ON VASSILIEV INVARIANTS AND C_n-MOVES FOR KNOTS

（結び目のヴァシリエフ不変量とC_n-movesについて）

＜論文概要書＞

Curriculum Area Sciences Major
Graduate School of Education
Waseda University

Harumi Yamada

序文

1990年に V.A. Vassiliev により導入された結び目の Vassiliev 不変量は, 後に J.S. Birman と X.-S. Lin によって組み合わせ的な定式化がなされている.

Vassiliev 不変量が結び目を完全に分類するかという問題はまだ未解決のものであるが, Lin, Y. Ohyama, T. Stanford により独立に次の定理が示されている.

命題 A. 任意の自然数 n と結び目 K が与えられたとき, K と order n 以下の Vassiliev 不変量が等しい無限個の結び目 J_m $(m = 1, 2, \cdots)$ が存在する.

また, M. N. Goussarov と K. Habiro は独立に次の定理を示し, 2 つの結び目が order n 以下の Vassiliev 不変量において同じ値を持つとき, そこに共通に横たわる幾何的な性質を, 結び目の局所変形である C_n-move を定義することにより与えた.

命題 B. 2 つの結び目が C_n-moves の有限回の操作で移りあうための必要十分条件は, それらの order $n-1$ 以下の Vassiliev 不変量が一致することである.

Vassiliev 不変量の持つ性質については未知の部分が多く, さまざまな方向からのアプローチを受けているが, Vassiliev 不変量と深いかかわりを持つ C_n-move を手掛かりとし, Vassiliev 不変量の特徴に関して次の問題が考えられる.

問題 1. 任意の自然数 n を与えたとき, order n 以下の Vassiliev 不変量は結び目間の C_k-distance に関する情報を持っているか？ ここで, C_k-distance とは, 2 つの結び目 K, K' が C_k-moves の有限回の操作で移りあうときの, その必要最小回数のことであり, $d_{C_k}(K, K')$ で表すものとする.

問題 2. Goussarov, Habiro により C_n-move と order m $(m < n)$ の Vassiliev 不変量の間の関係が得られているが, C_n-move は order m $(m \geq n)$ の Vassiliev 不変量との間になんらかの関係を有しているか？

問題 1 において, $k = 1$ の場合は Ohyama - K. Taniyama - S. Yamada, Ohyama により Vassiliev 不変量は C_1-distance に関する情報を持っていないことが示されている. 問題 2 では, $m = n$ の場合に M. Okada, T. Tsukamoto, B. Matsuzaka によりそれぞれ $n =$ 2, 3, 4 についての具体的な結果が得られており, Ohyama - Tsukamoto によって任意の n において C_n-move と order n の Vassiliev 不変量の間にある関係が示されている.

本論文では問題 1 に対して, 第 1 章で命題 A の結び目 J_m の性質を制限することにより, $k =$ 2, 3 の場合についての C_k-distance と Vassiliev 不変量の関係を示す. 第 2 章では, 問題 2 について, もっとも基本的な Vassiliev 不変量である Conway 多項式について C_n-move と order m $(m > n)$ の Vassiliev 不変量との関係を見ていく. ここで, 本論文では $n =$ 2, 3, 4 の場合についてのみ扱うが, 一般の場合に対する研究も現

在, 継続して進行中である. また, 第 2 章で得られた結果を第 3 章においてデーン手術の議論に応用する.

$\mathbb{S}^3$ 内の 2 つの枠つき絡み目 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ が, デーン手術した結果同じ多様体を生み出すとき, それらの間には有限回の Kirby move で移りあうという関係があることが知られている. Kirby move の定義により, その操作の前後で少なくとも一方は成分数が 2 以上である. したがって（成分数が 2 以上の）絡み目においては $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$ で $\chi(\mathbb{S}^3;\mathcal{L}_1) = \chi(\mathbb{S}^3;\mathcal{L}_2)$ となるものの例は容易に作れる. 結び目に限定した場合には同様な関係はまだ得られていないが, 手術係数が 0 の場合は $\chi(\mathbb{S}^3;\mathcal{K}_1) = \chi(\mathbb{S}^3;\mathcal{K}_2)$ ならば $\nabla_{K_1}(z) = \nabla_{K_1}(z)$ （$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ は枠つき結び目）であることが知られている. そこで本論文では Conway 多項式と枠つき結び目のデーン手術について以下の問題を考える.

問題 3.　2 つの枠つき結び目 $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_1$ において $\chi(\mathbb{S}^3;\mathcal{K}_1) = \chi(\mathbb{S}^3;\mathcal{K}_2)$ となるとき $\nabla_{K_1}(z)$ と $\nabla_{K_2}(z)$ の関係は？

問題 3 において, 手術係数が ± 1 であるときは A. Casson により $|a_2(K_1)| = |a_2(K_2)|$ という関係がある. またそのとき, 式全体では W. B. R. Lickorish により $\nabla_{K_1}(z) \neq \nabla_{K_2}(z)$ となる結び目 K_1, K_2 が存在することが示されている. つまり 2 次の係数には制限がつくが, 高次の係数については一致するわけではないということが分かっている. 第 3 章では高次の係数にはまったく制限がつかないということを第 2 章の定理 2.1.3 をもとに示す.

第 1 章

order n の Vassiliev 不変量 v_n は本質的に n 個の二重点を持つ特異結び目 K^n の値 $v_n(K^n)$ によって決まり, また $v_n(K^n)$ の値はその定義より埋め込みによらないことが言える. そこで, K^n の preimage を考え, 有向円周上において K^n の二重点の preimage をコードで結んだコード図を用いて特異結び目を表す. コード図はその代数構造を詳しく調べるために D. Bar-Natan により Jacobi 図に拡張された. そしてさらに, 特殊な Jacobi 図である one-branch tree 図が K. Y. Ng - Stanford により導入された. これは, n 次対称群 S_n と 1 対 1 に対応しており, one-branch tree 図を S_n の元 σ を用い, T_σ で表す. また, K. Y. Ng - Stanford により v_n の値は本質的に one-branch tree 図の値によって決まることが示されている.

Ohyama - Tsukamoto によって示された次の命題は one-branch tree 図と C_n-move を結びつけるものである.

命題.　結び目 K から 1 回の C_n-move で得られた結び目を K' とすると, 次の式が成立する.

$$v_n(K) - v_n(K') = \pm v_n(T_\sigma)$$

ここで T_σ は order n の one-branch tree 図である.

第 1 章では, 上記の定理を用い具体的に結び目を構成していくことにより次の定理を証明する.

定理.1.1.9 n を自然数, K を結び目とし $a_2(K)=p$ とおく. 更に T_p を $a_2(T_p)=p$ となる twist 結び目とし, $V_K^{(3)}(1)-V_{T_p}^{(3)}(1)=36q$ とおく. このとき order n 以下の Vassiliev 不変量が K と一致し, 次の条件を満たすような, 結び目解消数が 1 の結び目 J_m $(m=1,2,\cdots)$ が無限個存在する.

(1) $p\neq 0$ のとき $d_{C_2}(J_m,T)=|p|$, $p=0$ のとき $d_{C_2}(J_m,T)=2$.

(2) $|q|\geq 2$ のとき $d_{C_3}(J_m,T_p)=|q|$,
$|q|=1$ のとき $d_{C_3}(J_m,T_p)\leq 3$, そして
$q=0$ のとき $d_{C_3}(J_m,T_p)\leq 2$,

ここで, T は自明な結び目, $a_2(K)$ は K の Conway 多項式 $\nabla_K(z)$ の 2 次の係数, $V_K^{(3)}(1)$ は K の Jones 多項式 $V_K(t)$ の 3 階微分に $t=1$ を代入したものを表す.

これにより, $k=2$, 3 の場合においてそれぞれ order k の Vassiliev 不変量以外は結び目の C_k-distance に関する情報をまったく持っていないことが結論付けられた.

第 2 章

結び目 K の Conway 多項式の m 次の係数 $a_m(K)$ は order m の Vassiliev 不変量であることが知られている. 第 2 章では, ある具体的な結び目の系列の Conway 多項式の値を求めることにより, 結び目に 1 回の C_n-move を施したときの order m $(m>n)$ の Vassiliev 不変量の変化量に関する次の 3 つの定理を証明する. ここで K が結び目であるとき, そのコンウェイ多項式に奇数次の項は現れないということが知られている. 従って, 以下ではコンウェイ多項式の係数として偶数次のものだけを対象として扱っている.

まず一般に $m\geq 2n$ の場合において次が成り立つ.

定理.2.1.3 任意に与えた整数列 $(p_n,p_{n+1},\cdots,p_l)$ に対して $d_{C_n}(K,K')=1$ かつ, $a_{2k}(K)-a_{2k}(K')=p_k$ $(n\leq k\leq l)$, $a_{2q}(K)-a_{2q}(K')=0$ $(l<q)$ となる結び目 K, K' が存在する.

これにより, 1 回の C_n-move で order m $(m\geq 2n)$ の Vassiliev 不変量を任意に変化させることができるので, 言い換えると 1 回の C_n-move は order m $(m\geq 2n)$ の Vassiliev 不変量の変化量を規定しないことが分かる.

また, $n<m<2n$ の範囲についても $n=3$, 4 の場合において次の結果を得た.

定理.2.1.4　任意の自然数 n に対して $d_{C_3}(K,K')=1$ かつ $a_4(K)-a_4(K')=n$ となる結び目 K, K' が存在する.

定理.2.1.5　任意の自然数 n に対して $d_{C_4}(K,K')=1$ かつ $a_6(K)-a_6(K')\geq n$ となる結び目 K, K' が存在する.

つまり, 上記の 3 つの定理により, $m > n$ で特に $n = 2$, 3 のときには 1 回の C_n-move で order m の Vassiliev 不変量の変化量を任意に取れ, また $n=4$ の場合においても, ほとんどのケースにおいて同様のことが言え, 残りの $m=6$ の場合においても Vassiliev 不変量の変化量を, 任意に与えた自然数よりも大きな自然数にできることが分かった.

第 3 章

この章では, 第 2 章の応用として, 具体的に構成した結び目の Seifert 行列がデーン手術の前後でどのように変わるのかを調べることにより, 第 2 章で得られた定理 2.1.3 を元に次の定理 3.1.1 を示す.

定理.3.1.1　H をホモロジー 3 球面, $f_1(z)=\sum_{i=2}^{n} c_i z^{2i}$ と $f_2(z)=\sum_{i=2}^{m} d_i z^{2i}$ をそれぞれ z^2 の多項式とする. このとき, 任意の $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1,1\}$ と任意の整数 a に対して $\nabla_{K_1}(z)=1+\varepsilon_2 a z^2+f_1(z)$, $\nabla_{K_2}(z)=1+\varepsilon_1 a z^2+f_2(z)$, かつ $\chi(H;\mathcal{K}_1)=\chi(H;\mathcal{K}_2)$ を満たす H 内の枠つき結び目 $\mathcal{K}_1=(K_1,\varepsilon_1)$, $\mathcal{K}_2=(K_2,\varepsilon_2)$ が存在する.