

博士学位論文審査要旨

申請者： 高木 悟

論文題目： **A Study on Renormalization Theory of Weak Solutions for Nonlinear
Partial Differential Equations**

(非線形偏微分方程式における弱解の再正規化理論についての研究)

審査員： 主査 早稲田大学教授 理学博士 (早稲田大学) 小林 和夫
副査 早稲田大学教授 理学博士 (早稲田大学) 石井 仁司
副査 早稲田大学教授 理学博士 (早稲田大学) 西原 健二

本論文の主題と構成

本論文では、非線形放物型偏微分方程式に対する局所中心不変多様体、および退化楕円型と放物型偏微分方程式のエントロピー解、消散解の再正規化理論についての研究が行われている。これらの偏微分方程式は、次のような物理現象の研究において現れる。

- ・ 永久波の伝播
- ・ 流体内部密度層から生じる進行波
- ・ ダムの水の浸透問題
- ・ 放射性崩壊を伴う熱伝導
- ・ 化学反応

など。 数学的には、これらの現象を記述する方程式の解の存在性、一意性、安定性および方程式自身のもつ性質を研究することが主な仕事となる。解として、実際に微分可能で方程式を満たすものを考えるだけでは、物理現象を解析する上で十分でない。そこで、微分の意味を通常のものから弱めた弱微分なる概念を導入し、その弱微分の意味で

偏微分方程式を満たす解を考える必要がある。これは弱解と呼ばれ、われわれはこの弱解を求めることになる。一方、解の概念を拓げることにより、解の一意性が期待できなくなる。実際に、無数の弱解をもつ偏微分方程式の例がある。そのために、物理的に意味を持つ解を複数の弱解の中から一つ選び出す条件を考える必要がある。本論文は、この選出条件とその弱解に関する研究である。特に、消散解とエントロピー解を扱っている。さらに、有界でない解を研究対象としていて、再正規化理論を展開している。本論文は5つの章から構成されており、各章の内容と論評は以下で述べる。

各章の内容と論評

第1章 この章では、問題の背景を保存型偏微分方程式を例として取り上げて、弱い解とその一意性についての物理的意味を解説している。特に、エントロピー解、消散解の導入、およびそれらの解の再正規化理論の導入の必然性を説明している。

第2章 この章では、半線形放物型方程式

$$du(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t > 0$$

の局所不変多様体について論じている。ここで、 A は C_0 半群の生成作用素で、 $f(t, u)$ は非線形写像で $f(t, 0) = 0$ なるものがある。不変多様体は停留点 $u = 0$ のまわりにおける解の挙動を特徴付けるための有用な概念であるが、次の存在定理を古典的な Liapunov-Perron の方法を用いて証明している。

定理 ある条件の下で、極所不変多様体が存在する。もし、大域的な不変多様体が存在すれば、不変多様体上の解 $v(t)$ が存在して

$$\sup_{t>0} e^{-\eta t} \|u(t) - v(t)\| < \infty$$

がある $\eta > 0$ に対して成り立つ。

ここで得られた存在定理は、その後、非有界領域上の半線形放物型偏微分方程式の解の漸近挙動を研究する際に適用された。

第3章から第5章までは、偏微分方程式の解の再正規化理論を扱っている。

第3章 この章では、退化楕円型偏微分方程式に対する境界値問題

$$\beta(u) - \operatorname{div} a(x, u, \nabla u) \ni f, \quad \Omega,$$

$$u = 0 \quad \partial \Omega$$

の再正規化解の一意性について論じている。移流項 $a(x, u, p)$ に対する p についての増大度の仮定なしで、有界でない解を扱うため、解の再正規化理論を用いてこの境界値問題について、次の一意性定理を証明している。

定理 ある仮定の下で、 u を近似理論により得られた特殊解とし、 v を任意の再正規化解とすれば、 $u = v$ である。

第4章 この章では、保存型偏微分方程式に対する初期値問題

$$u_t + \operatorname{div} F(u) = f, \quad Q = (0, T) \times \mathbb{R}^N$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \mathbb{R}^N$$

の有界でない解を扱うため、新しい解の概念である再正規化消散解を導入している。前章の退化楕円型偏微分方程式と同様に、移流項に対する増大度の仮定なしで有界でない解を扱う場合、あるいは初期値が有界でない関数である場合には、解が有界でなくなるので解の再正規化が必要となる。一方、Bénilan 等はこれらの問題を扱うため、再正規化エントロピー解なる概念を導入し、研究を行っている。この章では、再正規化消散解と再正規化エントロピー解は同値であるという次の定理を証明している。

定理 $u \in L^1(Q)$ とし、ほとんどすべての $(t, x) \in Q$ に対して $u^*(t, x) < \infty$, $u_*(t, x) < \infty$ とする。このとき、 u が再正規化消散解であることと再正規化エントロピー解であることは同値である。

Portilheiro は 2003 年に、有界な解に対してエントロピー解と消散解は同値であることを証明した。この章の定理は、この定理の拡張である。また、ここで得られた定理を用いて、化学反応を表す方程式に対する緩和系を解析している。

第5章 この章は、本論文の主要部である。この章では、非等方的退化放物型偏微分方程式に対する初期値問題

$$u_t + \operatorname{div} F(u) = \operatorname{div} (A(u) \nabla u) + f, \quad (0, T) \times \mathbb{R}^N$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \mathbb{R}^N$$

を扱っている。1 階保存型偏微分方程式に対する消散解の概念は、2003 年に Perthame と Souganidis によって、2 階退化放物型方程式に対して拡張され、エントロピー解との同

値性を証明した。消散解のほうがエントロピー解よりも定義が単純であり、かつ順応性があるので、2階退化放物型方程式に対する緩和系方程式の解の漸近挙動問題を扱うには、エントロピー解より適切である。彼らの結果は、有界な解に対しての結果であるが、有界でない解を考える場合は、再正規化理論が必要となる。本論文では、2階退化放物型方程式の非有界な消散解に対して再正規化し、再正規化消散解なる新しい解の概念を導入し、有界でない解を研究目的としている。一方、有界でない解を扱うもう1つの方法として、再正規化エントロピー解なる概念が **Bendahmane** と **Karlsen** により2004年に導入された。しかし、多孔質媒質内のトレーサーと呼ばれる化学的あるいは生物学的種の進化を記述する具体的な方程式の緩和系を考察する場合には、再正規化消散解のほうが便利である。本論文の主要結果は、次である。

定理 $u \in L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^N))$ とする。このとき、 u が再正規化エントロピー解であることと、 u が再正規化消散解であること同値である。

この結果は新しいもので、応用面でも有益であることを、上に述べた多孔質媒質内のトレーサーの方程式に対する緩和系を例に挙げて示している。

結論

以上のように、特に退化放物型偏微分方程式の弱解の再正規化理論に関して貢献したものと認められ、また今後のこの分野の発展に寄与するものと思われる。したがって、本論文は、博士(学術)の学位論文に相当すると認められる。また、面接試験、学識確認においても合格と判断する。

2005年9月