博士学位論文審査要旨

申請者　：山田 晴美

論文題目：ON VASSILIEV INVARIANTS AND C_n-MOVES FOR KNOTS
（結び目のヴァシリエフ不変量と C_n-moves について）

申請学位：博士（学術）

主任審査員	：早稲田大学教授	博士（理学）	（早稲田大学）	谷山 公規
審査員	：早稲田大学教授	理学博士	（早稲田大学）	鈴木 晋一
審査員	：早稲田大学教授	理学博士	（大阪大学）	村上 順
審査員	：東京女子大学教授	博士（理学）	（早稲田大学）	大山 淑之

１．本論文の位置付け

位相幾何学（トポロジー）とは図形のつながり方を研究する幾何学である．位相幾何学は図形の位置の研究と図形の形相の研究からなるが，図形の位置の研究の中核をなすのが結び目理論である．結び目理論では空間内の単純閉曲線，これを結び目と呼ぶ，が全同位変形と呼ばれる一種の連続変形によってどのように変化しうるかを研究する．結び目の全同位変形によって変わらない性質を記述するのが結び目不変量である．結び目不変量にはいろいろなものがあるが，１９９０年に Vassiliev は結び目全体の集合の構造に注目して今日 Vassiliev 不変量と呼ばれる一連の結び目不変量を定義した．これにより従来ばらばらに行なわれていた結び目不変量の研究は統一的な視点を与えられ飛躍的に進展した．

一方１９９４年頃に Habiro は各自然数 n に対して C_n-move と呼ばれる結び目の変形を定義した．C_n-move は全同位変形よりは弱い変形であるが n が増大するにつれて順次強くなることが分かっており，その極限は全同位変形と一致すると予想されている．Habiro と Goussarov は独立に次の定理 1 を証明した．

定理 1　２つの結び目が C_n-moves で互いに移りあうための必要十分条件は，それらの order $n-1$ 以下の Vassiliev 不変量が全て一致することである．

定理 1 は C_n-move の結び目理論における基本的重要性を示している．定理 1

から結び目を C_n-move で変形したとき order $n-1$ 以下の Vassiliev 不変量は変化しないことが分かる．では order n 以上の Vassiliev 不変量は変化するであろうか？この問に対する一つの答えとして，本論文では $n \leq k$ の場合に C_n-move と order k の Vassiliev 不変量のあいだの関係を具体的に考察している．実際本論文では $n < k$ のときには order k の Vassiliev 不変量の変化量にはかなり多様な自由度があることがいろいろな状況下で示されている．この方面の研究は今まであまりなされておらず，新しい重要な結果であり，今後のさらなる研究の発展が期待される．

2．各章の内容と論評

第１章

Vassiliev 不変量は結び目の完全不変量であるか？という問に関連して Lin，Ohyama，Stanford により独立に次の定理２が示されていた．

定理２　任意の自然数 n と結び目 K に対して K と order n 以下の Vassiliev 不変量が全て等しい無限個の結び目 J_m $(m=1,2,\cdots)$ が存在する．

この定理は Ohyama-Taniyama-Yamada と Ohyama により次の形に強められていた．

定理３　任意の自然数 n と結び目 K に対して K と order n 以下の Vassiliev 不変量が全て等しい無限個の結び目解消数１の結び目 J_m $(m=1,2,\cdots)$ が存在する．

本章では定理３をさらに強めた次の定理４が示されている．

定理４　n を自然数，K を結び目とし $a_2(K)=p$ とおく．さらに T_p を $a_2(T_p)=p$ となる twist 結び目とし，$V_K^{(3)}(1)-V_{T_p}^{(3)}(1)=36q$ とおく．このとき order n 以下の Vassiliev 不変量が全て K と一致し，さらに次の条件を満たすような，結び

目解消数が 1 の結び目 J_m $(m=1,2,\cdots)$ が無限個存在する.

$$\begin{aligned} &(1) \quad p\neq 0 \text{ のとき } d_{C_2}(J_m,T)=|p|,\ p=0 \text{ のとき } d_{C_2}(J_m,T)=2,\\ &(2) \quad |q|\geq 2 \text{ のとき } d_{C_3}(J_m,T_p)=|q|,\\ &\qquad |q|=1 \text{ のとき } d_{C_3}(J_m,T_p)\leq 3, \text{そして}\\ &\qquad q=0 \text{ のとき } d_{C_3}(J_m,T_p)\leq 2. \end{aligned}$$

ここで, T は自明な結び目, $a_2(K)$ は K の Conway 多項式 $\nabla_K(z)$ の 2 次の係数, $V_K^{(3)}(1)$ は K の Jones 多項式 $V_K(t)$ の t に関する 3 階微分に $t=1$ を代入したもの, $d_{C_k}(J,K)$ は J から K への変形に必要な C_k-moves の最小回数を表す.

これにより, $k=2,3$ の場合においてそれぞれ order k の Vassiliev 不変量以外は結び目の C_k-distance に関する情報をまったく持っていないことが結論付けられた. k が 4 以上の場合については今後の課題といえる.

第 2 章

本章では結び目 K の order k の Vassiliev 不変量の具体例として K の Conway 多項式の k 次の係数 $a_k(K)$ について考察している. ある具体的な結び目の系列の Conway 多項式の値を求めることにより, 結び目に 1 回の C_n-move を施したときの a_k の変化量に関する次の 3 つの定理を証明している.

まず一般に $k\geq 2n$ の場合において次を示している.

定理 5　任意に与えられた整数列 $(p_n,p_{n+1},\cdots,p_l)$ に対して $d_{C_n}(K,K')=1$ かつ, $a_{2k}(K)-a_{2k}(K')=p_k$ $(n\leq k\leq l)$, $a_{2q}(K)-a_{2q}(K')=0$ $(l<q)$ となる結び目 K, K' が存在する.

また, $n<k<2n$ の範囲についても $n=3,4$ の場合において次の結果を得ている.

定理 6　任意の自然数 n に対して $d_{C_3}(K,K')=1$ かつ $a_4(K)-a_4(K')=n$ となる結び目 K, K' が存在する.

定理 7　任意の自然数 n に対して $d_{C_4}(K,K')=1$ かつ $a_6(K)-a_6(K')\geq n$ となる結び目 K, K' が存在する.

定理７の不等号を等号にすることやnが５以上の場合は今後の課題であろう.

第３章

この章では，第２章の応用として，具体的に構成した結び目のSeifert行列がデーン手術の前後でどのように変わるのかを調べることにより次の定理８が示されている.

定理８　Hをホモロジー3−球面, $f_1(z)=\sum_{i=2}^{n}c_iz^{2i}$ と $f_2(z)=\sum_{i=2}^{m}d_iz^{2i}$ をそれぞれ z^2 の多項式とする. このとき, 任意の$\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{-1,1\}$ と任意の整数 a に対して$\nabla_{K_1}(z)=1+\varepsilon_2az^2+f_1(z)$, $\nabla_{K_2}(z)=1+\varepsilon_1az^2+f_2(z)$, かつ $\chi(H;\mathcal{K}_1)=\chi(H;\mathcal{K}_2)$ を満たす H 内の枠つき結び目 $\mathcal{K}_1=(K_1,\varepsilon_1)$, $\mathcal{K}_2=(K_2,\varepsilon_2)$ が存在する. ここで$\chi(H;\mathcal{K})$はHを$\mathcal{K}$でデーン手術して得られる３次元多様体を表す.

この結果は３次元多様体のCasson不変量と関係した興味深い結果であり，３次元多様体や結び目の他の不変量についての拡張が期待される.

３．結論

本論文では結び目理論の中核に存在するVassiliev不変量とC_n-moveという二つの概念に係る新しい重要な結果が得られており結び目理論に大きな進展をもたらした. また新しい問題提起をしており，今後この論文を起点としてさらなる研究の発展がなされるものと期待される.

以上の理由により，審査員一同は，本論文が博士（学術）の学位に値するものであることを認める.

以上

２００５年　１月