についてみていく。まず，ターナーの定理の仮定を「円Oに関して互いに反点をなす2点をP, Qとし，点Pの円Oの弦BCに関する対称点をLとすると，QLは∠BQCに関してOQと等角共役線である」という性質を利用して，次のように書きかえている。

［ターナーの定理の書き換え］

△ABCの外接円の中心Oを通る直線gの上の1点をQとする。∠BQCに関する直線OQの等角共役線QLとBCの交点をX, ∠CQAに関する直線OQの等角共役線QMとCAの交点をY, ∠AQBに関する直線OQの等角共役線QNとABの交点をZとすると，3点X, Y, Zは一直線上にある。

しかし，清宮はこの定理を証明せずに，この定理の拡張をすぐに行い，直線gが△ABCの外心を通るという条件を省いて次の拡張を得ている。ただし，すでに上の定理において点Pが不要となり，存在しておらず点Qのみが残っているので，［拡張9］ではその点Qを点Pと表示している。

［拡張9］



△ABCと直線gとがある。gの上の任意の点をPとする。∠BPC，∠CPA，∠APBに関する直線gの等角共役線が，それぞれBC，CA，ABと交わる3点をX，Y，Zは一直線上にある。

ここで清宮はすぐに直線gが△ABCの外心を通るという条件を省いているが，この発想がどのようにして生まれてきたのかについては何も述べていない。しかし，清宮は『幾何学—発見的研究法—』の別の章で拡張の方法について述べるなかで，別証明を考え付くことによって，前の証明では必要だと考えられていた条件が別証明では利用されず，実は不要な条件であったことに気付くという例をいくつか示している(9)。そのことから考えると，まず，等角共役線で書き換えたターナーの定理の証明を行い，その証明を行うなかで，直線gが△ABCの外心を通るという条件を使わずに証明ができ，その条件が不要であることに気付いたのではないか，と推測できる。

次に清宮は清宮の定理の拡張を行っている。これも「2点P，Qと直線lがあるとき，点Pの直線lに対する対称点をDとし，直線QDと直線lの交点をX，線分PQの垂直二等分線と直線lとの交点をX' とすると，4点P，Q，X，X' は同一円周上にある」という性質を利用して，次のように書き換えている。

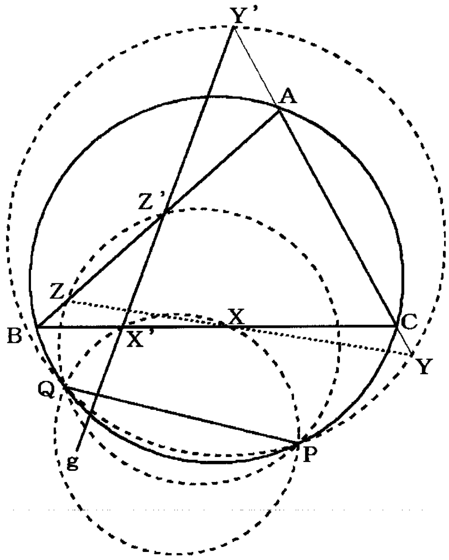
[清宮の定理の書き換え]

△ABCの外接円周上の2点をP，Qとし，線分PQの垂直二等分線gがBC，CA，ABと交わる点をX'，Y'，Z' とする。円PQX'，PQY'，PQZ' が再びBC，CA，ABと交わる点をX，Y，Zとすると，3点X，Y，Zは一直線上にある。

そして，ここでも直線gが線分PQの垂直二等分線であるという条件を省いて，次の［拡張10］を得ている。ここで条件を省いた発想も［拡張9］と同じであると推測される。

［拡張10］

△ABCの外接円周上の2点をP，Qとし，1直線gがBC，CA，ABと交わる点をX'，Y'，Z' とする。円PQX'，PQY'，PQZ' が再びBC，CA，ABと交わる点をX，Y，Zとすると，3点X，Y，Zは一直線上にある。



そして，清宮は次の［拡張11］を得るために，かなり大胆な発想で拡張を行っている。［拡張10］の定理で円周上にあるという条件から方べきの定理が媒介することによって導かれる $O_1C \cdot O_1B = O_1X \cdot O_1X'$ などの条件が成り立つことを仮定にすることで拡張を行ったのである。

［拡張11］

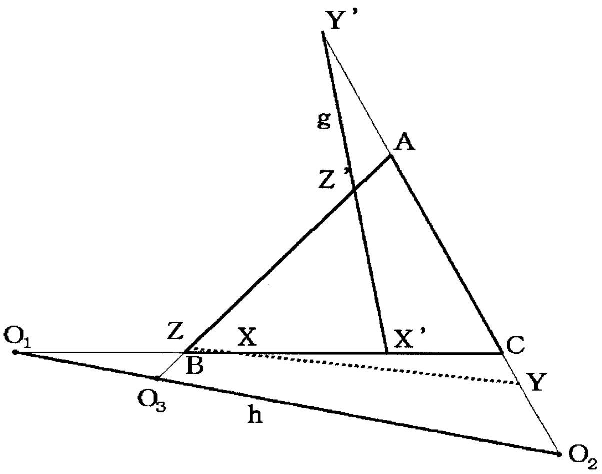
△ABCと2直線g，hとがある。gがBC，CA，ABと交わる点をX'，Y'，Z' とし，hがBC，CA，ABと交わる点をO_1，O_2，O_3とする。直線BC，CA，ABの上にそれぞれ点X，Y，Zを

$$O_1C \cdot O_1B = O_1X \cdot O_1X'$$

$O_2C \cdot O_2A = O_2Y \cdot O_2Y'$

$O_3A \cdot O_3B = O_3Z \cdot O_3Z'$

（ただし，点 O_1 は同時に線分 BC，XX' の上または同時にその延長上とする。O_2，O_3 についても同様）にとると，3点 X，Y，Z は一直線上にある。



上の定理を読んでわかるように，この定理が成り立つためには，O_1，O_2，O_3 が共線であるといった条件が必要であり，この直線 h がターナーの定理と清宮の定理を，さらにシムソンの定理までもを結びつける要素となるのである。

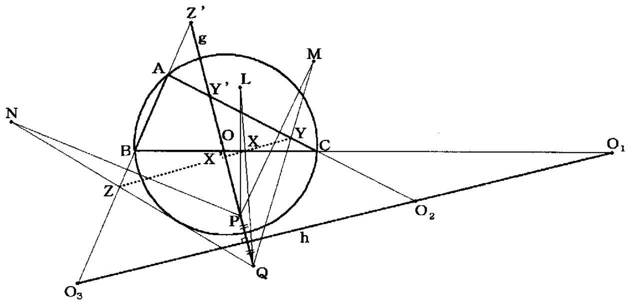
［拡張 10］をさらに拡張したのであるから［拡張 10］と［拡張 11］の関係はわかりやすい。しかし，［拡張 9］との，つまりはターナーの定理との関係はこのままでは見えてこない。よって，ターナーの定理を［拡張 11］を利用して証明することを清宮は行っている。(10)

［証明］

直線 OPQ を直線 g とし，この直線 g と直線 BC，CA，AB の交点を X'，Y'，Z' とする。また，線分 PQ の垂直二等分線を h とし，この直線 h と直線 BC，CA，AB の交点をそれぞれ O_1，O_2，O_3 とする。

まず，点 P，Q が直線 h に対して対称点であることより

$\angle O_3QP = \angle O_3PQ$ …①，$O_3P = O_3Q$ …②



次に，［拡張 10］を作るために仮定を書き換えた視点より，ここでも2点 P，Q と直線 AB があり，点 P の直線 AB に対する対称点が N であるので，直線 QN と直線 AB の交点である Z と，線分 PQ の垂直二等分線と直線 AB との交点である O_3，そして，2点 P，Q の4点は同一円周上にある。

このことから円周角の定理と①より

$$\begin{aligned}\angle O_3QZ &= \angle O_3QP - \angle PQZ \\ &= \angle O_3PQ - \angle PO_3Z \\ &= \angle O_3PQ - \angle PO_3Z' \\ &= \angle QZ'O_3\end{aligned}$$

すると，接弦定理の逆を利用することで，直線 O_3Q は円 ZQZ' に点 Q で接していることがわかるので，方べきの定理より

$O_3Q^2 = O_3Z \times O_3Z'$ …③

また，②より△ O_3PQ は二等辺三角形で，底辺 PQ の延長上に点 O があることより，

$O_3O^2 - O_3Q^2 = OP \times OQ$ …④

ここで円 O の半径を r とすると，点 O_3 の円 O に対する方べきの値より

$O_3A \times O_3B = O_3O^2 - r^2$ …⑤

④，⑤より

$$\begin{aligned}O_3Q^2 &= O_3O^2 - OP \times OQ = O_3O^2 - r^2 \\ &= O_3A \times O_3B \cdots⑥\end{aligned}$$

③，⑥より　$O_3A \times O_3B = O_3Z \times O_3Z'$

同様に

$O_1C \cdot O_1B = O_1X \cdot O_1X'$

$O_2C \cdot O_2A = O_2Y \cdot O_2Y'$

すると，［拡張 11］より X，Y，Z は一直線上にある。　(Q.E.D)

この証明から何がわかるかというと，清宮が述べるには，［拡張 9］が［拡張 11］の特殊な場合であるというだけでなく，［拡張 11］において，直線 h が△ABC の外接円と交わらない場合が［拡張 9］であるということがわかるのである(11)。また，そのような視点で［拡張 10］を見直してみると，直線 h とはもともと直線 PQ のことであり，直線 h が△ABC の外接円に 2 点で交わる場合が［拡張 10］なのである。

さらに，これまで削除してきた条件をここに加え，直線 g を△ABC の外心 O を通る直線とし，h を g に垂直な直線とする。そのとき，直線 h が円の割線となる場合が清宮の定理であり，直線 h が円の接線となる場合が交点が 1 つになるときであるのでシムソンの定理であり，そして，上の証明のように直線 h が円と出会わない場合がターナーの定理となるのである。

ここまでくれば，3 つの定理の関係が明瞭になるであろう。つまり，清宮は三つの定理の関係を明瞭に理解するためにさらなる拡張を行っていったのである。

5．結論と教育への示唆

まず，2. で行った［拡張 1］～［拡張 3］の分析の結果，証明過程を振り返り，必要十分条件を探求したり，その逆について考えたり，特殊と一般の関係を利用することによって拡張が行われていることがわかった。このことは，学問としての数学においても発見の方法として一定の型が存在することを示すものであった。よって，現在行われているような考え方や方法を強調するといった指導がある程度は有効であることが判明した。

次に 3. で行った［拡張 4］～［拡張 6］の分析の結果，数学的な考え方を強調する授業を行う場合は，それを発見した考え方を解釈して示すだけでなく，その考え方を使って他の定理や性質を発見することが考え方の理解を深めるのに有効であるという示唆が得られた。

現在，指導すべき内容が発見されたり，考え出されたりした視点や方法を教師が提示することはあっても，それらを定理を読んで解釈してみようといった活動がなされることはほとんど行われない。また，例え行ったとしても，すぐに使えるような場面の提示まではなされないであろう。そのような活動を行った方がよいということは，理解を深めるといった点だけでなく，それらの考え方の有用性を生徒に認識させるためにも有効なはずである。そのような活動の必要性がこの分析から明らかになったと考える。

また，その発見における発想や考え方の多くは表面的な定理の文章や操作のなかに現れるのではなく，それを成り立たせている根拠やそれを正当化している証明方法のなかに現れるものであったということも重要なことであると考える。生徒は表面的な特徴にとらわれやすいが，発見を行うためにはもっと深い部分にこそ注目すべきであり，そのような観点から生徒に証明に注目する必要性，さらには論証を行う必要性

なども示すことができると考える。

最後の4．で行った［拡張9］～［拡張11］の分析では，拡張する意味，価値について示唆を得ることができた。無闇矢鱈に拡張した結果，出てきたものが無意味であったり，その役割がわかりづらいものであっては，価値や拡張する意義が見えなくなってしまう危険性がある。これは発見的に学習を進める上では重要な問題であろう。その問題に対して，清宮は拡張を行う目的の1つとして，一般から特殊なものの関係を探求することを示している。このような視点は現在の数学教育には欠けている考え方であろう。

以上の示唆を受けて，今後の課題としては，既存の定理が発見された発想を解釈したり，それを適用して新しい定理を発見したり，それらを拡張することによって既知の定理の関係が見えてくるような教材の開発や授業展開の仕方の創造を，なるだけ現状の学習指導要領の範囲内で行っていくことが挙げられると考える。そして，それらが可能となれば，授業における数学や数学的活動が学問としての数学に近づくようになるはずである。

注・引用参考文献

(1) 清宮俊雄『モノグラフ 幾何学―発見的研究法―』（改訂版）科学新興社，1988

(2) 清宮俊雄『モノグラフ 幾何学―発見的研究法―』（改訂版）科学新興新社，1988，pp54 ～ 67

(3) 載せた証明は清宮のものとは少し変えてある。それは証明において清宮は∠PDC＝∠PEC＝90°としているが，そのままでは［拡張1］を発見することができないので，私は∠PDB＝∠PEC＝90°とすることにした。

(4) 厳密な逆の証明に関しては，小平邦彦『幾何の面白さ』岩波書店，1985，pp. 158 ～ 164 を参照してください。

(5) 清宮は証明において△QBNと△QCMについて詳しく述べ，他のものは「同様に」で済ませている。それに対して私は△QAMと△QBLについて詳しく述べた。それは角が等しいことを証明するのに清宮の示す証明のままでは，ターナーの定理においては円に内接する四角形の性質を利用しているのに対して，それにならって行っているはずの清宮の定理の証明では円周角の定理を利用しており，その関連やどの点をならったのかが不明確になる危険性があるためである。それを回避するために，私は両方で円周角の定理を利用して証明する三角形を選んで詳しく述べることにした。

(6) 清宮俊雄『基礎数学選書7 初等幾何学』裳華房，1972

(7) 清宮俊雄『基礎数学選書7 初等幾何学』裳華房，1972，p. 219

(8) 目に見えない定理間の関係について清宮は次の二つがあると述べている。それはAという定理に対してB，CがともにAの拡張であるという場合と，Aという定理に対してB，CがともにAの特別な場合というものである。どちらの場合もB，Cの間には，表向きは何等の関係も認められない。そして，この段階ですでにターナーの定理と清宮の定理の前者の関係は明らかであろう。よって，清宮は次に後者の関係の探求へと向かっているのである。

(9) 清宮俊雄『モノグラフ 幾何学―発見的研究法―』（改訂版）科学新興新社，1988，p. 113 ～ 115

(10) 清宮俊雄『基礎数学選書7 初等幾何学』裳華房，1972，p. 221

(11) 清宮俊雄『基礎数学選書7 初等幾何学』裳華房，1972，p. 221