指導教材としての双曲線作図

吉　井　貴　寿

1．はじめに

学校で行われる数学学習・指導の内容は多くの制約の下に存在している。その多くは数学的繋がり・数学教育の研究成果・教師の様々な実践経験などに基づくものであり，これらを受けて学習指導要領による内容規定も存在している。しかし，中にはそのような根拠を持たない制約も存在する。それらは慣例に基づくものであり，我々が無意識にかけてしまっている制約である。そういった根拠の不明確な制約を取り払う事で，指導の可能性は大きく広がる。本稿では，特に双曲線関数に関する内容に関してこれを実践し，一つの新しい可能性を提示する。

本研究で取り外す制約は主に次の二つである。どちらも明確に定められている制約ではないが，大多数の教員が暗にとらわれてしまっている制約であると言える。

(1) 規定された学習段階を超えた学習内容に関して言及することは好ましくない

(2) 関数は式表現を中心として学習・理解を行うべきである

ここで，上記 (1)・(2) に関して簡単な例を示しておこう。まず (1) に関する内容について，例えば「中学校段階で複素数・双曲線関数・余弦定理（いずれも高等学校で学習する内容）の話題を持ち出す事は好ましくない」という考えがこれである。いずれも，中学校で学習する内容である二次方程式・関数概念・三平方の定理などと密接に関わっているものであるが，これらについて言及することはまず行われていない。勿論，言及すべきか否かという判断は指導目標により左右されるものであるから，言及しない事が悪いというわけではない。しかし，少なからずこのような考えが制約として機能してしまっている事は事実である。これは，学習指導要領が上限規定であった際（2003年12月に廃止）の名残であり，慣例に基づく制約の代表的なものであると言える。次に (2) については，例えば「式で表すことができない関数には言及すべきでない」という考え方や，「『～を満たす関数を求めよ』という発問で関数の式を答えさせること」が往々にしてあるということ，また「関数の式から表やグラフを作成する活動の比重が重い」などが挙げられる。これらに関しては，少なくとも関数概念の獲得・理解という観点からみれば誤りであろう（勿論，指導目標を入学試験等の問題解決に特化して設定すれば話は別であるが）。しかし，このような制約は現在の微積分（解析）を中心とした指導内容の構成や演習問題・入学試験などから生じ，広く浸透しているものである。

以上より，本稿では上述した制約 (1)・(2) を外した際に考えられる，双曲線関数に関連した指導

教材の提案を行う。より具体的には，三角形の決定条件をもとにした双曲線関数の作図法の提示を行い（本稿3章），それにより関数概念の理解深化や三平方の定理の導出，双曲線関数の理解深化などを狙った新たな指導の可能性が開かれる事を示していく（本稿4章）。

２．先行研究

本研究は教材研究の領域に属するものであり，特に制約の取り外しに着目し，双曲線関数に関連した新たな指導の可能性を模索するものである。そこで，本章1節ではまず教材研究領域そのものに関する先行研究に言及し，本研究の研究手法や分野内での位置づけを明確化する。そして，続く2節では本稿内容に関連する具体的内容領域として双曲線関数に関する先行研究に言及し，本研究の位置づけや独創性を明確化する。

2.1. 教材研究の研究手法に関する先行研究

教材研究と呼ばれる類の先行研究は多数存在し，その多くは独自開発した教材・教具・問題を提案する形のものである。しかし，このような形で提案される数多くの教材は必ずしも全てが新規性のある，独創的なものであるとは限らない。中には既に他者が発見済みの数学的関係を再発見しただけのものや，他者が提案済みの教材・教具を少し異なる形で実現しただけのものも少なくない。では，何をもって独創性のある正しい教材研究と呼び得るのだろうか。この問題に関して磯田（2008）[(1)]は教材開発研究そのものを研究対象とし，次のようにその性格を規定している。

> 「もとの題材のおかれた文脈から離れ（脱文脈化），その題材でなしえる数学的活動内容のもつ意味や価値を吟味し，教育目的との一致を前提に再文脈化する行為」を，本稿では教材開発と呼ぶ

つまり，数学教育における教材開発研究の独創性は開発された教材の有する数学的性質の独創性のみによって評価されるわけではなく，それがどのように再文脈化されているか（どのような意味や価値が見出され付加されているか）まで含めて評価されるべきものなのである。また，上記の提言は教材開発研究の一つの研究手法を示すものでもある。実際，磯田氏はその論文内で上記の規定に基づき教材開発研究を行い，複数の歴史的題材からいくつかの現代的教材を開発している。

本稿で行われる教材開発研究は，上記の磯田氏による歴史的題材を分析することによる教材開発とは異なっている。しかし，題材に対し脱文脈化と再文脈化を行い，現代の教育活動における有用性を付加している点では同じであり，教材開発研究の一つとして十分に適当なものであると考えられる。実際，本稿の主題となっている「双曲線関数の作図」という問題は，歴史的に全く考えられてこなかったものというわけではない。過去には様々な曲線の作図が考えられ，様々な手法や器具でそれを実現しようとする試みが存在した[(2)]。故に，本研究の独創性をその点のみに見出すことは不適であり，それがどのように再文脈化されているかという点まで含めて一つの独創性と考えるべきものである。

その他の本研究に関わりの深い先行研究として，杉山（2006）による「教材の新しい見方への挑戦

を」[3]が存在する。これは前提としてどのような既有知識を設定するかにより，同一命題であっても様々な方法で導出し得る事を示し，そのような数学的な教材開発研究の重要性を述べるものである。筆者はこのような考えに従い，これまで「三平方の定理の導出」[4]や「メネラウスの定理の導出」[5]に関する研究を行ってきた。本研究はその「三平方の定理の導出」に関する研究に深く関わるものであり，本稿で行っている制約の取り外しも（条件の変更という点で）既有知識の設定変更に類するものである。故に，本研究も他の関連研究同様，指導の改良を主張するものではなく，その可能性の広がりを示すものとなっている。

2.2. 具体的内容領域に関する先行研究

本研究で主軸となる具体的内容領域として，ここでは双曲線関数に関する先行研究を概観する。ここで，このような具体的内容に関する研究は，数学・教育学の両側面から行われており，世界的に数多く存在する。また，その中には内容の重複も多く，これらを整理するにはある程度観点を決める必要がある。そこで，本節では研究動向の把握を目的とし，特に我が国のカリキュラムを意識しながらこれを進めることとする。

双曲線関数に関する研究の歴史は古く，アポロニウスの「円錐曲線論」(B.C. 200 年頃）に代表されるように，その性質や他の関数との関わりを論じるものが主流である（例えば，引用・参考文献[6]など)。また，その作図に関しては少なくとも我が国では過去にも指導内容として位置づけられた事がなく，教育学的な研究が非常に少ない現状がある。とは言え，勿論作図方法について全く考えられてこなかったわけではない。過去には作図方法や作図ツールに関する研究が複数行われており（下図1参照)，現代でもテクノロジーを利用してその過程を再現する試みなどが行われている。

このような研究の多くは，双曲線関数の持つ「2 定点からの距離の差が一定」という性質に着目したものが主流であり，学習内容で言えば軌跡の学習に続く箇所に位置づけられるものである。その点

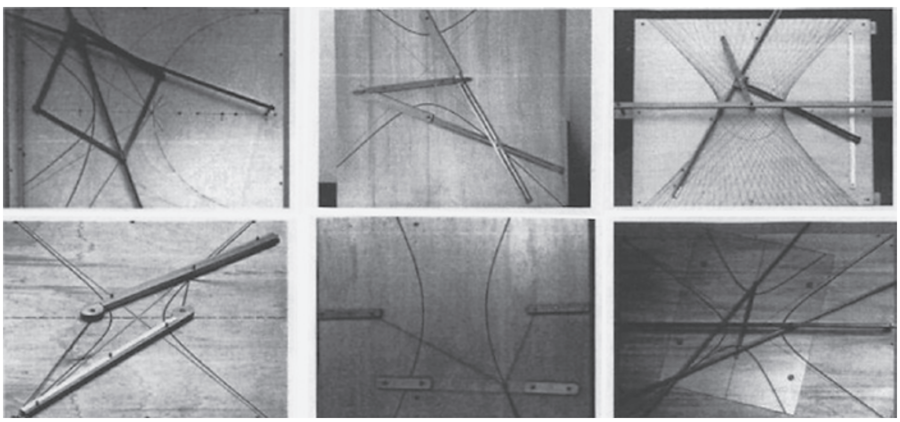

図 1　様々な双曲線の作図ツール

写真は引用・参考文献[2]より引用

で，本稿の提示する作図方法はそれらの先行研究と数学的な基本構造を共有しながらもアプローチを異にしており，軌跡を未習の状態でも理解可能なものとなっている。また，一般にグラフの作図は曲線を描くことを目的とするため，双曲線関数を作図する場合には特殊な器具を用いることとなる。しかし，本稿で提示する方法は曲線そのものではなく，通過する点のプロットを目的としているため，作図過程において特殊な器具を用いず，定規とコンパスのみでその概形を描いている点も特徴的であると言える。

３．指導教材としての双曲線作図

本章では，指導教材として双曲線の作図を利用することを提案する。本章内容は我が国の数学科指導内容を前提としており，教材の配置や前後の学習内容等はそれに従うものとする。

3.1. 三角形の決定条件をもとにした双曲線作図

我が国の中等学校数学科の内容は三角形の決定条件を経験的に真と認められる公理とし，そこから幾何学的内容の学習をスタートしている。また，渡邊・吉井（2011）(4)が示しているように，この三角形の決定条件を関数的に見ることで，そこから三平方の定理を導出することができる。本節内容ではこの「三角形の決定条件を関数的に見る」という事に着目し，その考えを基にした双曲線関数の作図法を提示する。

まず，三角形の決定条件の１つとして「二辺夾角」と呼ばれるものがある。これは，二辺とその間の角が決まれば三角形が一意に決まるという意味であるから，言い換えれば二辺とその間の角の大きさによって，他の辺や角の大きさも定まるという事である。このことを関数的に眺めれば，三角形の辺や角の大きさを三変数関数と見ることができる。これを数学的に書き直すと次のようになる。

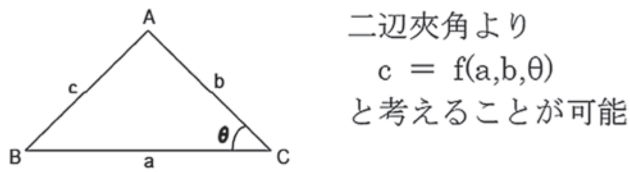

図２　二辺夾角を関数的に考える

ここで，変数の数を減らすために一変数（角度 θ ）を固定（90°として）して考える。つまり，特殊な場合として直角三角形を思考対象とするわけである。また，さらに一辺 a を基準長１と考えれば，これは b の長さによって c が決まる関数関係（$c = g(b)$）と考えられる（これらの関数の式は，三平方の定理や余弦定理を学ぶことで記述可能となるが，関数関係は式が記述できなくとも理解可能である）。これを図示すれば以下の通りである。

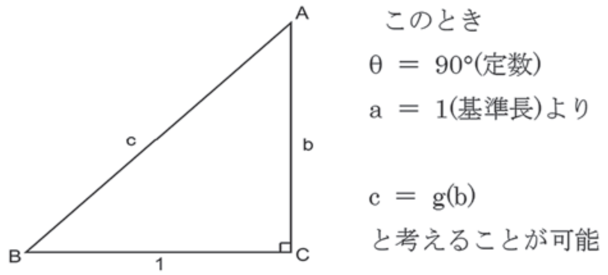

図３　直角三角形に潜む関数関係

そこで，この関数関係をグラフで表現することを考えよう。多くの場合，関数のグラフは式から表を作成し，その数値を x − y 平面上にプロットすることで作成される。それ故に，多くの者が関数のグラフは式や表をもとにして作成するもの，あるいはそうでなければ作成できないものと考えている節がある。しかし，関数のグラフを作成する方法は必ずしも式や表に依存したものだけではない。つまり，式や表はわからなくとも，関数関係をグラフの形で可視化することができるのである。例えば，今回の場合，基準長 1 を y 軸上にとり，x（= b）を独立変数と考える。すると x（= b）の値に応じて，(0,0)，(0,1)，(b,0) を結ぶ直角三角形が決定される。つまり，図 3 における頂点 A を（b,0）に，頂点 B を（0,1）に，頂点 C を原点に対応させるわけである。このとき，グラフを描くためには各 x の値に対して y = c となる点をプロットしていけば良い。ここで，c は辺 AB の長さであり，これは (b,0) から（0,1）までの距離に等しい。従って，コンパスを利用し，この長さを x = b 上に移してくればグラフの通過する各点（b,c）が得られることになる。実際に，方眼用紙の 1 マスを 1 として，これを実践すれば図 4 のようになる。

このように点をプロットしていくと，この関数のグラフは既習の比例（y = x）のグラフに非常に近い形をしている事がわかる。しかし，その概形は明らかに比例とは異なり，特に $0 \leqq x \leqq 7$ の範囲では，y = x からのずれも大きいように見える。そこで，次に方眼用紙の 1 マスを 0.5 として，同様の作図を行ってみよう。その結果は図 5 の通りである。

この結果を見ると，x の値が小さい程 y = x から離れる傾向が見てとれる。これは，元の直角三角形の辺長に関する関係を考えても理解できることである。ここで，中学校数学科の内容を考えると，このグラフは放物線のグラフにも似たものと考えられる。しかし，少し調べればこのグラフが放物線のグラフでないことも直ちに確認できる。そこで，この初出のグラフの概形をより詳しく調べてみることにしよう。例えば，更に細かく x の値をとることも可能であり，方眼用紙の 1 マスを 0.2 とすれば図 6 が得られる。

このように，x を細かくとり対応する点をプロットしていくことで，考察対象となっている関数の概形が見えてくる。このグラフは双曲線関数（$x^2 - y^2 = -1$）の一部であり，x が十分に大きいときにほぼ一致してしまう y = x のグラフはその漸近線に対応している。故に，この作図活動は関数関係

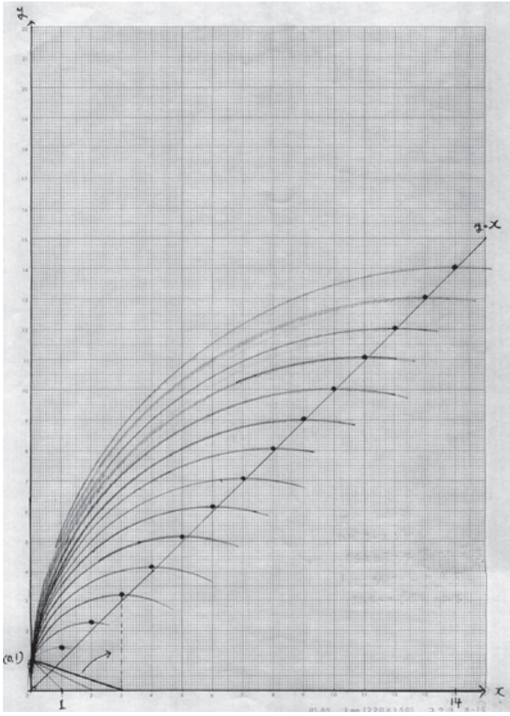

図４　グラフ作図の実践（1 マス = 1）

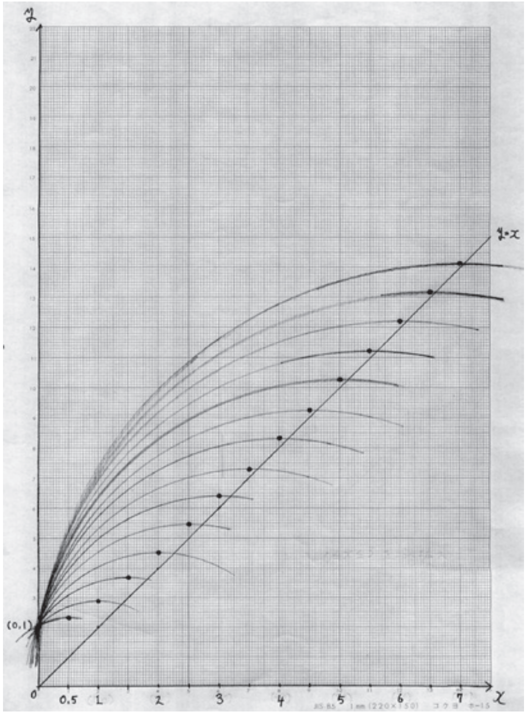

図５　グラフ作図の実践（1 マス = 0.5）

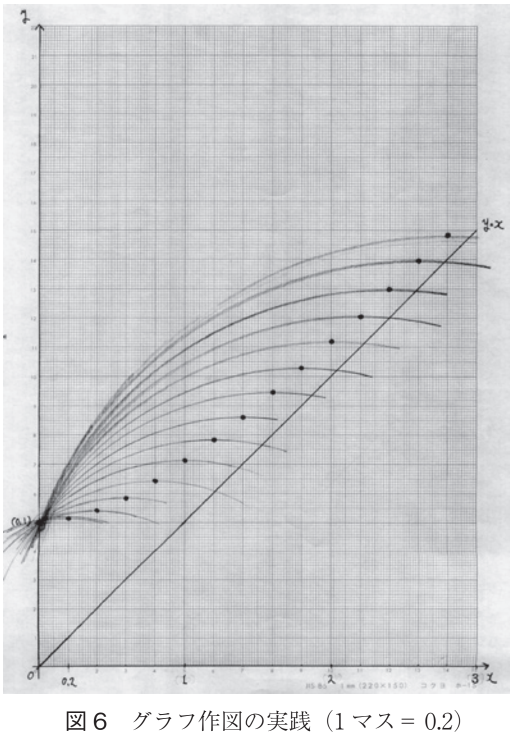

図６　グラフ作図の実践（1 マス = 0.2）

の理解だけでなく，双曲線関数を学ぶための素地にもなっているのである。このように，本教材は様々な教育的意義・可能性を有しているわけであるが，これらに関しては 4 章でより詳細に述べることとする。

3.2.　双曲線関数の一般形作図

3.1. で提示した方法で作図したグラフは式 $x^2 - y^2 = -1$（$x \geqq 0, y \geqq 0$）で表されるものであった。そこで本節では，高等学校数学科で学習される双曲線関数の一般形である，式 $x^2 - y^2 = 1$ のグラフを作図する方法を示す。そのために，条件を少し変え図 3 の直角三角形において $b = h(c)$ という関数 h を考える。ここで，この関数 h は「斜辺と他の一辺が決まれば直角三角形が一意に定まる」ことを関数的に見ること

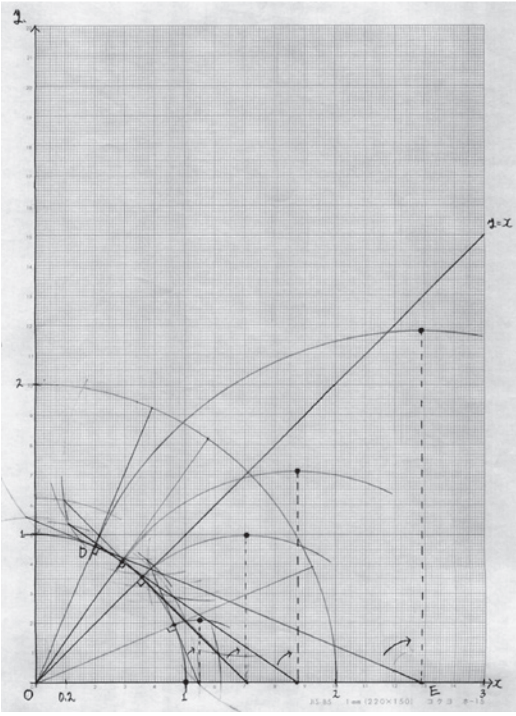

図７　一般形のグラフ作図の解説（1 マス＝ 0.2）

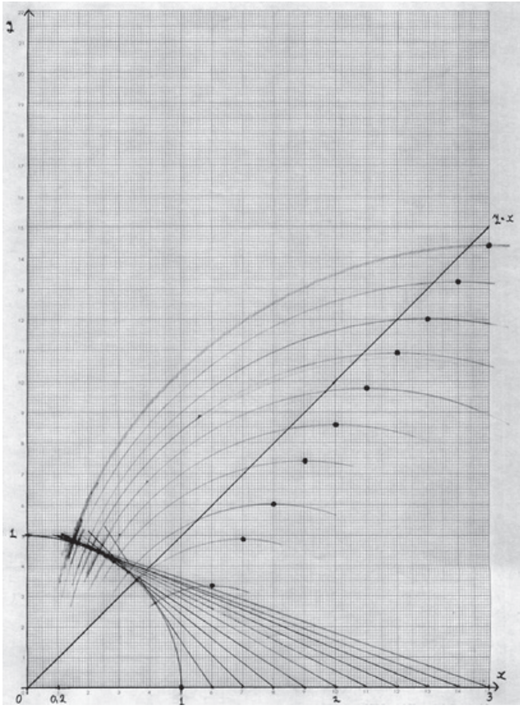

図８　一般形のグラフ作図の実践（1 マス＝ 0.2）

で得られるものである（厳密に言えば，この決定条件は学校数学で必ずしも扱われる内容ではない。しかし，直角三角形の合同条件として学習される内容から直ちに理解可能なものである。）。本節では，この関数 h の作図を考える。まず，x − y 平面の原点 O を中心に半径 1 の円を描き，円周上の任意の点 D を定める。次に，D を通る接線を作図し，その接線と x 軸の交点を E とする。すると，O,D,E を結ぶ直角三角形が考えられ，この直角三角形 ODE は図 3 の直角三角形 BCA と対応していることがわかる。このとき E の x 座標は既に直角三角形の斜辺長 c となっているので，後は長さ b を y 軸方向に取ればグラフの通過点（c,b）が得られることになる。ここで，b は辺 DE の長さに等しいので，これをコンパスで x ＝ c 上に移すことは容易である。このようにして，点をプロットしたものが図 7 である。

図 7 では接線作図のために，いくつかの直接グラフに関係のない線（半径 2 の円など）も描き込んでいる。そこで，次の図 8 ではこれらの線を極力排した状態でグラフの概形を見てみよう。

ここで，作図の元になっている直角三角形の関数関係を考えると，今回作図している関数 h は 3.1. で作図した関数 g の逆関数になっていることがわかる。実際，図 8 のグラフは 3.1. で作図した図 6 のグラフを y ＝ x に対し線対称に移したものになっている。

発展として，∠ DOE を θ とおいて，この作図過程を振り返ってみる。すると，三角関数を用いる事で c ＝ 1/cos θ，b ＝ tan θ と表せることがわかる（0 ≦ θ ≦ 90°）。ここで，θ を変化させると

（c,b）は $x^2 - y^2 = 1$ 上を動くので，このことから $(1/\cos\theta)^2 - \tan^2\theta = 1$（$0 \leqq \theta \leqq 90°$）の成立がわかる。実際，この関係式を整理すれば $1 + \tan^2\theta = (1/\cos\theta)^2$ となり，これは高等学校数学科で「三角関数の相互関係」として学ばれる内容に対応している。

４．教材としての可能性と有用性

本章では３章で提示した双曲線関数作図の教材としての可能性や有用性を整理する。まず，3.1. で提示した作図方法であるが，これは 3.1. でも述べているように三角形の決定条件を関数的に見ることで成り立つものである。従って，本教材により「三角形の決定条件の確認」や「関数的見方・考え方の涵養」が狙えると考えられる。さらに言えば，3.1. の冒頭でも述べたが，このように三角形の決定条件を関数的に見る事は三平方の定理の導出にも繋がるものである。故に，本教材は三平方の定理を学ぶ際の導入教材としても機能し得るであろう。また，このように中学校数学科の内容と深く関わる本教材であるが，そこで扱っている関数関係は高等学校で学習する双曲線関数を用いて表されるものである。そのため，この作図を通した学習活動は後の学習の素地となり，後に学ぶ双曲線関数の理解にも寄与するであろう。また，中学校段階でこのような一次関数でも二次関数でもない関数のグラフを知ることは，関数関係及びそのグラフに対する理解を深めることにも繋がると考えられる。続いて，3.2. では双曲線関数の一般形を作図したわけであるが，その過程を振り返ると「逆関数の考え」や「双曲線関数と三角関数の繋がり」などを考察することができた。現行の指導では軌跡の内容の延長として学習され，あまり深くその性質を探求されていない双曲線関数であるが，このように他の内容と関連付けて双曲線を学べる点も本教材の良さである。さらに言えば，現行の指導では双曲線のグラフはイメージのみで学習され，正しくその概形が理解されていない節もある。例えば，漸近線は極限の収束先として学習される内容であるが，実際に作図されたグラフを見ると，予想以上に早く漸近線に近づき，すぐに区別が付かなくなってしまう事がわかる。新たな内容を学ぶ際は，このように経験や具体を伴って数学の知識を獲得していくことが重要であり，それを可能とする点に本教材の有用性がある。

５．まとめ

本稿では，双曲線作図に関する教材提案を行い，制約の取り外しに着目した教材研究により指導の可能性が大きく広がる事を示した。また，そのために教材の有する可能性・有用性を潰してしまわぬよう，あえて具体的な指導場面は限定せずにその提案を終えている。従って，本教材を実際の指導場面で利用する際には，各場面に合わせてより具体的な指導計画を立てる必要がある。故に，この点において本教材研究を未完と捉える事も可能である。しかし，これ（指導計画）に関しては，目の前の学習者の現状を考慮した上で指導目標を設定し，それに応じて教材を選定することで作成されるべきものである。そのため，教材提案がその具体性を増すにつれて，その普遍性は減ぜざるをえない。故に，教材研究としての提案は本稿でも十分に達成されていると考え，ここにまとめさせて頂いた。今

後，現場教員の方々が各指導場面に応じて教材選定を行う際に，一つの選択肢として本教材を意識・利用して頂ければ幸いである。

最後に，本稿では紙数の関係から4章内容を詳述できなかった点が心残りである。本教材の作成にあたって，「制約にとらわれない教材開発という考え」が存在したことは1章から述べてきた通りであるが，それ以外にも「素地指導や振り返りにより内容の接続や理解深化を狙うスパイラル型学習指導の考え」や「様々な具体からの抽象による概念形成を目指す否定（non A）利用の考え」，「数学的活動を通し経験や具体を伴って学習を進める事を重視する考え」などが存在した。故に，可能性や有用性を語る際，本来であればこれらの考えにも言及し，よりその良さが伝わるようにすべきであったと考えている。また，これらの考えを駆使する事で類似の教材研究は多数可能であると予想される。よって，「教材の持つ可能性・有用性の詳述」及び「類似研究の推進」を今後の課題とし，本論を閉じたいと思う。

引用・参考文献

⑴　磯田　正美，『教材開発からみた教材研究用語の内省的定式化に関する一考察：微積分の基本定理，数学中学校用第一類，Schooten の教科書を例に』，数学教育論文発表会論文集 41，pp. 783-788, 2008.

⑵　磯田　正美・Maria G. Bartolini Bussi・田端　毅・讃岐　勝，『曲線の辞典：性質・歴史・作図法』，共立出版，2009.

⑶　杉山　吉茂，『教材の新しい見方への挑戦を』，学芸大学数学教育研究 第 18 号，pp. 1-17, 2006.

⑷　渡邊　公夫・吉井　貴寿，『定理の導出に関する研究―三平方の定理の導出―』，2011 年度 数学教育学会秋季例会 発表論文集，pp. 18-20, 2011.

⑸　吉井　貴寿，『定理の導出に関する研究（2）―メネラウスの定理の導出―』，2012年度 秋季例会発表論文集，pp. 48-50, 2012.

⑹　片岡　宏信，『二次曲線の統一的理解』，日本数学教育学会誌 84（5），pp. 29-34, 2002.

⑺　Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, New York, NY: John Wiley & Sons Inc, 1968.

⑻　杉山　吉茂，『確かな算数・数学教育をもとめて』，東洋館出版社，2012.

⑼　J. S. ブルーナー（著），鈴木　祥蔵・佐藤　三郎（訳），『教育の過程』，岩波書店，1984.

⑽　J. S. Bruner, *The Process of Education*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1960.

⑾　J. S. Bruner, *Toward a Theory of Instruction*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1966.

⑿　吉井　貴寿，『算数・数学の知識獲得過程における否定利用の研究―具体からの学習に焦点を絞って―』，早稲田大学大学院 修士論文，2012.

＊上掲の著書・論文以外にも，学習指導要領（過去のものを含む）や中学校・高等学校数学科の検定教科書（各社）など複数の著作を参考にさせて頂きましたが，紙数の関係から割愛させて頂きます。