

射影図を用いた双曲コクセター理想多面体の分類

小森 洋平・雪田 友成

1. 序文

双曲コクセター理想多面体とはすべての頂点が双曲空間の理想境界に位置し、すべての面角が $\pi/m (m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\})$ となるような双曲多面体である。本論文では 3 次元双曲幾何の上半空間モデル U^3 を用いて、面の数が 4、5、6 の双曲コクセター理想多面体の分類を行った。理想頂点のうち 1 つを無限遠点に移す等長変換により、初めから双曲コクセター理想多面体の頂点のうち 1 つは無限遠点にあるとしてよい。このとき、理想頂点におけるホロ球面で多面体を切るとユークリッド多角形となることを用いて、無限遠点から理想境界への射影を考えて双曲コクセター理想多面体を分類した。

2. 上半空間モデル

2.1. 上半空間モデル. 3 次元ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^3, |dx|)$ の上半空間 $U^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 > 0\}$ に計量 $\frac{|dx|^2}{x_3^2}$ を入れた距離空間は、3 次元双曲幾何の 1 つのモデルである。この計量を U^3 の双曲計量という。

\mathbf{R}^3 の 1 点コンパクト化 $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$ における U^3 の境界 $\partial U^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_3 = 0\} \cup \{\infty\}$ と、複素数平面 \mathbf{C} の 1 点コンパクト化であるリーマン球面 $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ は、写像 $(x_1, x_2, 0) \mapsto z = x_1 + ix_2$ で同一視される。

2.2. 3 つの超曲面のクラス. 双曲球面 S とは U^3 内の 1 点 p からの等距離面とする。 S は部分距離空間として 2 次元球面幾何と等長的である。

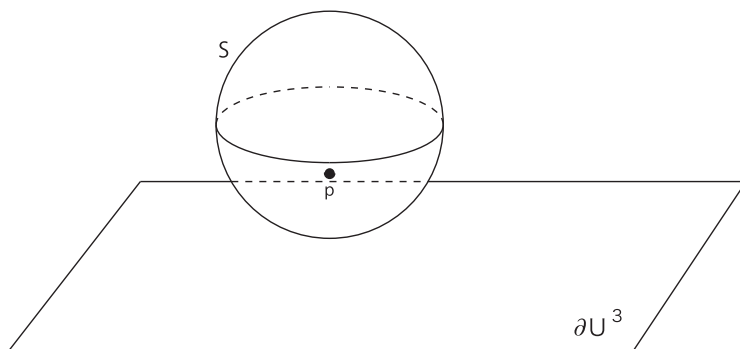


図 1. 双曲球面

双曲平面 P とは ∂U^3 に直交する U^3 内のユークリッド半平面または半球面とする。 P は全測地的超曲面で、部分距離空間として 2 次元双曲幾何と等長的である。

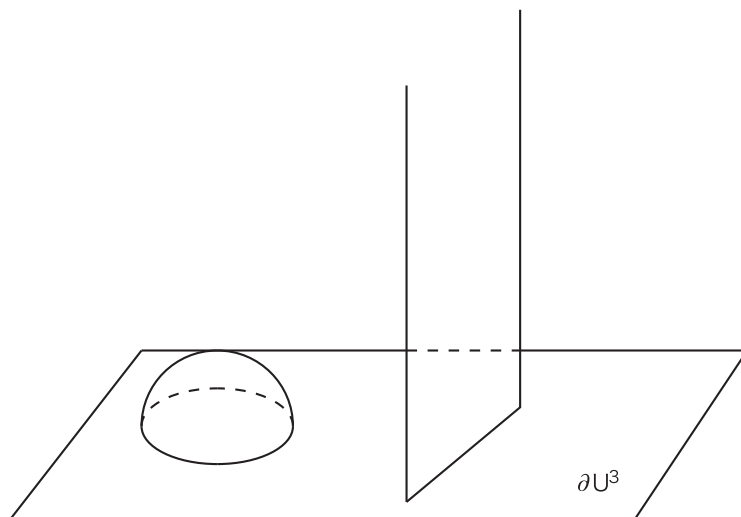


図 2. 双曲平面

ホロ球面 Σ とは ∂U^3 上の 1 点 p で ∂U^3 と接する U^3 内のユークリッド球面とする。ただし $p = \infty$ の時は x_1x_2 平面に平行な U^3 内のユークリッド平面とする。 Σ は部分距離空間として 2 次元ユークリッド幾何と等長的である。

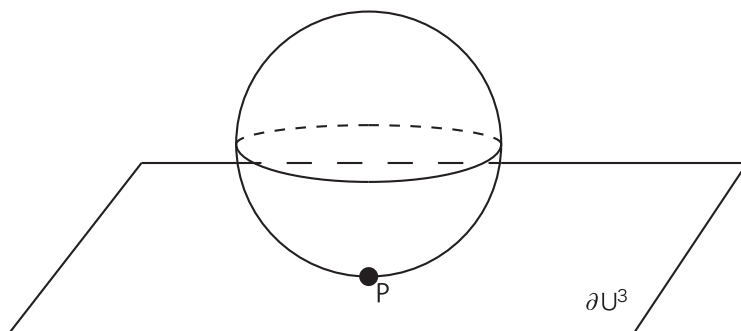


図 3. ホロ球面

2.3. 等長変換群. U^3 の等長変換は ∂U^3 の等角変換に一意的に延びる。このことから U^3 の等長変換群 $I(U^3)$ は $\langle PSL(2, \mathbf{C}), J \rangle$ となることが分かる。ここで $J(z) = \bar{z}$ は実軸に関する鏡映を表す。 x_3 軸中心の回転、原点中心の伸縮、 x_1x_2 平面に平行な平行移動などは U^3 の等長変換である。

それぞれ3つの超曲面のクラスは $I(U^3)$ の元で保たれる。また固定部分群はそれぞれの2次元幾何の等長変換群に同型になる。

3. 双曲多面体

3.1. 双曲多面体. U^3 の部分集合 P が双曲多面体であるとは、有限個の双曲平面 S の定める半空間の共通部分で表されるような、内点を持つ閉凸集合のこととする。ただし各 $P \cap S$ は双曲平面 S の内点を含むとする。このとき $P \cap S$ を P の面という。 P の2つの面の共通部分が双曲線分の場合、その共通線分を P の辺という。またこのとき2つの面は隣接しているという。 P の3つの面の共通部分が1点の場合、その点を P の頂点という。さらに P の3つの面の $\overline{U^3}$ における閉包の共通部分が ∂U^3 上の1点の場合、その点を P の理想頂点 (またはカスプ) という。全ての頂点が理想頂点である多面体を理想多面体という。 P が双曲体積有限な多面体であるための必要十分条件は、 $\overline{U^3}$ における P の閉包と ∂U^3 の共通部分が空集合か高々 P の理想頂点のみからなることである。

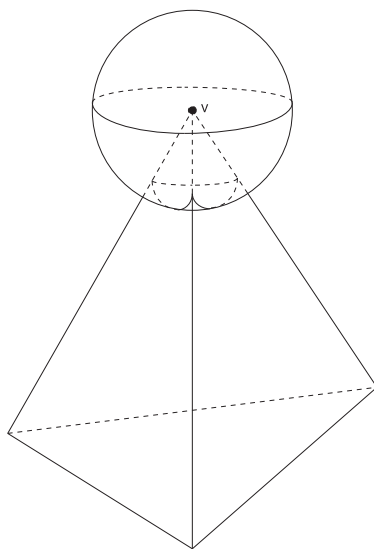
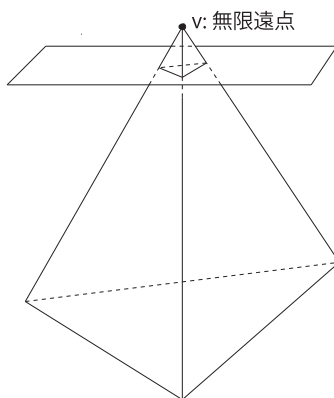
3.2. 面角. 2つの双曲平面 S と T が多面体 P の2つの面を成すとする。このとき P の2つの面 $P \cap S$ と $P \cap T$ の面角を次のように定義する。 $S \cap T \neq \emptyset$ のときは $S \cap T$ 上の点における S と T それぞれの P に関する外法線ベクトルの成す角度とする。 S と T の $\overline{U^3}$ における閉包の共通部分が ∂U^3 上の1点の場合に面角は0とし、それ以外の場合は面角を考えない。

3.3. 頂点絡み目. 多面体 P の頂点 v において、中心を v とし半径が十分小さい双曲球面 Σ で P を切ると Σ 上に球面多角形が現れる。これを頂点絡み目という。 v を共有する P の2つの面 F_1 と F_2 が隣接している必要十分条件は、頂点絡み目の辺として $F_1 \cap \Sigma$ と $F_2 \cap \Sigma$ が隣接していることである。このとき P の2つの面 F_1 と F_2 の面角は頂点絡み目の2辺 $F_1 \cap \Sigma$ と $F_2 \cap \Sigma$ の Σ における2次元球面幾何での角度に等しい。

また多面体 P の理想頂点 v 中心で半径が十分小さいホロ球面 Σ で P を切ると、 Σ 上にユークリッド多角形が現れる。これも頂点絡み目という。 ∂U^3 で v を共有する P の2つの面 F_1 と F_2 が隣接している必要十分条件は、頂点絡み目の辺として $S \cap \Sigma$ と $T \cap \Sigma$ が隣接していることである。このとき P の2つの面 F_1 と F_2 の面角は $S \cap \Sigma$ と $T \cap \Sigma$ の Σ における2次元ユークリッド幾何での角度に等しい。

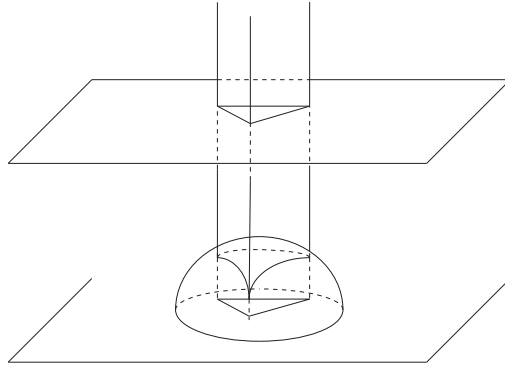
3.4. 理想頂点から見た多面体の射影図. 理想頂点 v を持つ多面体 P において $v \in \mathbf{C}$ ならばメビウス変換 $\frac{1}{z-v}$ に対応する U^3 の等長変換により、 v を ∞ に移すことができる。さらに \mathbf{C} の平行移動と原点中心の伸縮に対応する U^3 の等長変換により、 v を境界に含まない P の面の1つを単位半球面上に移すことができる。

特に理想頂点が ∞ の場合、射影 $\mu: U^3 \rightarrow \mathbf{C}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto z = x_1 + ix_2$ によって $v = \infty$ で頂点絡み目が、 \mathbf{C} 内のユークリッド三角形として視覚化される (参考文献の P.219 の Figure 6.4.2. を参照)

図 4. 頂点 v 中心の双曲球面による切断図 5. 頂点 $v = \infty$ におけるホロ球面による切断

4. コクセター多面体

4.1. コクセター多面体とコクセター図. 双曲体積有限な多面体がコクセター多面体であるとは、全ての面角が π/n ($n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$) であることとする。コクセター多面体 P から次のようなコクセター図と呼ばれるグラフが定義される。グラフの各頂点は多面体 P の面である。 P の 2 頂点の面角が π/n ($n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$) の場合、対応するグラフの 2 頂点を辺で結び、 n をその辺に割り当てる。ただし習慣により $n = 3$ の場合は数字を対応する辺に書かず、 $n = 2$ の場合は対応するグラフの 2 頂点を辺で結ばない。また面角が定義できない場合 2 頂点は破線で結ぶ。このようにしてコクセター多面体からコクセター図が定義される。コクセター図が等しい 2 つのコクセター多面

図 6. ∞ からの射影

体は U^3 の等長変換で互いに移り合う。つまりコクセター図を用いてコクセター多面体を分類することができる。

4.2. コクセター理想多面体の分類. 理想多面体の各頂点における頂点絡み目はユークリッド多角形である。特にコクセター理想多面体の場合、各頂点における頂点絡み目は角度が

$$(\pi/2, \pi/3, \pi/6), (\pi/2, \pi/4, \pi/4), (\pi/3, \pi/3, \pi/3)$$

の3種類のコクセター三角形しかない。つまり面角が $\pi/2, \pi/3, \pi/4, \pi/6$ の4種類に限定されるため、多面体の組合せ構造を固定するとコクセター理想多面体の同型類は有限個しかないと分かる。以下では4、5、6面体におけるコクセター理想多面体を、理想頂点から見た多面体の射影図を用いて分類する。

5. 主結果

5.1. 4,5,6 面体の分類. 4,5,6 面体の組み合わせ構造は、以下の図7で与えられる事が知られている。

一つ多面体の組み合わせ構造を定めたときに、頂点もしくは面に対して切断を考えることで面を一つ増やした多面体を構成することができる。例えば、(iii)の頂点の点線を通るような平面による切断により (iv)の多面体を得られる。(図8)

4,5,6 面体におけるコクセター理想多面体の分類は以下ようになる。

主結果 4,5,6 面体でコクセター理想多面体となるものは以下の通りである。ここで、表1の「面角の組み合わせ」は図9における各多面体の辺上の文字に対応する面角を表すものとする。

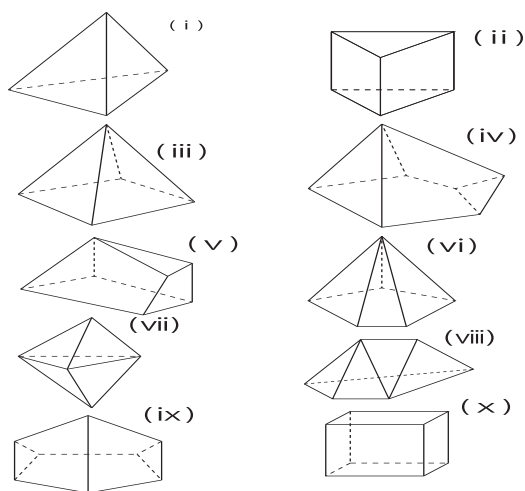


図 7. 4,5,6 面体分類図

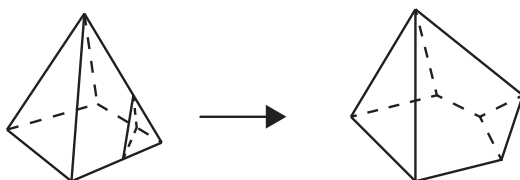


図 8. (iii) の頂点の切断

| 多面体の組み合わせ構造 | 面角の組み合わせ | 実現できる値 |
|-------------|--|--|
| (i) | (a, b, c, d, e, f) | $(2, 3, 6, 3, 6, 2)$ $(2, 4, 4, 4, 4, 2)$ $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ |
| (ii) | $(a, b, c, d, e, f, g, h, i)$ | $(2, 3, 3, 6, 3, 6, 2, 3, 3)$ |
| (iii) | (a, b, c, d) | $(3, 6, 3, 6)$ $(4, 4, 4, 4)$ |
| (v) | (a, b, c, d, e, f, g) | $(3, 6, 3, 2, 6, 3, 6)$ $(4, 4, 4, 2, 4, 4, 4)$ $(6, 3, 3, 3, 6, 3, 3)$ |
| (x) | $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l)$ | $(3, 3, 6, 2, 3, 2, 3, 6, 3, 3, 6, 2)$ $(3, 3, 6, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 6, 3)$ $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ $(6, 3, 6, 2, 2, 2, 3, 3, 6, 3, 6, 2)$ $(3, 3, 6, 2, 3, 2, 3, 6, 2, 6, 3, 3)$ $(2, 3, 6, 3, 6, 2, 2, 6, 2, 3, 6, 3)$ |

表 1. 実現可能な理想コクセター多面体

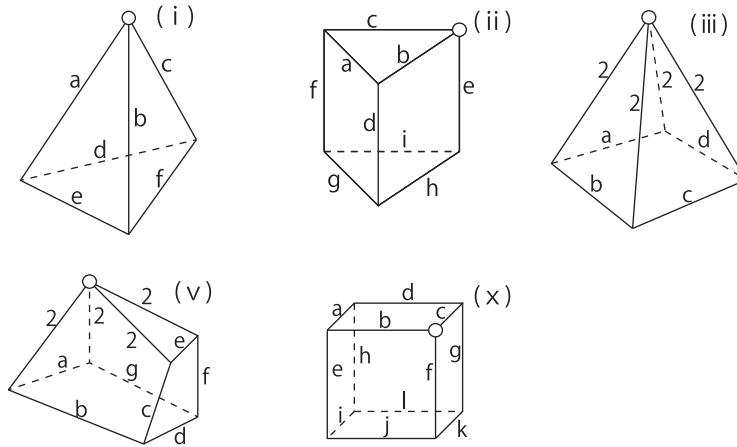


図 9. コクセター理想多面体の組み合わせ構造

証明の概略は以下の通りである。図9の(i)において白丸を無限遠点に移し、その無限遠点から U^3 の境界である平面 C への射影図を表したものが図10である。コクセター理想多面体の場合、各頂点における頂点絡み目は角度が

$$(\pi/2, \pi/3, \pi/6), (\pi/2, \pi/4, \pi/4), (\pi/3, \pi/3, \pi/3)$$

の3種類のコクセター三角形しかないので、図10において(i),(ii),(iii)はそれぞれ正三角形、 $(\pi/2, \pi/3, \pi/6)$ の角の組み合わせを持つ三角形、直角二等辺三角形である。ここで、円と円の内部の三角形の3辺は、三角錐の底面と側面の、無限遠点から C への射影による像である。

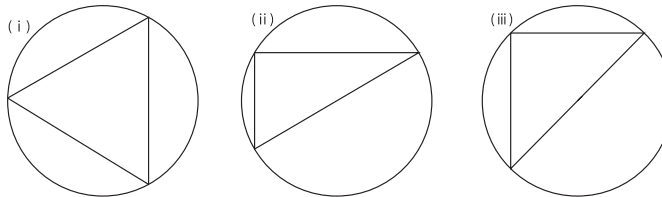


図 10. コクセター理想多面体の射影図

実現できる他のものについても同様である。

次に、実現できないものについてその理由を述べる。(iv)については、(iii)の一つの頂点を切断することで得られることから射影図は四角形一つの頂点が円からはみ出る形となる。(図11参照)このとき、ユークリッドコクセター四角形が長方形だけであることを考えると、長方形の三点が円周上にあるように固定すると長方形の各辺の長さが決まるので残りの一点もまた円周上に

存在することがわかる。(図 12 参照)
したがって、実現不可能である。

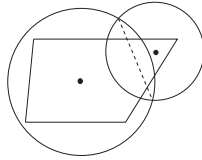


図 11. (iv) の射影図-1

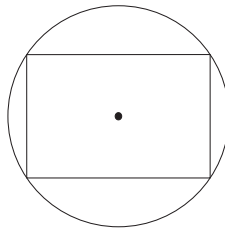


図 12. (iv) の射影図-2

(vi) については、理想頂点の周りに 5 つの面が集まっているので頂点絡み目は五角形となるのだが、このとき五角形でそれぞれの角を

$$\pi/a, \pi/b, \pi/c, \pi/d, \pi/e (a, b, c, d, e \in \mathbb{N})$$

とすると、

$$\pi/a + \pi/b + \pi/c + \pi/d + \pi/e = 3\pi$$

となるものがとれないことがわかる。

すなわち、(vi) の多面体はコクセターで実現できない。

(vii) については、4 つの面が集まる頂点が 3 つ存在するので射影図は図 13 のようになる。このことからコクセター多面体としては組み合わせ構造はただ一つであり、コクセター理想多面体でないことがわかる。

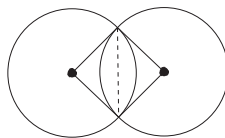


図 13. (vii) の射影図

(viii) については、4 つの面が集まる頂点が 2 つ存在することから図 14 のような射影図を持つことがわかる。この射影図を用いて考えると点 C を固定

したとき、点 D の動く範囲は O_2 の半径によって決まることがわかる。このとき、点 E が O_2 の円周上に存在することがないことがわかる。したがって、コクセター理想多面体にはならない。

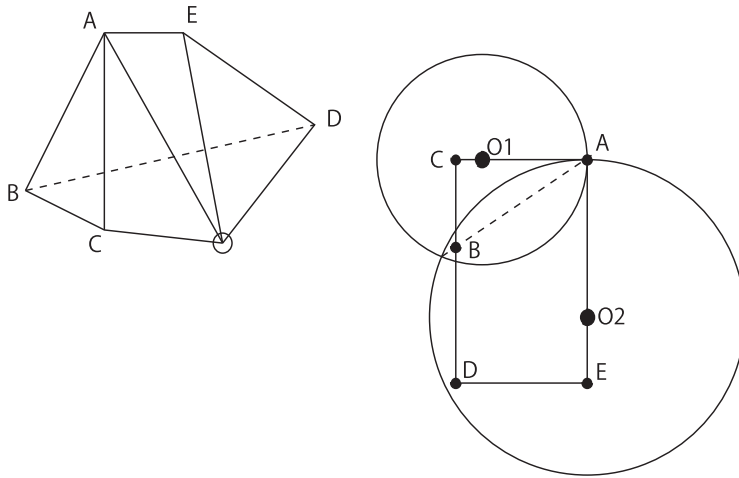


図 14. (viii) の射影図

(ix) については、四面体 (i) の二つの頂点について切断して得られる多面体なので射影図は図 15 のようになる。このとき、コクセター理想多面体となるような射影図を作ると計算から図 16 のようになることがわかる。このとき、この射影図から復元されるコクセター理想多面体は (v) の組み合わせ構造を持つものになっているため (ix) の組み合わせ構造でコクセター理想多面体となるものは存在しないことがわかる。

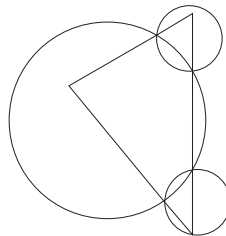


図 15. (ix) の射影図-1

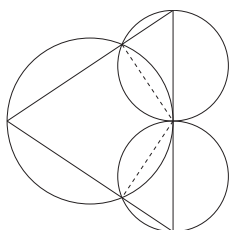


図 16. (ix) の射影図-2

謝辞

論文に目を通していただきアドバイスを下さった大阪市立大学数学研究所の梅本悠莉子さんに感謝いたします。

[参考文献]

J. G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, Grad. Texts in Math., 149, Springer, New York, 1994.