早稲田大学大学院教育学研究科

博　士　論　文　概　要

論　文　題　目

A Study on Renormalization Theory of Weak Solutions for Nonlinear Partial Differential Equations

非線形偏微分方程式における弱解の再正規化理論についての研究

申　請　者

Satoru Takagi

高木　悟

2005年5月

本論文では，非線形偏微分方程式に対する不変多様体と，弱解の再正規化理論についての研究を行っている．一般に，非有界領域上の放物型半線形偏微分方程式の解の漸近挙動を解析する際，有界領域の場合に得られている従来の理論は適用できない．その理由は，有界領域上の放物型半線形偏微分方程式では，その線形化方程式の離散スペクトルの差（ギャップ）を利用して有限次元不変多様体を構成できるが，非有界領域の場合は連続スペクトルが現れるため，ギャップを利用した不変多様体の構成は出来ない．本論文では，非有界領域の場合の不変多様体の構成について研究した．

次に，超線形（super linear）な増大度を持つ流量（フラックス）を含む保存型偏微分方程式では，初期値を L^1 クラスまで拡げると流量関数の局所積分性が一般に保障されないため，超関数の意味でも解は定義出来ない．一方，非線形半群理論により超線形的増大度を持つ流量を含む保存型方程式は，L^1 空間において解が構成できる．本論文では，再正規化理論を用いて，この解の特徴付けに取り組んでいる．また，より汎用性のある解の概念を導入し，それと再正規化解との同値性を示すことにより数理生物学等に現れるモデル，特に緩和系モデルの現象解明に応用している．

本論文は次の５つの章から構成されている．

第１章　導入
（問題背景と再正規化理論の有用性について）
第２章　局所中心不安定多様体について
（非有界領域上の放物型発展方程式の不変多様体の構成）
第３章　再正規化解について
（退化楕円型偏微分方程式の再正規化解の一意性）
第４章　再正規化消散解について
（保存則の再正規化消散解と再正規化エントロピー解との同値性）
第５章　２階方程式の再正規化消散解について
（退化放物型偏微分方程式の再正規化消散解と再正規化エントロピー解との同値性）

第２章，第４章の研究成果は小林和夫教授との共同研究により，第３章の研究成果は小林和夫教授と上原健氏との共同研究により，それぞれ得られたものである．

第１章では，導入としてこれから扱う非線形偏微分方程式，特に保存則について解説し，通常の滑らか（微分可能）な解だけでは物理現象を解析する上で不十分であることや，それによって弱い意味での解（弱解）の概念を導入することが必要であるということを，例や図を交えて述べている．一方で，解の概念を拡げる（弱める）ことにより，解の一意性が期待できなくなる．実際，保存則を含む退化放物型偏微分方程式では，無数の弱解が存在する例が挙げられる．そのために，物理的にも意味を持つ条件（エントロピー条件）を課すことにより，複数ある弱解の中から唯一選び出した解（エントロピー解）や，それと同値な消散解の定義なども紹介している．さらに，エントロピー解や消散解の概念だけでは解析できない状況，例えば非有界領域上の超線形的増大度を持つ流量を含む偏微分方程式において，この状況を克服する再正規化理論の成り立ちについても述べ，この種の問題における再正規化理論の有用性を述べている．

第２章では，Banach 空間における時間に依存する放物型発展方程式の局所中心不安定多様体の構成について述べている．領域が有界の場合は線形化方程式のスペクトルが離散的に現れるため，この差（ギャップ）を利用して不変多様体を構築することができるが，領域が非有界の場合はスペクトルが連続的に現れるため従来の方法が適用できない．その状況にでも適用しうる理論が本章で述べられている．

第２章の主定理　X, Y, Z を Banach 空間とし，X, Y におけるノルムをそれぞれ $\|\cdot\|$, $|\cdot|$ とする．X, Y は Z に連続的に埋め込まれているとするが，X は Y に埋め込まれている必要はないとする．$\{S(t)\,;\, t \geq 0\}$ を Z の C_0 半群と

し，$f : \mathbf{R} \times X \to Y$ を C^k $(k \geq 1)$ の非線形写像とする．発展方程式の代わりに積分方程式

$$(1) \qquad u(t) \;=\; S(t)\, x_0 + \int_0^t S(t-s)\, f(s, u(s))\, ds, \qquad t \geq 0.$$

を考える．さらに，次の仮定 (H1)-(H3) を満たすとする．

(H1) $Z = Z_1 \oplus Z_2$, $\dim Z_1 < \infty$, $S(t)\, P_i = P_i\, S(t)$, $i = 1, 2$．ここに，P_i は Z から Z_i 上への連続射影である．

(H2) $Z_1 \subset X \times Y$, $S(t)$ の X への制限も X 上の C_0 半群を形成する．

(H3) 次を満たす定数 $\alpha, \beta, \gamma, \eta, M, M^*$ が存在する：$\alpha > 0,\ \beta + (k-1)\,\eta > 0,$ $\eta < 0,\ 0 \leq \gamma < 1,\ M \geq 1,\ M^* \geq 0,$

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\eta t}\, S(t)\, P_1\, y \right\| &\leq M\, e^{\alpha t}\, \left| y \right| && \text{for} \quad t \leq 0,\ y \in Y, \\ \left\| e^{-\eta t}\, S(t)\, P_2\, x \right\| &\leq M\, e^{-\beta t}\, \left\| x \right\| && \text{for} \quad t \geq 0,\ x \in X, \\ \left\| e^{-\eta t}\, S(t)\, P_2\, y \right\| &\leq (M\, t^{-\gamma} + M^*)\, e^{-\beta t}\, \left| y \right| && \text{for} \quad t > 0,\ y \in Y. \end{aligned}$$

また，$f : \mathbf{R} \times X \to Y$ は次の条件を満たすとする：

(a) 各 $t \in \mathbf{R}$ に対して，$f(t, \cdot)$ は C^k-級．各 $x \in X$ に対して，$f(\cdot, x)$ は連続．

(b) $t \in \mathbf{R}$ に対して，$f(t, 0) = 0$, $Df(t, 0) = 0$．ここに，$Df(t, x)$ は $f(t, x)$ の x に関する微分である．

(c) $\|x\| \to 0$ のとき t に一様で，$f(t, x) \to 0$ in Y, $Df(t, x) \to 0$ in $\mathcal{B}(X, Y)$．

このとき，原点の近傍 $U_1 \subset X_1$, $U_2 \subset X_2$ と，次の性質を満たす連続関数 $h : \mathbf{R} \times U_1 \to U_2$ が存在する：

(M1) 集合 $\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbf{R}} \mathcal{M}(t)$, $\mathcal{M}(t) := \left\{ (t, \xi + h(t, \xi))\ ;\ \xi \in U_1 \right\}$ は (1) の局所不変多様体である．つまり，各 $x_0 \in \mathcal{M}(0)$ に対して，次を満たすような $T_0,\ T_1 \in (0, \infty]$ が存在する．(1) の解 u が $(-T_0, T_1)$ 上で一意に存在し，すべての $t \in (-T_0, T_1)$ に対して，$u(t) \in \mathcal{M}(t)$ が成り立つ．

(M2) 各 $t \in \mathbf{R}$ に対して，$h(t,\cdot)$ は C^k-級で，$h(t,0)=0$, $Dh(t,0)=0$.

(M3) 各 $x_0 \in U_1 \times U_2$ に対して，(1) はある区間 $[0,T)$ 上で一意解を持つ．さらに $T=\infty$ のとき，$\mathcal{M}$ 上の (1) の一意解 $\widetilde{u}$ が存在して，次を満たす：

$$\sup_{t>0} e^{-\eta t} \left\| u(t) - \widetilde{u}(t) \right\| < \infty.$$

この理論により，非有界領域における不変多様体の構成が可能となる．実際，Kobayasi [J. Differential Equations **179** (2002), 195–212] によりこの理論が応用され，全空間上で定義された非線形熱方程式

$$u_t = \triangle u + F(u) \quad \text{in} \ \ [1,\infty) \times \mathbf{R}^N$$

における不変多様体が構成され，原点近くの解の漸近挙動が研究されている．

第３章では，$\mathbf{R}^N$ の任意の開集合 Ω 上の大域的増大の無い移流項を持つ退化楕円型方程式の境界値問題

$$\text{(P)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} \beta(u) - \operatorname{div} a(\cdot,u,\nabla u) & \ni & f & \text{in} \ \ \Omega \\ u & = & 0 & \text{on} \ \ \partial\Omega \end{array} \right.$$

における再正規化解の一意性について述べている．存在性については，Kobayasi [Academic Studies, Series of Math., School of Edu., Waseda Univ. **47** (1998), 29–46] によりすでに得られているので，本章では一意性を示すことに重点を置いている．

第３章の主定理　$1<p<N$ とし，次の (H1)-(H6) を満たすと仮定する：

(H1) 極大単調グラフ β は次を満たす：$0 \in \beta(0)$, $D(\beta)=\mathbf{R}$,

$$\limsup_{r \to 0} \frac{|r|^q}{|\beta^0(r)|} < \infty.$$

ここに，β^0 は β の minimal section を表す.

(H2) $a : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ は Carathéodory 関数で，次を満たす $\lambda > 0$ と $h \in H^q_\beta$ が存在する：ほとんどすべての $x \in \Omega$ と任意の $r \in \mathbf{R}$，$\xi \in \mathbf{R}^N$

に対して

$$\langle a(x,r,\xi),\xi\rangle \ \geq \ \lambda\left|\xi\right|^{p}+\langle h(r),\xi\rangle\,.$$

ここに，H^q_β は

$$\limsup_{r\to 0}\frac{\left|h(r)\right|^{q'}}{\left|\beta^0(r)\right|} \ < \ \infty \qquad \left(q'=\frac{q}{q-1}\right)$$

を満たす連続関数 $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^N$ の集合，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbf{R}^N$ の内積をそれぞれ表す.

(H3) 次を満たす $\mathbf{R}^+$ 上の非負非減少関数 d，ω と $b_0\in L^1(\Omega)$ が存在する：$\int_0^1\omega(s)^{-1}ds=\infty$，ほとんどすべての $x\in\Omega$ と任意の $r,s\in\mathbf{R}$，$\xi,\eta\in\mathbf{R}^N$ $(\xi\neq\eta)$ に対して

$$\begin{aligned}&\langle a(x,r,\xi)-a(x,s,\eta),\xi-\eta\rangle\\ &\quad > \ -d(|r|+|s|)\,\omega(|r-s|)\left(b_0(x)+\left|\xi\right|^p+\left|\eta\right|^p+\left|\beta^0(s)\right|+\left|\beta^0(r)\right|\right).\end{aligned}$$

(H4) 次を満たす $\Lambda\geq 0$ と $a_0\in L^{p'}(\Omega)$，$h\in H^q_\beta$ が存在する：ほとんどすべての $x\in\Omega$ と任意の $r\in\mathbf{R}$，$\xi,\eta\in\mathbf{R}^N$ に対して

$$\langle a(x,r,\xi),\eta\rangle \ \leq \ \Lambda\left(a_0(x)+\rho(r)^{1/p'}+\left|\xi\right|^{p-1}\right)\left|\eta\right|+\langle h(r),\eta\rangle\,.$$

ここに，

$$p_1:=\frac{N(p-1)}{N-p},\ p':=\frac{p}{p-1},\ \rho(r):=\begin{cases}\left|\beta^0(r)\right| & (\left|r\right|\leq 1),\\ \max\left\{\left|\beta^0(r)\right|,\left|r\right|^{p_1}\right\} & (\left|r\right|>1).\end{cases}$$

(H5) 各 $k>0$ に対して，次を満たす定数 $\mu\geq 0$ と $\widetilde{p}\geq 0$ が存在する：$\widetilde{p}<p_2$，ほとんどすべての $x\in\Omega$ と任意の $\xi,\eta\in\mathbf{R}^N$，$r,s\in\mathbf{R}$ $(\left|r-s\right|\leq k)$ に対して

$$\begin{aligned}&\langle a(x,r,\xi)-a(x,s,\eta),\xi-\eta\rangle\\ &\quad \geq \ -\mu\left((1+\left|\xi\right|+\left|\eta\right|)^{\widetilde{p}}+\left|\beta^0(r)\right|+\left|\beta^0(s)\right|\right)\end{aligned}$$

(H6) $\beta(r)\cap\beta(s)\neq\emptyset$ ならば，ほとんどすべての x と任意の ξ に対して

$$a(x,r,\xi)=a(x,s,\xi).$$

u を近似理論により得られた特殊解とし，$\widehat{u}$ を (P) の任意の再正規化解とする．そのとき，$u=\widehat{u}$ である．

本章で得られた結果は，未解決問題である p-Laplace 方程式の一意性問題に適用している．

第４章では，保存則の初期値問題

$$\text{(CP)}\qquad \begin{cases} u_t+\operatorname{div}\mathbf{F}(u) = f & \text{in}\quad (0,T)\times\mathbf{R}^N \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{in}\quad \mathbf{R}^N \end{cases}$$

における再正規化消散解を導入し，Bénilan et al. [Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **29** (2000), 313–327] による再正規化エントロピー解との同値性について述べている．保存則の流量関数が大域的増大性を持つ場合，Portilheiro [Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **133** (2003), 1193–1207] によりエントロピー解と消散解の同値性が示されているが，超線形的増大度を持つ流量関数に対しても適用できるよう，再正規化理論を用いて拡張している．エントロピー解に対して再正規化エントロピー解があるように，消散解に対して再正規化消散解という新しい解の概念が導入されている．再正規化消散解の概念は，直接存在性や一意性を示すのは困難なものの，特に緩和系の解を解析する上で再正規化エントロピー解よりも解析しやすいという利点がある．したがって，これらの解の同値性を示すことにより，すでに得られている再正規化エントロピー解の存在性，一意性の結果を利用して，解の特徴付けをすることが出来る．

第４章の主定理　$u \in L^1(Q)$ とし，ほとんどすべての $(t,x) \in Q$ に対して $u^*(t,x) < \infty$，$u_*(t,x) > -\infty$ とする．そのとき，u が (CP) の再正規化エントロピー解であることと，u が (CP) の再正規化消散解であることは同値である.

この結果は，化学反応等を表す緩和系

$$\begin{cases} w_t^\varepsilon + \displaystyle\sum_{i=1}^N \omega_i V_{k,i}\, w_{x_i}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^N (h_{k,i}(w^\varepsilon) - z_i^\varepsilon), \\ \\ (z_i^\varepsilon)_t - V_{k,i}\,(z_i^\varepsilon)_{x_i} = \dfrac{1}{\varepsilon}(h_{k,i}(w^\varepsilon) - z_i^\varepsilon), \quad i = 1, \cdots, N,\ \varepsilon > 0 \end{cases}$$

に対して適用され，より広いクラスのデータでの考察が可能となる．

第５章では，退化放物型偏微分方程式の初期値問題

$$\text{(CP2)} \qquad \begin{cases} u_t + \operatorname{div}\mathbf{F}(u) = \operatorname{div}(A(u)\nabla u) + f & \text{in} \quad (0,T)\times\mathbf{R}^N \\ \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{in} \quad \mathbf{R}^N \end{cases}$$

における再正規化消散解の構成と，Bendahmane et al. [SIAM J. Math. Anal. **36** (2004), 405–422] による再正規化エントロピー解との同値性について述べている．２階微分の項があるため，Dirac mass の微分が現れるが，試験関数との合成積を巧みに利用することにより解析が可能となる．また，右辺第１項が退化した場合は保存則となり，第４章で得られた結果を含んでいる．

第５章の主定理　$u \in L^\infty(0,T;L^1(\mathbf{R}^N))$ とする．そのとき，u が (CP2) の再正規化エントロピー解であることと，u が (CP2) の再正規化消散解であることは同値である.

この理論の応用例として，多孔質媒質内のトレーサーと呼ばれる化学的あるいは生物学的種の進化を記述する緩和系

$$\begin{cases} w_t^\varepsilon + \operatorname{div}\mathbf{G}(w^\varepsilon) - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} B_{ij}(w^\varepsilon)_{x_i x_j} = -\dfrac{1}{\varepsilon} w^\varepsilon z^\varepsilon & \text{in } (0,T)\times\mathbf{R}^N \\ z_t^\varepsilon = -\dfrac{1}{\varepsilon} w^\varepsilon z^\varepsilon & \text{in } (0,T)\times\mathbf{R}^N \\ w^\varepsilon(0,\cdot) = w_0 & \text{in } \mathbf{R}^N \\ z^\varepsilon(0,\cdot) = z_0 & \text{in } \mathbf{R}^N \end{cases}$$

に対してこの結果が適用され，一般化ステファン問題の解の一意存在性が得られる．

最後に，本論文では扱えなかったが，これらの研究に関連する興味ある問題としては

- 境界条件を考慮した初期値境界値問題
- 数値解析へ応用を視野に入れた近似理論の構築
- 数理生物学など応用面からのアプローチ

などが挙げられ，今後の課題としたい．