No. 教研博論内－３４

早稲田大学大学院教育学研究科

博士学位論文審査要旨

【 申請者 】

氏　　　名　　新庄　玲子（１９７６年１２月１２日生）
大学院教育学研究科教科教育学専攻５年在学中

申 請 学 位　　博 士（学術）

論 文 題 目

Spatial graphs bounding interior disjoint surfaces
－内部が交わらない曲面を張る空間グラフについて－

受 理 年 月 日　２００５年１０月１８日（課程による者の学位論文）

論文審査終了年月日　２００６年　１月２４日

【 審査員 】

主任審査員氏名　　谷山　公規　教授
審 査 員 氏 名　　鈴木　晋一　教授
審 査 員 氏 名　　村上　　順　理工学部教授
審 査 員 氏 名　　新國　　亮　金沢大学教育学部助教授

２００６年２月２１日の教育学研究科運営委員会にご持参願います。

博士学位論文審査要旨

申請者　：新庄 玲子

論文題目：SPATIAL GRAPHS BOUNDING INTERIOR DISJOINT SURFACES
（内部が交わらない曲面を張る空間グラフについて）

申請学位：博士（学術）

主任審査員：早稲田大学教授　博士（理学）（早稲田大学）　谷山 公規
審査員　：早稲田大学教授　理学博士（早稲田大学）　鈴木 晋一
審査員　：早稲田大学教授　理学博士（大阪大学）　村上 順
審査員　：金沢大学助教授　博士（情報科学）（東北大学）　新國 亮

1．本論文の位置付け

ここでいうグラフとは点（頂点）と線（辺）からなる１次元の図形のことである。グラフには平面に埋め込み可能なもの（平面的グラフ）と不可能なもの（非平面的グラフ）がある。平面的グラフの平面への埋め込みがどのくらいあるのかは完全に分かっている。特に3-連結な平面的グラフの球面（平面に無限遠点を付加したもの）への埋め込みは、球面とグラフの対の同相の範囲で一意的であることが知られている。このことにより3-連結平面的グラフの諸性質はその球面埋め込みを利用して調べることが出来る。実際に対称性の決定などいろいろな問題はその球面埋め込みを経由して研究されている。

さて、全てのグラフは（平面的グラフはもちろん非平面的グラフも）空間に埋め込み可能である。ところが結び目理論によって明らかにされているように、サイクルを１つでも持つグラフの空間埋め込み（もしくは空間に無限遠点を付加した３次元球面への埋め込み）は、対同相の範囲で一意的でない。そこでグラフのたくさんある空間埋め込みのうち‘標準的’なものを定義することが出来ないかということが問題となる。グラフの‘標準的’な空間埋め込みの候補の一つとして小林一章は局所自明空間埋め込みという概念を提唱した。本論文はこの概念にヒントを得て、空間グラフ（グラフの空間埋め込み）を境界とするinterior disjoint surfacesとその特殊な場合であるinterior disjoint disksという概念を導入し、与えられたグラフに対し

てその空間埋め込みを境界とするinterior disjoint surfacesの枚数の上限の存在とその上限を実現するような空間埋め込みとそれを境界とするinterior disjoint surfacesの存在を示した。この上限を実現する空間埋め込みは局所自明空間埋め込みにもなっており、グラフの‘標準的’な空間埋め込みの有力な候補として今後のさらなる研究が期待される。

また、本論文ではこれに関係する境界空間グラフの研究と空間グラフの空間グラフホモロジー分類に関する研究もなされており、まだ若い分野である空間グラフ理論において大きな一歩を標した論文である。

２．各章の内容と論評

第１章

空間グラフを境界とするinterior disjoint surfaces（論文中ではcollection of spanning surfaces）とは、空間内の連結かつコンパクトで境界成分数が１の向き付け可能曲面の集合で、その各々の境界は全て互いに異なる空間グラフのサイクルになっていて、その各々の内部は互いに交わらず空間グラフとも交わらないものを云う。特に全ての曲面が円板と同相であるときinterior disjoint disksと呼ぶ。

本章では、与えられたグラフの任意の空間埋め込みとそれを境界とする任意のinterior disjoint surfacesについて、その曲面の数はグラフの抽象的な構造（グラフのブロック分解の各成分の１次元ベッチ数）から決まる数を上限とすることを示した（Theorem 1.1.1）。また任意のグラフに対してある空間埋め込みとそれを境界とするinterior disjoint disksが存在して、そのdisksの数がちょうどその上限になることを示した（Theorem 1.1.2、Corollary 1.1.4）。

Theorem 1.1.1は比較的容易に証明出来ることであるが、Theorem 1.1.2の証明は自明なことではなく、巧い構成法を用いて示されている。この上限を与える空間埋め込みについてはある意味の一意性が期待されており、グラフの‘標準的’な空間埋め込みの有力な候補である。この埋め込みの一意性に関して今後の研究の進展が待たれるところである。

第２章

空間グラフを境界とするinterior disjoint surfacesのうちその空間グラフの全てのサイクルの集合に対応するものが存在するとき、その空間グラフは境界空間グラフであると呼ばれる。本章では与えられたグラフが境界空間埋め込みを持つための必

要十分条件を決定している（Theorem 2.1.2)。また、同じグラフの任意の２つの境界空間埋め込みは、自己シャープ変形と呼ばれる局所変形によって互いに移りあうことを示した。さらにそれらが自己パス変形と呼ばれる局所変形によって移りあうための必要十分条件は、それらの空間埋め込みが含む結び目の Arf 不変量が全てペアで等しいことであることを示した。

境界空間グラフの概念は結び目理論における境界絡み目の概念の拡張になっており、その研究は今後注目されることと思われる。本章は境界空間グラフ研究の端緒を開いたといえる。今後のさらなる研究の進展が期待される。

第３章

空間グラフの空間グラフホモロジー分類は従来 Wu 不変量を用いてなされていたが、本章では空間グラフの Wu 不変量が、その部分空間グラフの絡み数と Simon 不変量だけで決まることを示した（Theorem 3.1.3)。絡み数と Simon 不変量はともに簡単に計算可能であり、空間グラフの空間グラフホモロジー分類が簡単に計算出来ることになった。この分類は空間グラフ分類の基礎となる分類であり、この意味で本章の結果は重要である。またこの結果は空間グラフの次数１の有限型不変量の構造も明らかにしており、空間グラフ理論に対して基礎的な貢献をしたといえる。

３．結論

本論文では、先行するいくつかの研究をふまえた上で、空間グラフ研究に空間グラフを境界とする interior disjoint surfaces の概念を本格的に導入し、新しい結果を得ている。この結果は空間グラフ理論に大きな進展をもたらした。また今後の‘標準的’な空間グラフに関する研究は、グラフ理論自体にも大きな寄与をもたらす可能性を持っている。

以上の理由により，審査員一同は，本論文が博士（学術）の学位に値するものであることを認める.

以上

２００６年　1月