ある確率微分方程式に対する L^1-理論

登口　　大

1　導入

本研究では確率微分方程式

$$du = \Phi(u)dW(t), \quad x \in D,\ t \in (0,T) \tag{1.1}$$

を考える．$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ をフィルター付き確率空間, D を $\mathbb{R}^d$ の有界領域, Φ は $L^2(D)$ から Hilbert-Schmidt 型作用素の空間 $\mathscr{L}_2(H : L^2(D))$ への写像とする．W は柱状 Wiener 過程, すなわち, $W = \sum_{k\geq 1} \beta_k e_k$ なるものである．ここで, β_k は互いに独立な Brown 運動, $(e_k)_{k\geq 1}$ は Hilbert 空間 H の完全正規直交基底である．本研究の目的は $L^1(D)$ の枠組みで方程式 (1.1) の解の存在を捕えることである．従って, Φ は通常の意味では定義されないことを注意しておく (定義 2.1 を見よ).

本研究は有界領域 D 上の確率保存即方程式:

$$du + \mathrm{div}A(u)dt = \Phi(u)dW \tag{1.2}$$

の $L^1(D)$ の枠組みにおける kinetic 解の存在性の議論を見据えた研究である．そのため, 定義 2.1 では方程式 (1.2) などで用いられる kinetic 法による解の定義を採用している．

Debussche, Vovelle [DeVo10], [DeVo14] により周期領域上の確率保存則方程式に対する L^p 理論が研究された．さらに [DeVo14(2), Appendix] において周期領域上の加法的な確率項 (Φ が u に依存しない) に対する L^1 理論が展開された．有界領域上の保存則方程式に対する L^p 理論については Kobayasi, Noboriguchi [KoNo14] の結果があるが, 流束関数 A に対してやや強い仮定を課していた．適切な仮定の下で有界領域上の保存則方程式を解くことが目的であり, L^1 理論の枠組みにおいてはその強い仮定をせずとも理論展開ができることを期待している．そこでまずは乗法的な確率項のみの方程式に注目して [DeVo14(2)] で用いられた L^1 理論が適用できることを確かめたい．

本研究では, Φ に対して次の仮定 (H) を与える．

(H) 各 $z \in L^2(D)$ に対して $\Phi(z) : H \to L^2(D)$ は $\Phi(z)e_k = g_k(\cdot, z(\cdot))$ により定義される．ここで, $g_k \in C(D \times \mathbb{R})$ はすべての $x, y \in D$, $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$

に対して条件

$$|g_k(x,\xi)| \le C_k(1+|\xi|) \tag{1.3}$$

$$|g_k(x,\xi) - g_k(y,\zeta)| \le C_k(|x-y| + |\xi-\zeta|^{1/2} r(|\xi-\zeta|)) \tag{1.4}$$

を満たすものとする．ここで C_k は $\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 < +\infty$, $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ は $r(0)=0$ なる非減少連続関数とする．

Φ の仮定, 特に (1.3) により, 任意の $z \in L^2(D)$ に対して $\Phi(z) \in \mathscr{L}_2(H : L^2(D))$ であることが保証される. 実際,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(z)\|^2_{\mathscr{L}_2(H:L^2(D))} &= \sum_{k=1}^{\infty} \|\Phi(z)e_k\|^2_{L^2(D)} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_D |g_k(x,z(x))|^2\,dx \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \int_D C_k^2\,(1+|z(x)|)^2\,dx = C\int_D (1+|z(x)|)^2 dx < +\infty.
\end{aligned}$$

仮定 (1.3) は Debussche, Vovelle [DeVo10], [DeVo14], [DeVo14(2)] が用いた仮定:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x,\xi)|^2 \le C(1+|\xi|^2)$$

よりもわずかに強い．しかし, 乗法的な確率項に対する $L^1(D)$ 理論において適切なアプリオリ評価 (3.1) を得るためには (1.3) の仮定が自然な仮定であるように思える.

2 解の定義と主結果

定義 2.1 (解)**.** $u_0 \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_0, dP; L^1(D))$ とする．$u \in L^2(\Omega\times[0,T), \mathcal{P}, dP\otimes dt; L^1(D)) \cap L^2(\Omega; L^\infty(0,T; L^1(D)))$ が初期条件 u_0 を持つ (1.1) の解であるとは次が成り立つときをいう:

すべての $\varphi \in C_c^\infty(\overline{D}\times\mathbb{R})$ に対して, P-a.s., a.e. $t\in[0,T)$ で

$$\begin{aligned}
&\int_D \int_{\mathbb{R}} f(t,x,\xi)\varphi(x,\xi)\ d\xi dx - \int_D\int_{\mathbb{R}} f_0(x,\xi)\varphi(x,\xi)\ d\xi dx \\
&\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \int_D g_k(x,u(s,x))\varphi(x,u(s,x))\ dx d\beta_k(s) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_0^t \int_D G^2(x,u(s,x))\partial_\xi \varphi(x,u(s,x))\ dx ds.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで, $\mathcal{P}$ は $(\mathscr{F}_t)$ に対応する $\Omega\times[0,T)$ 上の可予測 σ-加法族, $f(t,x,\xi) = \mathbf{1}_{u(t,x)>\xi}$, $f_0(x,\xi) = \mathbf{1}_{u_0(x)>\xi}$, $G^2(x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x,\xi)|^2$ とする.

注意 2.2. 数式 (2.1) を扱う手法は kinetic 法と呼ばれる．その導出方法は [DeVo10], [DeVo14] などを参照せよ．

注意 2.3. 初期条件が $u_0 \in L^\infty(\Omega, \mathscr{F}_0; L^\infty(D))$ ならば定義 2.1 の意味での解の存在と一意性が知られている． さらに，u，v を初期条件 u_0，$v_0 \in L^\infty(\Omega, \mathscr{F}_0; L^\infty(D))$ に対する (1.1) の解とするとき，L^1-縮小性，すなわち，a.e. $t \in [0, T)$,

$$\mathbb{E}\|u(t) - v(t)\|_{L^1(D)} \leq \mathbb{E}\|u_0 - v_0\|_{L^1(D)} \tag{2.2}$$

が成り立つ ([KoNo14] を見よ).

本研究における主結果は次である．

定理 2.4. $u_0 \in L^2(\Omega, \mathscr{F}_0; L^1(D))$ とする．初期条件 u_0 を持つ (1.1) の解が定義 2.1 の意味で存在する．

3 存在性の証明

$u_0 \in L^1(D)$ に対して近似列 $u_{0,n} := \max\{-n, \min\{u_0, n\}\}$ を考える． u_n を初期条件 $u_{0,n} \in L^\infty(D)$ に対する (1.1) の解とする． このとき，$L^1(D)$ における $u_{0,n}$ の u_0 への強収束性と u_n の L^1-縮小性 (2.2) より列 $\{u_n\}$ は $L^1(\Omega \times (0, T) \times D)$ でコーシー列である．従って，ある $u \in L^1(\Omega \times (0, T) \times D)$ で

$$u_n \to u \quad \text{in } L^1(\Omega \times (0, T) \times D)$$

なるものが存在する．Lebesgue の収束定理と確率積分に対する Lebesgue の収束定理 (下の定理 A.1) より u は (2.1) を満たす．さらに，可測性は L^1-収束で閉じているので u は可予測である．従って u が求めるべき解であることを示すためには $u \in L^2(\Omega; L^\infty(0, T; L^1(D)))$ を示せば良い．

命題 3.1 (L^1 アプリオリ評価)**.** $u \in L^1(\Omega \times (0, T) \times D)$ を定義 2.1 の (iii) を満たすものとする．このとき，L^1 アプリオリ評価:

$$\mathbb{E} \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,T)} \|u(t)\|_{L^1(D)}^2 \leq C(1 + \mathbb{E}\|u_0\|_{L^1(D)}^2) \tag{3.1}$$

が成り立つ．ここで，$C \geq 0$ は T と $|D|$ にのみ依存する定数である．

証明. Step 1. $\mathbb{R}$ 上の関数 θ, Θ を

$$\theta(\xi) = \mathbf{1}_{-1 \leq \xi < 0}, \quad \Theta(\xi) = \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\zeta} \theta(r)\ drd\zeta$$

により定義する．さらに, $\mathbb{R}$ 上のカット・オフ関数 χ_n を $\chi_n(\xi)=\chi(\xi/n)$ により定義する, ここで,

$$\chi(\xi)=\begin{cases}1 & 0\le|\xi|\le 1\\ 0 & 2\le|\xi|,\end{cases}$$

かつ, $|\chi'(\xi)|\le C$ なる C^∞-級関数とする．適当に近似を考えることで, (2.1) の試験関数として $\Theta'(\xi)\chi_n(\xi)$ を取ることができる．このとき, 左辺第一項は次のように下から評価できる:

$$\begin{aligned}\int_D\int_{\mathbb{R}} f(t,x,\xi)\Theta'(\xi)\chi_n(\xi)\ d\xi dx &\ge \int_D\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{u>\xi}\mathbf{1}_{0\le\xi}\mathbf{1}_{|\xi|\le n}\ d\xi dx\\ &=\int_D\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{0\le\xi\le u^+\wedge n}\ d\xi dx\ge\frac12\int_D\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{0\le\xi\le u^+\wedge 2n}\ d\xi dx\\ &=\frac12\int_D u^+(t)\wedge 2n\ dx\end{aligned}$$

一方, 二次変分の項は (1.3) により次のように上から評価できる:

$$\begin{aligned}&\frac12\int_0^t\int_D G^2(x,u)(\theta(u)\chi_n(u)+\Theta'(u)\chi_n'(u))\ dxds\\ &\quad\le C\int_0^t\int_D(1+|u|^2)\,\mathbf{1}_{0\le u<1}\ dxds+C\int_0^t\int_D(1+|u|^2)\frac1n\mathbf{1}_{|u|\le 2n}\ dxds\\ &\quad\le C+C\int_0^t\int_D(1+|u|)\mathbf{1}_{|u|\le 2n}\ dxds\le C+C\int_0^t\int_D|u|\mathbf{1}_{|u|\le 2n}\ dxds\\ &\quad\le C+C\int_0^t\int_D|u|\wedge 2n\ dxds,\end{aligned}$$

ただし, C は T, $|D|$ にのみ依存する定数とする． 従って, (2.1) より a.e. $t\in[0,T)$, a.s. $\omega\in\Omega$ に対して,

$$\begin{aligned}\frac12\int_D(u(t,x))^+\wedge 2n\ dx&\le\|u_0\|_{L^1(D)}+C+C\int_0^t\int_D|u|\wedge 2n\ dxds\\ &\quad+\sum_{k=1}^\infty\int_0^t\int_D g_k(x,u(s,x))\Theta'(u(s,x))\chi_n(u(s,x))\ dxd\beta_k(s).\end{aligned}\tag{3.2}$$

今, (3.2) の両辺を二乗して, 期待値を取ることを考える．このとき, 確率積分の項は Burkholder の不等式と (1.3) を用いて次のように計算できる:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^\infty\int_0^t\int_D g_k(x,u)\Theta'(u)\chi_n(u)\ dxd\beta_k(s)\right|^2\\ &\qquad\le C\mathbb{E}\int_0^t\left(\int_D(1+|u|)\mathbf{1}_{|u|\le 2n}\ dx\right)^2ds\\ &\qquad\le C+C\mathbb{E}\int_0^t\left(\int_D|u|\mathbf{1}_{|u|\le 2n}\ dx\right)^2\ ds\\ &\qquad\le C+C\mathbb{E}\int_0^t\left(\int_D|u|\wedge 2n\ dx\right)^2\ ds\end{aligned}$$

よって, a.e. $t \in [0,T)$ に対して,

$$\mathbb{E}\left(\int_D u^+(t) \wedge 2n\ dx\right)^2$$
$$\leq C\mathbb{E}\|u_0\|^2_{L^1(D)} + C + C\mathbb{E}\int_0^t \left(\int_D |u| \wedge 2n\ dx\right)^2\ ds$$

u^- に対しても同様の評価をして, Gronwall の不等式を用いて, $n \to \infty$ とすれば,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T)} \mathbb{E}\|u(t)\|^2_{L^1(D)} \leq C(1 + \mathbb{E}\|u_0\|^2_{L^1(D)}) \tag{3.3}$$

を得る.

Step 2. Step 1 の結果より適当に近似することで, (2.1) の試験関数として $\Theta'(\xi)$ を取ることができる. (3.2) と同様にして a.e. $t \in [0,T)$ に対して,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u(t)\| &\leq \|u_0\|_{L^1(D)} + C + C\int_0^t \|u(s)\|_{L^1(D)}\ ds \\ &\quad + C\sum_{k=1}^\infty \int_0^t \int_D g_k(x, u(s,x))\Theta'(u(s,x))\ dx d\beta_k(s)\end{aligned} \tag{3.4}$$

が成り立つ. (3.4) の両辺を二乗して, $t \in [0,T)$ について上限を取り, 期待値を取り, Step 1 の結果を用いて次のように計算する:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T)} \|u(t)\|^2_{L^1(D)} &\leq C\mathbb{E}\|u_0\|^2_{L^1(D)} + C + C\mathbb{E}\int_0^T \|u(t)\|^2_{L^1(D)}\ dt \\ &\quad + C\mathbb{E}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T)} \left|\sum_{k=1}^\infty \int_0^t \int_D g_k(x,u)\Theta'(u)\ dx d\beta_k(s)\right|^2 \\ &\leq C(1 + \mathbb{E}\|u_0\|^2_{L^1(D)}) + C\mathbb{E}\int_0^T \left(\int_D (1+|u|)\ dx\right)^2\ dt \\ &\leq C(1 + \mathbb{E}\|u_0\|^2_{L^1(D)}),\end{aligned}$$

ここで, Burkholder の不等式と (1.3) を用いた. □

A 確率積分に対する Lebesgue の収束定理

定理 A.1. $f_n, f \in L^2(\Omega \times [0,T))$ を $(\mathscr{F}_t)$-適合確率過程, β を Brown 運動とする. $f_n \to f$ a.e. かつ $|f_n| \leq g$ なる $g \in L^2(\Omega \times [0,T))$ が存在するとき,

$$\int_0^T f_n(t)\ d\beta(t) \to \int_0^T f(t)\ d\beta(t) \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

が成り立つ.

証明. 通常の Lebesgue の収束定理より $f_n \to f$ in $L^2(\Omega \times [0,T))$ が従う. Itô の等長性より,

$$\mathbb{E}\left|\int_0^T (f_n(t) - f(t))\ d\beta(t)\right|^2 = \mathbb{E}\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2\,dt \to 0.$$

よって結論を得る. □

［参考文献］

[DeVo10] A. Debussche, J. Vovelle, Scalar conservation laws with stochastic forcing, J. Funct. Anal. 259 (4) (2010) 1040–1042.

[DeVo14] A. Debussche, J. Vovelle, Scalar conservation laws with stochastic forcing, revised version (2014), http://math.univ-lyon1.fr/~vovelle/DebusscheVovelleRevised.pdf.

[DeVo14(2)] A. Debussche, J. Vovelle, Invariant measure of scalar rst-order conservation laws with stochastic forcing, arXiv: 1310.3779 [math.AP].

[KoNo14] K. Kobayasi, D. Noboriguchi, A stochastic conservation law with nonhomogeneous Dirichlet boundary conditions, Acta Mathematica Vietnamica, to appear.