博士論文概要書

Characteristic Analysis of Fuzzy Node Fuzzy Graph and its Application

ファジィノードファジィグラフの特性解析と応用

早稲田大学大学院教育学研究科

上江洲　弘明

2006年　　　月

ファジィ集合は L.Zadeh により 1965 年に提案された概念であり，この理論はあいまいな情報を定量的に測定して分析することを可能にした．

ファジィ理論にはファジィ集合論，ファジィグラフ理論，ファジィ推論などさまざまな分野があるが，1970 年代には E.Mamdani, A.Kaufmann, C.Negoita，1980 年代には J.Bezdeck, M.Mizumoto, W.Pedrycz および多くの学者により基礎理論とその応用の研究が進められてきた．

ファジィグラフ理論には，ファジィグラフの連結性の分析，ファジィグラフの近似分析，ファジィノードをもつファジィグラフの分析など興味深い研究が数多くあり，A.Kaufmann, T.Nishida, M.McAllister および多くの学者により研究されてきた．

特に，ファジィ関係やファジィグラフの基礎理論は Rosenfeld などによって研究されており，ファジィグラフ G はノードの集合 V とファジィ関係行列 F とで与えられるグラフとして定義される．

$$G = (V, F)\ :\ V = \{v_i\},\ F = (f_{ij})$$

ここで，このファジィグラフを拡張し，新しくノードにファジィネス u_i を持たせたファジィノードファジィグラフを筆者は提案した．

$$G = (V, F)\ :\ V = \{v_i / u_i\},\ F = (f_{ij})$$

ファジィノードファジィグラフは，それぞれのノードにファジィネスを持たせたものであるため，より状況に即した分析をすることが可能になる．

通常，ファジィノードファジィグラフは複雑になるので，ファジィノードファジィグラフをファジィグラフに変換する方法として，ファジィ集合演算によく用いられる T－ノルムを応用する方法を考案した．さらに，T－ノルムには種々のものがあるが，最大の T－ノルムである論理積と最小の T－ノルムである激烈積をつなぐ新しい T－ノルム族として準論理積を提案した．

次に，T－ノルム族をファジィノードファジィグラフからファジィグラフへの変換に用いることにより，ファジィノードファジィグラフの段階的な解析と応用を可能にした．

本論文では，ファジィノードファジィグラフに関するいくつかの解析手法とその応用について述べる．論文の章立ては次のようである．

1.　ファジィノードファジィグラフ
2.　T－ノルムと T－ノルム族
3.　ファジィノードファジィグラフの解析
4.　ファジィノードファジィグラフの応用
付録　ファジィノードファジィグラフの描画システム

第 1 章では，ファジィグラフとファジィノードファジィグラフについて述べる．ファジィグラフは Rosenfeld などによって研究されてきたが，このファジィグラフを拡張し，ノードにファジィネスを持たせたファジィノードファジィグラフを提案する．

通常，ファジィグラフ G は次の式で定義される．

$$G=(V,F) : V=\{v_i\}, F=(f_{ij}), 0 \le f_{ij} \le 1$$

ここで，V はノードの集合，F はファジィ関係行列である．

ファジィグラフを拡張したファジィノードファジィグラフは次の式で定義される.

$$G=(V,F) : V=\{v_i / u_i\}, F=(f_{ij}), 0 \le f_{ij} \le 1, 0 \le u_i \le 1$$

ここで, u_i はノード v_i の持つファジィネスである. ファジィノードファジィグラフは, アークのファジィネスとノードのファジィネスの両方により特徴付けられるので, その構造は非常に複雑なものになる. そこで, 通常, ファジィノードファジィグラフは T－ノルムを用いてファジィグラフに変換される.

第2章第1節では, ファジィノードファジィグラフをファジィグラフに変換する際に用いるT－ノルムとT－ノルム族について述べる. T－ノルムとは以下の 4 つの条件を満たす 2 項演算である.

$$T : p,q \in [0,1] \rightarrow T(p,q) \in [0,1]$$

(1) 交換律: $T(p,q) = T(q,p)$

(2) 結合律: $T(p,T(q,r)) = T(T(p,q),r)$

(3) 単調性: $p \le q, \quad r \le s \Rightarrow T(p,r) \le T(q,s)$

(4) 境界条件: $T(p,0) = 0, \quad T(p,1) = p$

T－ノルムはファジィ集合演算等によく用いられる演算であり, 代表的なものに, 論理積, 代数積, 限界積, 激烈積などがある.

この T－ノルムに対して, さらにパラメータ λ を持つ T－ノルムを T－ノルム族という. T－ノルム族はパラメータ λ を介することによって, いくつかの T－ノルムを結び付けている. 代表的なものに, Dubois 積, Weber 積, Schweizer 積などがあり, それぞれ論理積と代数積, 代数積と限界積, 限界積と激烈積をつないでいる.

第 2 章第 2 節では, 論理積と激烈積を結ぶ T－ノルム族として新しく準論理積を提案し, 準論理積のもつ特性を述べる.

$$準論理積: T_\lambda(p,q) = \begin{cases} 0 & , p \vee q < 1-\lambda \\ p \wedge q & , p \vee q \ge 1-\lambda \end{cases}, \lambda \in [0,1]$$

準論理積は, 最大の T－ノルムである論理積と最小の T－ノルムである激烈積を λ∈[0, 1]でつなぐ T－ノルム族である. この準論理積を, ファジィノードファジィグラフからファジィグラフへの変換の際に用いると, ファジィノードファジィグラフを段階的に解析することが可能となる.

第 3 章第 1 節では, ファジィノードファジィグラフからファジィグラフへの変換の手法について述べる. ファジィノードファジィグラフは, アークのファジィネスとノードのファジィネスの両方により特徴付けられるので, その構造は非常に複雑なものになる. そこで, ファジィノードファジィグラフを T－ノルムを用いてファジィグラフに変換する方法を考案した.

ここで, 変換に用いる T－ノルムとしては先に述べたように多数の T－ノルムがある. 本論文では, 新しい T－ノルム族である準論理積のパラメータλを変化させることによって, ファジィノードファジィグラフ G を複数のファジィグラフ $G_\lambda = (V, F_\lambda)$ に変換する方法と効用について論ずる.

第 3 章第 2 節では, ファジィノードファジィグラフのクラスター分析の手法について述べる. ファジィノードファジィグラフのクラスター分析は, 従来, ファジィ関係行列 F から無向ファジィ類似行列 S を作り, その推移閉包をとることによって階層クラスタリング解析を行う手法である. この結果から得られる分割樹形図は, クラスタリングの大域的な構造を把握するのに適している. ここで, どのレベルがファジィノードファジィグラフの特徴を最もよく表しているのかを判断するという問題が生ずる.

そこで，ファジィ決定を用いて，最適なカットレベルを決定する方法を考案した．

分割樹形図には，レベルが上がればクラスター数が増え，レベルが下がればクラスターサイズが大きくなるという特徴がある．この特徴を利用して，ファジィクラスター分岐度関数 $p(c)$とファジィクラスターサイズ関数 $q(c)$を定義し，ファジィ決定 $p(c) \wedge q(c)$ を応用して最適なカットレベル c_0を決定する方法を述べる．

第 3 章 3 節では，ファジィノードファジィグラフを表す，最適ファジィグラフの決定法について述べる．準論理積 T_λ を用いてファジィノードファジィグラフ $G=(V,Y)$ を変換すると，パラメータ λ を変化させることにより，多くのファジィグラフ $G_\lambda=(V,F_\lambda)$ が生成される．これらのファジィグラフ $G_\lambda=(V,F_\lambda)$ の中から，分割樹形図の最適なカットレベル c_0 におけるクラスターの特徴をよく表し，かつ，もとのファジィノードファジィグラフの特徴をよく表すファジィグラフをどう選択するかという興味深い問題がある．そこでファジィ決定を応用して，最適なファジィグラフを決定する方法を考案した．

ファジィノードファジィグラフの分割樹形図から得られる最適なカットレベルを c_0 とすると，最適な c－カット行列 S_{c_0} が得られる．この最適な c－カット行列 S_{c_0} と，ファジィグラフ $G_\lambda=(V,F_\lambda)$ のファジィ関係行列 F_λとの距離の評価をするため，ファジィ距離評価関数 $f_D(\lambda)$ を定義する．λを変化させることによりファジィ距離評価関数 $f_D(\lambda)$ の値も変化するが，この $f_D(\lambda)$ の値が高ければ高いほど分割樹形図の最適カットレベルの特徴を強く表していることになる．

一方，分割樹形図の特徴をよく表しているファジィグラフというのは，言い換えれば，分割樹形図以外の情報がかなり排除されたファジィグラフのことである．そこで，もとのファジィノードファジィグラフの情報を十分保持しながら，分割樹形図の特徴を同時に表すファジィグラフを選択したい．そこで，ファジィグラフの連結の度合いを評価するファジィ連結度評価関数 $f_E(\lambda)$ を定義する．λ を変化させることによりファジィ連結度評価関数 $f_E(\lambda)$ の値も変化するが，この $f_E(\lambda)$ の値が高ければ高いほど連結の度合いが高くなっているので，このλに対するファジィグラフ $G_\lambda=(V,F_\lambda)$ はもとのファジィノードファジィグラフの情報を十分保持していると評価できる．

もとのファジィノードファジィグラフの特徴を表し，かつ分割樹形図の最適カットレベルの特徴をよく表しているファジィグラフを選択することが目的なので，この2つの評価関数 $f_D(\lambda)$ と $f_E(\lambda)$ を用いてファジィ決定を行う．その最大化決定により，以下の式でλの最適値 λ_0 が決定される．

$$f_M(\lambda)=f_D(\lambda)\wedge f_E(\lambda)$$
$$\lambda_0=\min\{\lambda : f_M(\lambda)=\max_{0\le x\le 1} f_M(x)\}$$

この最適値 λ_0 により生成されるファジィグラフ $G_{\lambda_0}=(V,F_{\lambda_0})$ は，もとのファジィノードファジィグラフの情報を十分保持しながら，分割樹形図の特徴を同時に，最も良く表すファジィグラフであると言えるので，ファジィグラフ $G_{\lambda_0}=(V,F_{\lambda_0})$ を最適ファジィグラフとする．

第 4 章第1節では，ファジィノードファジィグラフのソシオメトリー分析への応用について述べる．ソシオメトリー分析において，ファジィノードを採用すると，個対個の関係だけでなく，集団における個の重要性をも表現できるようになる．本節ではファジィノードファジィグラフのソシオメトリー分析の

手法と適用事例，およびその有用性を説明する．

第4章第2節では，ファジィノードファジィグラフの教材構造分析への応用について述べる．教材構造分析では，各教材間の関係だけでなく，その教材のその分野における重要性をファジィグラフに取り込むことにより，より良い分析が可能になる．本節では教材構造分析の手法を適用事例をあげて説明する．

付録では，遺伝的アルゴリズムを応用したファジィノードファジィグラフ描画について述べる．グラフ描画については様々な手法があるが，ノードのファジィネスにシャプレイ値を応用し，その値に着目して配置する描画法を提案する．

ファジィグラフの描画は通常，人間が手で行う場合，クラスター分析のクラスターごとにまとめて配置するとか，連結しているアークの本数の多いノードを中央よりに配置するなどして，トライアンドエラーを繰り返しながら描画する．しかし，この方法で描画するとなると大変な労力を必要とし，その結果が良いものであるかどうかの判断も難しい．

そこで，筆者は基本的な2つのルールを定め，そのルールの中で最適解を遺伝的アルゴリズムを用いて探索する方法を考案した．その基本的なルールは，以下の2つである．

① ノードは全て格子上に配置する．

② ファジィネスの値が高いノードを中央よりに配置する．

この2つのルールに基づいて，遺伝的アルゴリズムを応用して最適解を探索する．その際，その配置の適合度関数が必要になるので，以下の式で定義しておく．

$$fitness(GTYPE) = \sum_{a=0}^{2m}\sum_{b=0}^{2m}\sum_{y=-1}^{1}\sum_{x=-1}^{1}\mu(X(k-m+a, k-m+b), X(k-m+a+x, k-m+b+y))\cdot(|x+y|-xy)$$

ただし，

$$k = -\left[\frac{3-\sqrt{N}}{2}\right]+1,\ \#(S) = N$$

であり，$X(s,t)$ は座標(s, t)に配置されるノードを表す．

この適合度関数の値が収束すれば探索終了となる．実際は，初期集団を 100 個体，交叉には1点交叉，選択にはルーレット方式を用いて計算している．

最終的に最適解はいくつか求まるが，その中でも適合度関数の値が最も高くクラスター分析の結果をよく表している解を最適解とする．