Bravais（1846）による 2 変量正規分布と相関係数の発見

― Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point 解題―

椎名　乾平

Bravais（1846）は，本格的に 2 変量正規分布を取り扱った最初の論文として重要である（Hald, 1998, Pp. 504–506）。フランス語では Bertrand（1889），ドイツ語では Czuber（1891）による詳しい紹介があるが，英訳や日本語訳，あるいは日本語あるいは英語による詳細な紹介は存在しないようである。

相関係数が正式にデビューしたとされる Pearson（1896）の論文は Bravais を大いに参考にしているが，にもかかわらず Pearson（1920）には否定的論評がある。Pearson の評価がなぜ変わったか（Denis, 2000），相関係数とは何なのかを理解するには Bravais の元論文を精査するしかないだろう。本稿は Bravais（1846）の内容を詳しく解説し，黎明期の相関研究の有様を明らかにするのを目的とする。この論文にはいくつかのバージョンがあるが，本稿で用いるのは，web 入手可能な

Gallica 版　http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3314t/

Mémoires présentés par divers savans à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France, et imprimés par son ordre : sciences mathématiques et physiques.

である。この論文を以下“元論文”と呼ぶことにする。

本稿での数式番号は主として元論文による。ただし，Bravais が番号をふらなかった重要式には（AB1），（AB2), ... のような記号を付し，本稿の著者によって付け加えられた数式には（KS1），（KS2), ... 等の番号を付け区別する。尚，本稿でのアスタリスク＊は当時まだ存在しなかった用語・概念を用いて論を進める際の注意喚起の記号である。

Bravais の略歴は Wikipedia 等にもあるが，主要な学問業績は結晶学であり，元論文は確率分野での唯一の研究業績とされる（Hald, 1998)。出版は 1846 年であるが，その元になる 1838 年のバージョンがあるようである（Plackett, 1983，但し未確認)。元論文は 255 ページから 332 ページまであり，主論文（p. 255–317）と，Note（付録 , p. 318–330），Résumé（p. 331–332）の 3 部

に分かれている。本稿で解題するのは主論文前半部分 p. 274 ページまでと，Note の一部としておく。その理由はここまでで，corrélation という単語が現れ（p. 263），2 次元正規分布が導出され（p. 268），現在の 2 次元正規分布と同等の関数形が現れると共にパラメーター推定の指針が提示され（p. 272），有名な確率楕円と回帰線*の図（本稿図 1）が提示（p. 273）され，確率楕円*の計算（p. 274）がなされるからである。ちなみに，残された部分の主要な内容は，斜交軸の検討，主軸の検討，期待値の計算，3 次元以上の正規分布に一般化するための議論である。実データの解析例等は存在しない。Note では線形代数の理論が展開されている。

p. 255

Bravais はまず測量の一般論を述べた後，測定の一般式（1）を提示する .

$$\begin{aligned} x &= \phi(a,b,c,...) \\ y &= \psi(a,b,c,...) \\ z &= \chi(a,b,c,...) \end{aligned} \tag{1}$$

ここで a, b, c は観測要素（les éléments observés. データである。ただし大量観察の結果得られるものとする），x, y, z は求めたい平面上あるいは空間内の座標値（les coordonnées du point）である。関数 ϕ，ψ，χ は座標値と観測データの関係を示す関数である。（1）式の意味するところは，現在の統計家には解りづらいかもしれない。Bravais の念頭にあるのは例えば三角測量のような状況であろう。この場合，測定された距離や角度 $a, b, c, ...$ が三角法を用いた推定式（関数 φ, ψ, χ に相当する）に代入されて，座標値の推定に用いられることになる。測量によって求めたい座標値は高々 3 次元までのはずであるから，x, y, z の 3 変量のケースまで考えれば，十分であることになる。

$\delta x, \delta y, \delta z$ を x, y, z の誤差，$\delta a, \delta b, \delta c$ を a, b, c の誤差として

p. 256

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial\phi}{\partial a}\delta a + \frac{\partial\phi}{\partial b}\delta b + \frac{\partial\phi}{\partial c}\delta c + ... = A\,\delta a + B\,\delta b + C\,\delta c + ... \\ \delta y &= \frac{\partial\psi}{\partial a}\delta a + \frac{\partial\psi}{\partial b}\delta b + \frac{\partial\psi}{\partial c}\delta c + ... = A'\,\delta a + B'\,\delta b + C'\,\delta c + ... \\ \delta z &= \frac{\partial\chi}{\partial a}\delta a + \frac{\partial\chi}{\partial b}\delta b + \frac{\partial\chi}{\partial c}\delta c + ... = A''\,\delta a + B''\,\delta b + C''\,\delta c + ... \end{aligned} \tag{2}$$

とモデル化する。$\partial\phi/\partial a = A, \partial\phi/\partial b = B, ...$ ここでの記号の置き換えが行われている。（2）は（1）をテーラー展開*して一次近似式を求めたのに他ならない（測量の分野では誤差伝播の法則*と呼ばれている。例えば Taylor（1996））。（2）はなかなか含蓄の深い式である。なぜならばこれは後世の重回帰分析*や主成分分析*を思わせる構成だからである。

p. 257

Laplace によれば誤差 $\pm t$ は e^{-ht} に比例する。ここで h は module であり，その大きさは誤差の大きさ

に関係する（module は分散*の逆数であり，大きければ大きいほど誤差は小さい。正確度と名付けてもよいかもしれない）。Bravais はここで確率密度関数* $\tilde{\omega}(t)$ を導入し

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(t)dt = 1 \tag{3}$$

と定める。

p. 258

期待値*（la crainte mathématique de l'erreur）が導入されるが，誤差は“悪いこと”であろうから期待（espérance，仏語では希望という意味もある）でなく，crainte（心配，恐れ）という用語を用いている。直訳すれば“心配値”とでもすることになるが，以下“誤差の見積もり値”と訳すことにする。さて，$u = \tilde{\omega}(t)$ を確率密度*（l'ordonnée d'une courbe plane dont t est l'absciss）とすると，Bravais は賭けの例を用いて，良い結果と悪い結果が打ち消しあうように，正の誤差と負の誤差も打ち消しあって，厳密な証明とは言えないものの，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(t)t\,dt = 0 \tag{4}$$

が，成立すると考える。すると

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(t)t\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega}(t)\,dt} = t_1$$

p. 259

という量を定義した場合，$t_1 = 0$ は測定法の妥当性の指標となる（sert à vérifier la légitimité de la méthode）と述べている。

測定要素が大量の観察によって得られた場合，誤差確率は He^{-ht^2} と書け，（3）より $H = \sqrt{h/\pi}$ を得るので，確率は $\sqrt{h/\pi}e^{-ht^2}dt$ と書けることになる（中心極限定理*による正規分布*の仮定である）。さて，

p. 260

（2）の $\delta a, \delta b, \delta c, \ldots$ を $m, n, p, \ldots$ と書くことにし，$h_m, h_n, h_p, \ldots$ を module とすると，m が m と $m+dm$ の間に生起する確率は $\sqrt{h_m/\pi}e^{-h_m m^2}dm$ と表現できる。ここで Bravais はいくつかの積分公式を証明なしに導入するが，特に，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p+2rz+qz^2)}dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{q}}e^{-\frac{pq-r^2}{q}} \tag{AB1}$$

が重要である。（AB1）の証明をしておくと，まず代数計算で

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(qz^2+2rz+p)}dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q(z+\frac{r}{q})^2+\frac{r^2}{q}-p}dz = e^{-\frac{pq-r^2}{q}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q(z+\frac{r}{q})^2}dz\,.$$

次に，積分部分を計算するのだが，$e^{-q(z+\frac{r}{q})^2}=e^{-\frac{1}{2}(\frac{z+\frac{r}{q}}{\sqrt{1/2}\sqrt{1/q}})^2}$であり，よって$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1/2}\sqrt{1/q}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{z+\frac{r}{q}}{\sqrt{1/2}\sqrt{1/q}})^2}$は平均$-\frac{r}{q}$　分散$(\sqrt{1/2}\sqrt{1/q})^2$の正規分布であり，正規分布の性質より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1/2}\sqrt{1/q}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{z+\frac{r}{q}}{\sqrt{1/2}\sqrt{1/q}})^2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1/2}\sqrt{1/q}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(\frac{z+\frac{r}{q}}{\sqrt{1/2}\sqrt{1/q}})^2}dz=1$$

なので$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(\frac{z+\frac{r}{q}}{\sqrt{1/2}\sqrt{1/q}})^2}dz=\sqrt{2\pi}\sqrt{1/2}\sqrt{1/q}=\sqrt{\pi/q}$となる。以上より（AB1）が成り立つ。

CAS DU POINT ASSUJETTI À SE TROUVER SUR UNE DROITE DONNÉE .
（直線上で観察される点の場合）

データが一次元の場合の誤差 x は，測定要素 a, b, c の誤差である m, n, p と，（1）の偏微分係数 $A,B,C,...$ によって

$$\delta x=x=Am+Bn+Cp+....... \tag{5}$$

のように関係する（（2）も参照されたい）。m, n, p は独立変数であり，x は従属変数である。

p. 261

元論文ではこの後，x, y を，あるいは x, y, z を，従属変数と考えることになる。ラプラスは（5）式のような場合，x が x と $x+dx$ の間に落ちる確率は$\sqrt{h_x/\pi}e^{-h_x x^2}dx$であり，（中心極限定理*である。p. 257 の$e^{-ht}$との整合性はやや不明瞭であるが，少なくとも（5）の項数が多ければ中心極限定理は成立するであろう），またこの式内のh_xは，x の散らばりを示す module で，以下のように与えられるとした。

$$\frac{1}{h_x}=\frac{A^2}{h_m}+\frac{B^2}{h_n}+\frac{C^2}{h_p}.... \tag{6}$$

（6）は独立な確率変数の和の分散に相当し，今様に言えば$s_x^2=A^2s_m^2+B^2s_n^2+C^2s_p^2+.....$であろう。Bravais は次に，$x=Am+Bn$ というもっとも簡単なケースを考え，x の確率密度を求める。まず座標平面（m, n）を考える。（今までは，求めたい点 x, y の座標系を考えていたが，ここでは誤差 m, n の座標系を考えている）。すると，（m, n）の近傍の確率は

$$\frac{\sqrt{h_m h_n}}{\pi}e^{-(h_m m^2+h_n n^2)}\,dmdn \tag{AB2}$$

となるだろう。（元論文にはミスプリがある）。

p. 262

ここで（*m, n*）座標系を（*m, x*）座標系に変換する。そのために$n=\dfrac{x-Am}{B}$，$dn=\dfrac{dx}{B}$を（AB2）に代入すると

$$\frac{1}{B}\frac{\sqrt{h_m h_n}}{\pi}e^{-(h_m m^2+h_n\left(\frac{x-Am}{B}\right)^2)}dmdx=\frac{1}{B}\frac{\sqrt{h_m h_n}}{\pi}e^{-(h_m m^2+\frac{h_n}{B^2}\left(x^2-2Amx+A^2m^2\right))}dmdx$$
$$=\frac{1}{B}\frac{\sqrt{h_m h_n}}{\pi}e^{-(h_m+\frac{h_nA^2}{B^2})m^2+2\frac{Ah_nx}{B^2}m-\frac{h_n}{B^2}x^2}dmdx$$

これを*m*で積分すると，公式（AB1）を用いて

$$\frac{1}{B}\frac{\sqrt{h_m h_n}}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h_m+\frac{A^2}{B^2}h_n}}e^{-\frac{\frac{h_mh_n}{B^2}x^2}{h_m+\frac{A^2}{B^2}h_n}}dx=\sqrt{\frac{h_mh_n}{\pi(A^2h_n+B^2h_m)}}e^{-\frac{h_mh_n}{A^2h_n+B^2h_m}x^2}dx$$

となる。$\dfrac{h_mh_n}{\pi(A^2h_n+B^2h_m)}=h_x$とおけば，再び正規分布$\sqrt{\dfrac{h_x}{\pi}}e^{-h_xx^2}$が現れる。以上により，変数変換*と積分消去*により*x*の確率密度を導出したことになる。さて（6）のように3つ以上独立変数があるときも

$$x=Am+Bm\text{ から },\ \frac{1}{h_x}=\frac{A^2}{h_m}+\frac{B^2}{h_n},$$

$$x'=x+Cp\text{ から，}\ \frac{1}{h_{x'}}=\frac{1}{h_x}+\frac{C^2}{h_p},$$

$$x''=x'+Dq\text{ から}\frac{1}{h_{x''}}=\frac{1}{h_{x'}}+\frac{D}{h_q}$$

とすれば，上記の方法は一般的に成立する。

ここでBravaisは誤差の見積もり値（crainte mathématique）を

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\sqrt{\frac{h_x}{\pi}}e^{-h_xx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi h_x}}\tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\sqrt{\frac{h_x}{\pi}}e^{-h_xx^2}dx=\frac{1}{2h_x}\tag{8}$$

とする。尚，（7）式はこのままでは誤りであるが，積分範囲を［0, ∞］とすれば（切断正規分布*とすれば）正しい。

p. 263

CAS D’UN POINT ASSUJETTI À SE TROUVER DANS UN PLAN DONNÉ.
（平面上で観察される点の場合）

ここから本題である平面における誤差の問題となる。まず x, y を平面上の真の点とする。すると

$$\begin{aligned} x &= Am + Bn + Cp + \ldots\ldots. \\ y &= A'm + B'n + C'p + \ldots\ldots. \end{aligned} \tag{9}$$

となる。x と y の module は

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_x} &= A^2\frac{1}{h_m} + B^2\frac{1}{h_n} + C^2\frac{1}{h_p}\ldots. \\ \frac{1}{h_y} &= A'^2\frac{1}{h_m} + B'^2\frac{1}{h_n} + C'^2\frac{1}{h_p}\ldots. \end{aligned} \tag{6 bis}$$

となり，さらに

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_x} &= \sum \frac{A^2}{h_m} = \alpha_0 \\ \frac{1}{h_y} &= \sum \frac{A'^2}{h_m} = \alpha_1 \end{aligned} \tag{10}$$

のように置く。ここで元論文で唯一“corrélation”という語が出現する。すなわち

La coexistence des mêmes variables *m, n, p..* dans les équations simultanées en *x* et *y,* amène une corrélation telle, que les modules *hx, hy ,* cessent de représenter la possibilité des valeurs simultanées de (*x,* y) sous le vrai point de vue de la question.

（同一の変数 m, n, p が x, y の連立方程式（9）に存在するため相関が現れ，module hx, hy は，厳密に問題を捉えるなら，同時値（x, y）の（存在）可能性の程度を表現しなくなる。）

　ここで m, n, p … に固定値 $m{=}m,\ n{=}n,\ p{=}p$ を与えると，m が m と $m{+}dm$ の間に落ちる確率は $\sqrt{\frac{h_m}{\pi}}e^{-h_m m^2}dm$（元論文では dm が抜けている），n が n と $n{+}dn$ の間に落ちる確率は $\sqrt{\frac{h_n}{\pi}}e^{-h_n n^2}dn$，等々となるので

p. 264

　それらの同時確率は

$$\sqrt{\frac{h_m}{\pi}\frac{h_n}{\pi}\frac{h_p}{\pi}\cdots}e^{-(h_m m^2 + h_n n^2 + h_p p^2 \ldots)}\,dmdndp\cdots \tag{11}$$

で与えられる。さて Bravais は，（9）に補助変数を付け加えて，独立変数（データ変数の数）と従

属変数（推定されるべき値）の数が形式的に同じになるようにする。

$$\left.\begin{array}{l} x = Am + Bn + Cp + \ldots\ldots \\ y = A'm + B'n + C'p + \ldots\ldots \end{array}\right\}\text{元からあった方程式}$$

$$\left.\begin{array}{l} z = A''m + B''n + C''p + \ldots\ldots \\ \quad\vdots \\ v = A^{(i)}m + B^{(i)}n + C^{(i)}p + \ldots \\ w = A^{(l)}m + B^{(l)}n + C^{(l)}p + \ldots \end{array}\right\}\text{後から付け加えた分}$$

ここで，新しくつけ加えられた部分の係数 A'', B'' 等々は任意の定数である。このような変数の付加は線形代数の標準的手法，特に逆行列，を使用可能にするのを目的とする。以上より二組の連立方程式（double système d'équations）

$$\begin{array}{l} x = Am + Bn + Cp + \ldots\ldots \\ y = A'm + B'n + C'p + \ldots\ldots \\ z = A''m + B''n + C''p + \ldots \\ \quad\vdots \\ v = A^{(i)}m + B^{(i)}n + C^{(i)}p + \ldots \\ w = A^{(l)}m + B^{(l)}n + C^{(l)}p + \ldots \end{array} \tag{KS1}$$

と（逆行列を用いて導出される）

$$\begin{array}{l} m = \alpha x + \beta y + \ldots + \theta v + \lambda w \\ n = \alpha' x + \beta' y + \ldots + \theta' v + \lambda' w \\ p = \alpha'' x + \beta'' y + \ldots + \theta'' v + \lambda'' w \\ \qquad\vdots \end{array} \tag{KS2}$$

が得られる。すなわち

$$\begin{array}{l} x = \sum Am \\ y = \sum A'm \\ \quad\vdots \\ w = \sum A^{(l)}m \end{array} \tag{12}$$

$$\begin{array}{l} m = \sum \alpha x \\ n = \sum \alpha' x \\ \mathrm{p} = \sum \alpha'' x \\ \quad\vdots \end{array} \tag{13}$$

である（KS3.1, KS3.2 も参照されたい）。加算記号の使い方は現在とはやや異なる。実例を見て判断して頂きたい。

p. 265–266

Bravais はここで（11）の m, n, p 等を x, y, z に置き換えようとする。これに成功すれば，その結果の式は求めたい x, y 等の確率密度関数*になるであろう。Bravais の行おうとしていることは，変数変換*に他ならない。p. 265 から p. 266 にかけて Bravais は変数変換のための行列式*の概念とその導出法を解説する。行列式*は，Laplace（1772）の線形代数では，*résultante* と呼ばれており，記法

は特殊であるが，小行列式の表現能力は現在の標準記法より優れているかも知れない。Laplaceの記法では，カッコの中に計算すべき行列式の対角要素を順番に並べることにより行列式を表記する。例えば

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \lambda' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \lambda'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \lambda''' \end{pmatrix}$$

を例とすると，

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \lambda' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \lambda'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \lambda''' \end{vmatrix} = (\alpha\beta'\gamma''\lambda'''), \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \lambda \\ \beta'' & \gamma'' & \lambda'' \\ \beta''' & \gamma''' & \lambda''' \end{vmatrix} = (\beta\gamma''\lambda'''), \begin{vmatrix} \beta'' & \lambda'' \\ \beta''' & \lambda''' \end{vmatrix} = (\beta''\lambda''')$$

といった具合である。変数変換はラプラス流表記の行列式を用いたヤコビアンを用いて

$$dm\,dn\,dp\ldots = \frac{dx\,dy\,dz\ldots}{(AB'C''\ldots)} \tag{15}$$

で与えられる。

p. 267

（15）を用いて変数変換を行うと

$$\begin{aligned} (11) &= \sqrt{\frac{h_m}{\pi}\frac{h_n}{\pi}\frac{h_p}{\pi}\ldots} e^{-(h_m m^2 + h_n n^2 + h_p p^2 \ldots)}\, dmdndp\ldots \\ &= \frac{1}{(AB'C''\ldots)} \sqrt{\frac{h_m}{\pi}\frac{h_n}{\pi}\frac{h_p}{\pi}\cdots} e^{-(h_m(\sum \alpha x)^2 + h_n(\sum \alpha' x)^2 + \ldots)} dx\,dy\ldots dvdw \end{aligned} \tag{16}$$

が得られる（$\sum \alpha x, \sum \alpha' x$ 等の読み方については（KS1, KS2, 12, 13）参照)。（16）を w で積分すれば，$x, y, \ldots, v$ の関数となる。その時，（KS1）の w の係数 $A^{(l)}, B^{(l)}, C^{(l)}, \ldots$ は（これらは形式的に導入された係数であるので）完全に消去されなければ困る。消去の方法はp. 267–p. 268で示される。

ところで（16）式では xy の項が出現する，これが相関*の源泉である。この項の係数は α, β, h_m 等々からなるが，元をたどれば（12）の A, B 等々，さらに元をたどれば（2）式の $\partial\phi/\partial a$，$\partial\phi/\partial b$ の関数である。相関とは，結局のところ（1）の偏微分係数の関数であり，偏微分係数は推定に用いられる関数の性質に当然依存する（付録3も参照されたい。結局偏微分係数の内積が重要なのがわかる)。一方，誤差の源泉は測定機器や測定手続きの挙動のムラのようなものが根源になっているのであろう。

ここでBravaisは4変数の例を出して論を進める。

例　４変数（４観測要素あるいは４データ）の場合

$$
\begin{aligned}
m &= \alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda w = \sum \alpha x + \lambda w \\
n &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \lambda' w = \sum \alpha' x + \lambda' w \\
p &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \lambda'' w = \sum \alpha'' x + \lambda'' w \\
q &= \alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \lambda''' w = \sum \alpha''' x + \lambda''' w
\end{aligned}
\qquad \text{(AB3)}
$$

（AB3）では加算記号の使い方が変則的なのに注意されたい。
元論文には直接書かれていないが（12）に相当する下の式は当然考慮されなければならない。

$$
\begin{aligned}
x &= Am + Bn + Cp + Dq \\
y &= A'm + B'n + C'p + D'q \\
z &= A''m + B''n + C''p + D''q \\
w &= A'''m + B'''n + C'''p + D'''q
\end{aligned}
$$

この二組の連立方程式を行列表記*すれば

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{(KS3.1)} \qquad \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \lambda' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \lambda'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \lambda''' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad \text{(KS3.2)}
$$

二つの行列は互いに逆行列*になっていることになる。尚（KS3.1）の行列の下の２行は任意の定数であり，逆行列が存在する範囲で自由に定義してよい。そこで下記の（KS4.1）ように定義してやれば，逆行列も（KS4.2）の形になり，以下の議論が非常に簡略化できるのだが，Bravais は気付かなかったようである。

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{(KS4.1)} \qquad \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \lambda' \\ 0 & 0 & \gamma'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda''' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad \text{(KS4.2)}
$$

（16）に（AB3）の関係を代入すると

$$
(16) \to \frac{1}{(AB'C''D''')} \sqrt{\frac{h_m}{\pi} \frac{h_n}{\pi} \frac{h_p}{\pi} \frac{h_q}{\pi}}
$$
$$
\times e^{-(h_m(\sum \alpha x + \lambda w)^2 + h_n(\sum \alpha' x + \lambda' w)^2 + h_p(\sum \alpha'' x + \lambda'' w)^2 + h_q(\sum \alpha''' x + \lambda''' w)^2)} dx\,dy\,dzdw
$$

となる。ここで指数部分を整理すると

$$\begin{aligned}
&h_m(\sum \alpha x+\lambda w)^2+h_n(\sum \alpha' x+\lambda' w)^2+h_p(\sum \alpha'' x+\lambda'' w)^2+h_q(\sum \alpha''' x+\lambda''' w)^2 \\
&=\left(h_m(\sum \alpha x)^2+h_n(\sum \alpha' x)^2+h_p(\sum \alpha'' x)^2+h_q(\sum \alpha''' x)^2\right) \\
&+2\left(\lambda h_m \sum \alpha x+\lambda' h_n \sum \alpha' x+\lambda'' h_p \sum \alpha'' x+\lambda''' h_q \sum \alpha''' x\right) w \\
&+\left(\lambda^2 h_m+\lambda'^2 h_n+\lambda''^2 h_p+\lambda'''^2 h_q\right) w^2
\end{aligned}$$

とすることができる。そこで（AB1）を使って w で積分すると（積分消去）

$$(16)=\frac{1}{(AB'C''D''')}\sqrt{\frac{h_m}{\pi}\frac{h_n}{\pi}\frac{h_p}{\pi}\frac{h_q}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^2 h_m+\lambda'^2 h_n+\lambda''^2 h_p+\lambda'''^2 h_q}} \tag{17}$$

$$\times e^{-\frac{\left(h_m(\sum \alpha x)^2+h_n(\sum \alpha' x)^2+h_p(\sum \alpha'' x)^2+h_q(\sum \alpha''' x)^2\right)\left(\lambda^2 h_m+\lambda'^2 h_n+\lambda''^2 h_p+\lambda'''^2 h_q\right)-\left(\lambda h_m \sum \alpha x+\lambda' h_n \sum \alpha' x+\lambda'' h_p \sum \alpha'' x+\lambda''' h_q \sum \alpha''' x\right)^2}{\left(\lambda^2 h_m+\lambda'^2 h_n+\lambda''^2 h_p+\lambda'''^2 h_q\right)}} dx\,dy\,dz$$

となる。このようにwは比較的簡単に消去できるが，wを導入した時に導入した仮の変数 A''', B''', C''', D''' が消去できなければ，大変困る。ところが大変ありがたいことに，自然に消去できてしまうのをBravaisは示す。さて，付録にある連立方程式の理論より（余因子法*による逆行列）

$$\lambda=-\frac{(BC'D'')}{(AB'C''D''')},\ \lambda'=\frac{(AC'D'')}{(AB'C''D''')},\ \lambda''=-\frac{(AB'D'')}{(AB'C''D''')},\ \lambda'''=\frac{(AB'C'')}{(AB'C''D''')},$$

となる。その理由は余因子法*による逆行列の公式

$$\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \lambda' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \lambda'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \lambda''' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$=1/(AB'C''D''')\begin{pmatrix} (B'C''D''') & -(BC''D''') & (BC'D''') & -(BC'D'') \\ -(A'C''D''') & (AC''D''') & -(AC'D''') & (AC'D'') \\ (A'B''D''') & -(AB''D''') & (AB'D''') & -(AB'D'') \\ -(A'B''C''') & (AB''C''') & -(AB'C''') & (AB'C'') \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

が成立するからである（Note, p. 327,（Q）式）。

p. 268

そこで，（17）の係数部分は

$$=\frac{1}{\cancel{(AB'C''D''')}}\sqrt{\frac{h_m}{\pi}\frac{h_n}{\pi}\frac{h_p}{\pi}\frac{h_q}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{(BC'D'')^2 h_m+(AC'D'')^2 h_n+(AB'D'')^2 h_p+(AB'C'')^2 h_q}}$$

となる。次に（17）の指数部分の分子を展開整理すると，付録1で示すように

$$h_m h_n(\lambda'\sum\alpha x-\lambda\sum\alpha' x)^2+h_m h_p(\lambda''\sum\alpha x-\lambda\sum\alpha'' x)^2+h_m h_q(\lambda'''\sum\alpha x-\lambda\sum\alpha''' x)^2$$
$$+h_n h_p(\lambda''\sum\alpha' x-\lambda'\sum\alpha'' x)^2+h_n h_q(\lambda'''\sum\alpha' x-\lambda'\sum\alpha''' x)^2+h_p h_q(\lambda'''\sum\alpha'' x-\lambda''\sum\alpha''' x)^2$$

となるが，総ての項は（$\lambda'\alpha-\lambda\alpha'$）のような項を含み，さらに Note（p. 327,（R）式）の結果から

$$(\lambda'\alpha-\lambda\alpha')=\frac{(C'D'')}{(AB'C''D''')} \quad \text{（AB4）}$$

等々と変形でき，さらに分母は同一の行列式（$AB'C''D'''$）となるのが示されるので（この関係の導出は難解である。付録 2 参照），指数部分でも，分子と分母の（$AB'C''D'''$）の項が打ち消しあって全部消える。消去したい仮の定数 A''', B''', C''', D''' はすべて（$AB'C''D'''$）の中に含まれているので，以上の操作より A''', B''', C''', D''' はすべて消去されたことになる。次に z の積分消去を試みるわけであるが，w を消去した手続きと同様の経緯をたどり，まず，（17）式の最終形の指数部分を z の二次関数として書き直し，再び（AB1）を適用すれば，z も消去できるはずで結局

$$\frac{K}{\pi}e^{-(ax^2+2cxy+by^2)}dxdy \quad \text{（18）}$$

を得る（なお Bravais は関数形を示しただけで z の消去を完遂していない。現在の知識を用いて解ききれば付録 3 のようになろう）。そして K,a,b,c を定めるのが次の課題となる。

もし Bravais が（KS3.1）ではなく（KS4.1）から出発したのなら，そもそも消去するべき仮の定数が存在しないので上記のような複雑な議論は不要となり，（18）に至る道程は大幅に簡略化できたはずであるが，もちろん結果に変わりはない。

p. 269

平面上の確率密度を $\tilde{\omega}$（la probabilité pour que le point tombe dans une portion finie quelconque de la surface du plan）を

$$\frac{\partial^2\tilde{\omega}}{dxdy}=\frac{K}{\pi}e^{-(ax^2+2cxy+by^2)} \quad \text{（19）}$$

として，-∞から∞まで y で積分すると

$$\frac{\partial\tilde{\omega}}{dx}=\frac{K}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{b}}e^{-\frac{ab-c^2}{b}x^2}$$（x についての周辺分布*である。x で積分すると 1 になる）（20）

が得られる。また，この場合，x の確率密度は

$\dfrac{\sqrt{h_x}}{\sqrt{\pi}}e^{-h_x x^2}$ と書けるはずなので，$\dfrac{1}{h_x}=\dfrac{b}{ab-c^2}=\dfrac{b}{K^2}$ が得られる。

p. 270

同様に（19）を -∞から∞まで x で積分すると

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{dy} = \frac{K}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{ab-c^2}{a}y^2}$$ （y についての周辺分布*である。y で積分すると 1 になる。）　(21)

が得られ，ここから $\frac{1}{h_y} = \frac{a}{ab-c^2} = \frac{a}{K^2}$ となる。(10) と上の結果を組み合わせると

$\frac{1}{h_x} = \alpha_0 = \frac{b}{K^2}$，$\frac{1}{h_y} = \alpha_1 = \frac{a}{K^2}$ であるから，

$$\left.\begin{aligned} a &= K^2\alpha_1 \\ b &= K^2\alpha_0 \\ K^2 &= ab - c^2 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

という3つの方程式を得る。(18) には4つの未知数があったから，このままでは，方程式の数が足りず未知数が決定できない。

ちなみに，ここで

$$\rho = -\frac{c}{\sqrt{ab}} \tag{KS5}$$

とおけば (22) より $K^2 = ab(1-\frac{c^2}{ab}) = K^4\alpha_0\alpha_1(1-\rho^2)$ であり，よって $K^2 = \frac{1}{\alpha_0\alpha_1(1-\rho^2)}$ であり，(KS5) より $c = -\rho\sqrt{ab} = -\rho K^2\sqrt{\alpha_0\alpha_1} = -\rho\frac{1}{\sqrt{\alpha_0\alpha_1}(1-\rho^2)}$ となる。この結果を (22) と共に (18) に代入すると

$$\frac{K}{\pi}e^{-(ax^2+2cxy+by^2)} \Rightarrow \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha_0\alpha_1(1-\rho^2)}} e^{-(\frac{x^2}{\alpha_0(1-\rho^2)} - 2\rho\frac{1}{\sqrt{\alpha_0\alpha_1}(1-\rho^2)}xy + \frac{y^2}{\alpha_1(1-\rho^2)})} \tag{KS6}$$

となり，50年後に Pearson（1896）が導いた式と同等の2変量正規分布となる。残念なことに，(KS5) は Bravais が思いつかなかったパラメトライゼーションである。もしこの形を示していれば，Bravais が相関係数の創始者と言われていただろう。

Bravais は（22）を解くための，4つ目の方程式を次のように求めた。まず座標軸を μ だけ回転し

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\mu + y\sin\mu \\ y' &= -x\sin\mu + y\cos\mu \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

とする。これを $ax^2 + 2cxy + by^2$ に代入すると，逆行列を用いて

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\mu - y'\sin\mu \\ y &= x'\sin\mu + y'\cos\mu \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

だから，

$$ax^2+2cxy+by^2=a(x'\cos\mu-y'\sin\mu)^2+2c(x'\cos\mu-y'\sin\mu)(x'\sin\mu+y'\cos\mu)+b(x'\sin\mu+y'\cos\mu)^2$$
$$=a(x'^2\cos^2\mu-2x'y'\cos\mu\sin\mu+y'^2\sin^2\mu)$$
$$+2c(x'^2\cos\mu\sin\mu+x'y'\cos^2\mu-x'y'\sin^2\mu-y'^2\cos\mu\sin\mu)$$
$$+b(x'^2\sin^2\mu+2y'x'\sin\mu\cos\mu+y'^2\cos^2\mu)$$
$$=(a\cos^2\mu+2c\cos\mu\sin\mu+b\sin^2\mu)x'^2$$
$$+(a\sin^2\mu-2c\cos\mu\sin\mu+b\cos^2\mu)y'^2$$
$$+\{(2b-2a)\cos\mu\sin\mu+2c(\cos^2\mu-\sin^2\mu)\}x'y'$$

すなわち

$$a'x'^2+2c'x'y'+b'y'^2 \tag{25}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} a'&=a\cos^2\mu+2c\cos\mu\sin\mu+b\sin^2\mu\\ b'&=a\sin^2\mu-2c\cos\mu\sin\mu+b\cos^2\mu\\ c'&=(b-a)\cos\mu\sin\mu+c(\cos^2\mu-\sin^2\mu)\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

p. 271

となる。この式に対して，（20）（21）に相当する積分を行えば，（22）に対応する

$$\left.\begin{aligned} a'&=K'^2\alpha_1'\\ b'&=K'^2\alpha_0'\\ K'^2&=a'b'-c'^2\end{aligned}\right\}$$

が得られる。上式の比をとると

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_0'}=\frac{a'}{b'}=\frac{a\cos^2\mu+2c\cos\mu\sin\mu+b\sin^2\mu}{a\sin^2\mu-2c\cos\mu\sin\mu+b\cos^2\mu}=\frac{K^2\alpha_1\cos^2\mu+2c\cos\mu\sin\mu+K^2\alpha_0\sin^2\mu}{K^2\alpha_1\sin^2\mu-2c\cos\mu\sin\mu+K^2\alpha_0\cos^2\mu}$$
$$=\frac{\alpha_1\cos^2\mu+2\dfrac{c}{K^2}\cos\mu\sin\mu+\alpha_0\sin^2\mu}{\alpha_1\sin^2\mu-2\dfrac{c}{K^2}\cos\mu\sin\mu+\alpha_0\cos^2\mu} \tag{AB5}$$

となる。一方そもそも x, y は（9）より

$$\begin{aligned} x&=Am+Bn+Cp+.......\\ y&=A'm+B'n+C'p+.......\end{aligned} \tag{9}$$

であったが，これは

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B & C & D\ldots\\ A' & B' & C' & D'\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\n\\p\\\vdots\end{pmatrix} \tag{KS7}$$

と書けるので両辺に回転行列をかけて

$$\begin{pmatrix}\cos\mu & \sin\mu\\ -\sin\mu & \cos\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\mu & \sin\mu\\ -\sin\mu & \cos\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B & C & \dots\\ A' & B' & C' & \dots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\ n\\ p\\ \vdots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A\cos\mu+A'\sin\mu & B\cos\mu+B'\sin\mu & C\cos\mu+C'\sin\mu & \dots\\ -A\sin\mu+A'\cos\mu & -B\sin\mu+B'\cos\mu & -C\sin\mu+C'\cos\mu & \dots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\ n\\ p\\ \vdots\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(A\cos\mu+A'\sin\mu)m+ & (B\cos\mu+B'\sin\mu)n+ & (C\cos\mu+C'\sin\mu)p & \dots\\ (-A\sin\mu+A'\cos\mu)m+ & (-B\sin\mu+B'\cos\mu)n+ & (-C\sin\mu+C'\cos\mu)p & \dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

と書ける。すなわち

$$x'=\sum(A\cos\mu+A'\sin\mu)m=(A\cos\mu+A'\sin\mu)m+(B\cos\mu+B'\sin\mu)n+(C\cos\mu+C'\sin\mu)p\dots$$
$$y'=\sum(-A\sin\mu+A'\cos\mu)m=(-A\sin\mu+A'\cos\mu)m+(-B\sin\mu+B'\cos\mu)n+(-C\sin\mu+C'\cos\mu)p\dots$$

である。これは（24）の別表現である。ここで，（6bis）及び（10）を思い出すと

$$\alpha_0'=\frac{1}{h_{x'}}=\frac{(A\cos\mu+A'\sin\mu)^2}{h_m}+\frac{(B\cos\mu+B'\sin\mu)^2}{h_n}+\frac{(C\cos\mu+C'\sin\mu)^2}{h_p}+\dots$$
$$\alpha_1'=\frac{1}{h_{y'}}=\frac{(-A\sin\mu+A'\cos\mu)^2}{h_m}+\frac{(-B\sin\mu+B'\cos\mu)^2}{h_n}+\frac{(-C\sin\mu+C'\cos\mu)^2}{h_p}+\dots$$

であるから，展開整理すると

$$\begin{aligned}\alpha_0'&=\frac{1}{h_{x'}}=\cos^2\mu\sum\frac{A^2}{h_m}+2\cos\mu\sin\mu\sum\frac{AA'}{h_m}+\sin^2\mu\sum\frac{A'^2}{h_m}\\ \alpha_1'&=\frac{1}{h_{y'}}=\sin^2\mu\sum\frac{A^2}{h_m}-2\cos\mu\sin\mu\sum\frac{AA'}{h_m}+\cos^2\mu\sum\frac{A'^2}{h_m}\end{aligned}\tag{AB6}$$

となり，（元論文ではミスプリで$h_{x'}$，$h_{y'}$とが入れ替わっている），比を取ると

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_0'}=\frac{\sin^2\mu\overbrace{\sum\frac{A^2}{h_m}}^{\alpha_0}-2\cos\mu\sin\mu\sum\frac{AA'}{h_m}+\cos^2\mu\overbrace{\sum\frac{A'^2}{h_m}}^{\alpha_1}}{\cos^2\mu\overbrace{\sum\frac{A^2}{h_m}}^{\alpha_0}+2\cos\mu\sin\mu\sum\frac{AA'}{h_m}+\sin^2\mu\overbrace{\sum\frac{A'^2}{h_m}}^{\alpha_1}}$$

$$=\frac{\alpha_0\sin^2\mu-2\cos\mu\sin\mu\sum\frac{AA'}{h_m}+\alpha_1\cos^2\mu}{\alpha_0\cos^2\mu+2\cos\mu\sin\mu\sum\frac{AA'}{h_m}+\alpha_1\sin^2\mu}\tag{AB7}$$

この比と，（AB5）と係数の比較をすると，$c/K^2 = -\sum \frac{AA'}{h_m}$となり，ここで$\beta_0 = \sum \frac{AA'}{h_m}$とおけば

$$c = -K^2 \beta_0 \tag{26}$$

となる。すると（22）から

$$ab - c^2 = (\alpha_0 \alpha_1 - \beta_0^2) K^4, \qquad 1/K^2 = \alpha_0 \alpha_1 - \beta_0^2$$

を得る。β_0 は共分散*を思わせる。さて

$$\alpha_0 \alpha_1 - \beta_0^2 = \left(\frac{A^2}{h_m} + \frac{B^2}{h_n} + \frac{C^2}{h_p} + \ldots \right) \left(\frac{A'^2}{h_m} + \frac{B'^2}{h_n} + \frac{C'^2}{h_p} + \ldots \right) - \left(\frac{AA'}{h_m} + \frac{BB'}{h_n} + \frac{CC'^2}{h_p} + \ldots \right)^2$$

であり，さらにこの式は

$$\frac{(AB' - A'B)^2}{h_m h_n} + \frac{(AC' - CA')^2}{h_m h_p} + \ldots$$

p. 272

と書けるので，（Binet–Cauchy あるいは Lagrange の恒等式。付録 1 参照）

$$\frac{1}{K^2} = \sum \frac{(AB' - A'B)^2}{h_m h_n} \tag{27}$$

となる。この値を（22）と（26）に代入すれば a, b, c すべての値が与えられる。（19）は最終的に

$$\frac{d^2 \tilde{\omega}}{dxdy} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sum \frac{(AB' - A'B)^2}{h_m h_n}}} e^{-\frac{1}{\sum \frac{(AB'-A'B)^2}{h_m h_n}} \left(x^2 \sum \frac{A'^2}{h_m} - 2xy \sum \frac{AA'}{h_m} + y^2 \sum \frac{A^2}{h_m} \right)} \tag{28}$$

あるいは

$$\frac{d^2 \tilde{\omega}}{dxdy} = \frac{K}{\pi} e^{-K^2 (\alpha_1 x^2 - 2\beta_0 xy + \alpha_0 y^2)} \tag{29}$$

となる。（28）（29）が元論文の最も重要な成果と言えよう。（29）ではα_0, α_1が逆になってようにも思えるが，これでよい。（29）は以下のようにも書ける。

$$\frac{d^2 \tilde{\omega}}{dxdy} = \frac{1}{\pi \sqrt{\alpha_0 \alpha_1 - \beta_0^2}} e^{-\frac{1}{\alpha_0 \alpha_1 - \beta_0^2} (\alpha_1 x^2 - 2\beta_0 xy + \alpha_0 y^2)}$$

$$= \frac{1}{\pi \sqrt{\alpha_0 \alpha_1 \left(1 - \left(\frac{\beta_0}{\sqrt{\alpha_0}\sqrt{\alpha_1}}\right)^2\right)}} e^{-\frac{1}{1 - \left(\frac{\beta_0}{\sqrt{\alpha_0}\sqrt{\alpha_1}}\right)^2} \left(\frac{1}{\alpha_0} x^2 - 2 \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}\sqrt{\alpha_1}} \frac{\beta_0}{\sqrt{\alpha_0}\sqrt{\alpha_1}} xy + \frac{1}{\alpha_1} y^2 \right)} \tag{KS8}$$

この式はもちろん（KS6）と同等である。あるいは行列式とベクトルを用いた表現

$$\frac{d^2\tilde{\omega}}{dxdy}=\frac{1}{\pi\sqrt{\begin{vmatrix}\alpha_0 & \beta_0\\ \beta_0 & \alpha_1\end{vmatrix}}}e^{-(x,y)\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_0\\ \beta_0 & \alpha_1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}} \tag{KS9}$$

も可能である。

Bravaisは（29）式の性質を調べるために，以下の条件を満たすよう x, y を拘束する。

$$\alpha_1 x^2-2\beta_0 xy+\alpha_0 y^2=const \tag{30}$$

この方程式は中心が原点に重なる楕円であり，主軸は一般に座標軸に重ならない。また右辺の定数の変化に従って同心楕円の無限系列を生み出し，その面積は定数に比例して変化する。この楕円の一般形を

$$ax^2+2cxy+by^2=D$$

とし，その形状を求めてみよう。Yの最大値を求めるために陰関数の微分*を用いると，

$$(ax+cy)dx+(by+cx)dy=0$$

となり，$dy=0$ と置くと，$ax+cy=0\Rightarrow x=-c/ay$ となり，これを元の楕円の方程式に代入すると y の極値は

$$a(-\frac{c}{a}y)^2+2c(-\frac{c}{a}y)y+by^2=D\rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{D}{b-c^2/a}}$$

$$ax^2+2c(-\frac{a}{c}x)x+b(-\frac{a}{c}x)^2=D\rightarrow x=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{D}{b-c^2/a}}$$

p. 273

最大値（極値）を与える点 x, y に到達する動径ベクトル（下図のOM）は，x軸から出発した半径であり，その長さはx軸との角度をTとすると，

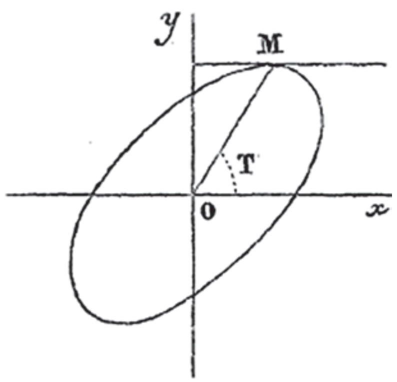

図1　Bravais（1846）p. 273.　よく引用される図である。

OMは回帰直線*。Mは極大点で $x=\frac{c}{a}\sqrt{\frac{D}{b-c^2/a}}$，$y=\sqrt{\frac{D}{b-c^2/a}}$ である。ただし $ax^2+2cxy+by^2=D$ の楕円は左に傾けて書くのが素直である。この図は $ax^2-2cxy+by^2=D$ から得られたものと解釈すべきであろう。

$\dfrac{y}{\sin T}=\dfrac{1}{\sin T}\sqrt{\dfrac{aD}{ab-c^2}}(=\operatorname{cosec}T\sqrt{\dfrac{aD}{ab-c^2}})$ で与えられる。楕円の方程式で $y=0$ とおいて，もう一つの半径を求めると $\sqrt{D/a}$ となる。そしてこの楕円の面積 s は $s=\pi\sqrt{\dfrac{aD}{ab-c^2}}\times\sqrt{\dfrac{D}{a}}=\pi\dfrac{D}{\sqrt{ab-c^2}}$ で与えられるので（c.f., Cavalieri's Principle）

$$D=\frac{s\sqrt{ab-c^2}}{\pi} \tag{31}$$

となる。これを，$K=\sqrt{ab-c^2}$ に留意しながら（29）に代入すると

$$\frac{d^2\tilde{\omega}}{dxdy}=\frac{K}{\pi}e^{-\frac{K}{\pi}s} \tag{32}$$

となる。ここから明らかになるのは，（30）で与えられる楕円の円周上の確率密度*は等しいことである。また，この確率密度は楕円が拡大縮小すると，楕円の面積に指数関数的に逆比例して変化する。そこで無限に近接した二つの楕円に囲まれる「輪」の面積を積分するならば，s は変化せず，

p. 274

$\int dxdy$ は $\int ds$，すなわち面積の増分，に変わる。そこで

$$\frac{d\tilde{\omega}}{ds}=\frac{K}{\pi}e^{-\frac{K}{\pi}s} \tag{33}$$

を得る。これは自由度の 2 のカイ二乗分布*であり指数分布*でもある。(33）を $s=0$ から $s=s_1$ まで積分すれば

$$\tilde{\omega}=(1-e^{-\frac{K}{\pi}s_1}) \tag{34}$$

を得る。そこで，$e^{-\frac{K}{\pi}s_1}$ は，面積が s_1 である楕円の外側に真の点が落ちる確率を表現することになる。

ここでは確率楕円*の考え方が正確に述べられており，Pearson（1920）も Bravais の真の貢献であると認めている部分である。

まとめ

元論文の要点は以下のようにまとめられるであろう。

1. Bravais の 2 変量正規分布には（18）の形のものと，（28）（29）の形のものがある。よく似ているのでその差異を見落としてしまうところだが，（18）は幾何学的表現であるのに対して，（28）（29）は統計量と対応のとれた表現であり，（KS6）（KS8）（KS9）で示した通り，Pearson（1896）の表現と本質的に同じものである。この観点からいえば，Bravais は相関を発見したともいえる。
2. 一方，諸統計史家が述べているように，Bravais が現代の相関「概念」を持っていなかったのも確実である。元論文 P.263 に記されているとおり何か邪魔者のように述べるだけである。
3. 統計モデルとして見るならば，（1）（2）の構成法は現在の観点からも興味深い。ただし，現

在の数理統計学の観点からみれば，技術的には初歩的な内容であるとも言える（国沢，1966, p. 104; Muirhead, 1982, p. 6, Theorem 1.2.6.）。（9）等は「なぜ相関などと言うものが生起するのか」という問題に対して一つの考え方を示している。それは後世の Galton（1889, p. 135）と同様に「共通原因の存在が相関をもたらす」ということである。相関係数を使用・解釈するための留意点であろう。

［付録1　Binet–Cauchy あるいは Lagrange の恒等式］

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} B_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} A_iB_i\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}(A_iB_j-A_jB_i)^2$$

で，$A_i=a_i\sqrt{h_i}$，$B_i=b_i\sqrt{h_i}$ と置きなおせば

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i\sqrt{h_i})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i\sqrt{h_i})^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\sqrt{h_i}b_i\sqrt{h_i}\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}(\sqrt{h_ih_j}a_ib_j-\sqrt{h_ih_j}a_jb_i)^2=\sum_{1\le i<j\le n}h_ih_j(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

すなわち

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2h_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2h_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_ih_i\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}h_ih_j(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

となる。（17）の指数部分の分子にこの公式を適用すると

$$\begin{aligned}&\left(h_m(\sum\alpha x)^2+h_n(\sum\alpha' x)^2+h_p(\sum\alpha'' x)^2+h_q(\sum\alpha''' x)^2\right)\left(\lambda^2h_m+\lambda'^2h_n+\lambda''^2h_p+\lambda'''^2h_q\right)\\&-\left(\lambda h_m\sum\alpha x+\lambda' h_n\sum\alpha' x+\lambda'' h_p\sum\alpha'' x+\lambda''' h_q\sum\alpha''' x\right)^2\\&=h_mh_n(\lambda'\sum\alpha x-\lambda\sum\alpha' x)^2+h_mh_p(\lambda''\sum\alpha x-\lambda\sum\alpha'' x)^2+h_mh_q(\lambda'''\sum\alpha x-\lambda\sum\alpha''' x)^2\\&+h_nh_p(\lambda''\sum\alpha' x-\lambda'\sum\alpha'' x)^2+h_nh_q(\lambda'''\sum\alpha' x-\lambda'\sum\alpha''' x)^2+h_ph_q(\lambda'''\sum\alpha'' x-\lambda''\sum\alpha''' x)^2\end{aligned}$$

［付録2　$(\lambda'\alpha-\lambda\alpha')=\dfrac{(C'D'')}{(AB'C''D''')}$ 等々の導出。］

この式に相当するのは Note の（R）式（p. 327）であり，導出を理解するためには Note（p. 318–p. 330）を精査する必要がある。

p. 318

しかしながら，Note では異なる記号を用いて論が進められているので注意が必要である。Bravais はまず記号を変えて，本編で

$$\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \lambda' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \lambda'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & \lambda''' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{pmatrix}$$

と書かれていた関係を

$$\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_2 & \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \\ \gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 \\ \delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(M, p. 325)}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 m + b_0 n + c_0 p + d_0 q \\ a_1 m + b_1 n + c_1 p + d_1 q \\ a_2 m + b_2 n + c_2 p + d_2 q \\ a_3 m + b_3 n + c_3 p + d_3 q \end{pmatrix} \qquad \text{(A, p. 318)}$$

と近代的書法に書きなおす。

p. 319

その上で（A）から q を消去すると

$$\begin{cases} x_0 = a_0 m + b_0 n + c_0 p + d_0 q \\ x_1 = a_1 m + b_1 n + c_1 p + d_1 q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 x_0 = d_1 a_0 m + d_1 b_0 n + d_1 c_0 p + d_1 d_0 q \\ d_0 x_1 = d_0 a_1 m + d_0 b_1 n + d_0 c_1 p + d_0 d_1 q \end{cases}$$
$$\Rightarrow d_1 x_0 - d_0 x_1 = d_1 a_0 m - d_0 a_1 m + d_1 b_0 n - d_0 b_1 n + d_1 c_0 p - d_0 c_1 p + d_1 d_0 q - d_0 d_1 q$$
$$\Rightarrow (x_0 d_1) = (a_0 d_1) m + (b_0 d_1) n + (c_0 d_1) p$$

という経過をたどり

$$\begin{aligned} x_0 d_1 - x_1 d_0 &= (x_0 d_1) = (a_0 d_1) m + (b_0 d_1) n + (c_0 d_1) p \\ x_0 d_2 - x_2 d_0 &= (x_0 d_2) = (a_0 d_2) m + (b_0 d_2) n + (c_0 d_2) p \\ x_0 d_3 - x_3 d_0 &= (x_0 d_3) = (a_0 d_3) m + (b_0 d_3) n + (c_0 d_3) p \\ x_1 d_2 - x_2 d_1 &= (x_1 d_2) = (a_1 d_2) m + (b_1 d_2) n + (c_1 d_2) p \\ x_1 d_3 - x_3 d_1 &= (x_1 d_3) = (a_1 d_3) m + (b_1 d_3) n + (c_1 d_3) p \\ x_2 d_3 - x_3 d_2 &= (x_2 d_3) = (a_2 d_3) m + (b_2 d_3) n + (c_2 d_3) p \end{aligned} \qquad \text{(B, p319)}$$

を得る。ここで $(x_0 d_1)$ は Laplace 流行列式の書法で，例えば $(x_0 d_1) = x_0 d_1 - x_1 d_0$，$(c_1 d_3) = c_1 d_3 - c_3 d_1$ である。

p. 320

さらに p の消去を試みると（B）の 2 番目と 4 番目の式から

$$(x_0 d_2)(c_1 d_2) - (x_1 d_2)(c_0 d_2) = \{(a_0 d_2)(c_1 d_2) - (a_1 d_2)(c_0 d_2)\} m + \{(b_0 d_2)(c_1 d_2) - (b_1 d_2)(c_0 d_2)\} n$$

1 番目 2 番目から

$$(x_0 d_1)(c_0 d_2) - (x_0 d_2)(c_0 d_1) = \{(a_0 d_1)(c_0 d_2) - (a_0 d_2)(c_0 d_1)\} m + \{(b_0 d_1)(c_0 d_2) - (b_0 d_2)(c_0 d_1)\} n$$

１番目４番目から

$$(x_0d_1)(c_1d_2)-(x_1d_2)(c_0d_1)=\{(a_0d_1)(c_1d_2)-(a_1d_2)(c_0d_1)\}m+\{(b_0d_1)(c_1d_2)-(b_1d_2)(c_0d_1)\}n$$

等々が得られる。この周辺の Bravais の説明は不明瞭な点が多いが，p. 321 の $(x_0c_1d_2)=(a_0c_1d_2)m+(b_0c_1d_2)n$ を導き出すのが直近の目的のはずなので，元論文を以下のように解釈した。１番目２番目からの場合，左辺を展開すると

$$\begin{aligned}
&(x_0d_1)(c_0d_2)-(x_0d_2)(c_0d_1)=x_0d_1(c_0d_2)-x_0d_2(c_0d_1)-x_1d_0(c_0d_2)+x_2d_0(c_0d_1)\\
&=x_0(\cancel{d_1c_0d_2}-d_1c_2d_0-\cancel{d_2c_0d_1}+d_2c_1d_0)-x_1d_0(c_0d_2)+x_2d_0(c_0d_1)\\
&=x_0d_0(c_1d_2)-x_1d_0(c_0d_2)+x_2d_0(c_0d_1)=d_0(x_0(c_1d_2)-x_1(c_0d_2)+x_2(c_0d_1))\\
&=d_0(x_0c_1d_2)
\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}
&(x_0d_1)(c_0d_2)-(x_0d_2)(c_0d_1)=d_0(x_0c_1d_2)\\
&=\{(a_0d_1)(c_0d_2)-(a_0d_2)(c_0d_1)\}m+\{(b_0d_1)(c_0d_2)-(b_0d_2)(c_0d_1)\}n
\end{aligned}\qquad \text{(KS10)}$$

を得る。上式の変形を見落としたためだろうか，この周辺で Bravais は，やや奇妙な議論を行っている。ここで（KS10）に，$x_0=a_0, x_0=b_0$ を代入すると

$$\begin{aligned}
&(a_0d_1)(c_0d_2)-(a_0d_2)(c_0d_1)=d_0(a_0c_1d_2)\\
&(b_0d_1)(c_0d_2)-(b_0d_2)(c_0d_1)=d_0(b_0c_1d_2)
\end{aligned}\qquad \text{(D)}$$

の関係が得られるので（やや怪しいが，これは必要条件からの攻略であろう），これを（KS10）の右辺に代入すると

$$d_0(x_0c_1d_2)=d_0(a_0c_1d_2)m+d_0(b_0c_1d_2)n$$

従って最終的に

$$(x_0c_1d_2)=(a_0c_1d_2)m+(b_0c_1d_2)n$$

を得る。これは後に使用される重要な結果である。同様に

$$\begin{aligned}
&(x_0c_1d_2)=(a_0c_1d_2)m+(b_0c_1d_2)n\\
&(x_0c_1d_3)=(a_0c_1d_3)m+(b_0c_1d_3)n\\
&(x_0c_2d_3)=(a_0c_2d_3)m+(b_0c_2d_3)n\\
&(x_1c_2d_3)=(a_1c_2d_3)m+(b_1c_2d_3)n
\end{aligned}\qquad \text{(E, p. 321)}$$

を得る。

p. 321 後半より（M）

$$\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_2 & \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 \\ \gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 \\ \delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(M)}$$

の逆行列を求めるための議論が始まる。まず p. 326 で行列式*が定義され

$$P = (a_0 b_1 c_2 d_3) \qquad \text{(P)}$$

（résultante と呼ばれている），

p. 327

さらに余因子法*による逆行列*

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{P} \begin{pmatrix} (b_1 c_2 d_3) & -(b_0 c_2 d_3) & (b_0 c_1 d_3) & -(b_0 c_1 d_2) \\ -(a_1 c_2 d_3) & (a_0 c_2 d_3) & -(a_0 c_1 d_3) & (a_0 c_1 d_2) \\ (a_1 b_2 d_3) & -(a_0 b_2 d_3) & (a_0 b_1 d_3) & -(a_0 b_1 d_2) \\ -(a_1 b_2 c_3) & (a_0 b_2 c_3) & -(a_0 b_1 c_3) & (a_0 b_1 c_2) \end{pmatrix} \qquad \text{(Q)}$$

が導出される。ここで（M）の第 1 行第 2 行から x_0 を消去すると。

$$\begin{aligned} -\beta_0 m + \alpha_0 n &= \alpha_0\beta_0 x_0 + \alpha_0\beta_1 x_1 + \alpha_0\beta_2 x_2 + \alpha_0\beta_3 x_3 - (\alpha_0\beta_0 x_0 + \alpha_1\beta_0 x_1 + \alpha_2\beta_0 x_2 + \alpha_3\beta_0 x_3) \\ &\Downarrow \\ -\beta_0 m + \alpha_0 n &= (\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)x_1 + (\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0)x_2 + (\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0)x_3 \\ &\Downarrow \\ -\beta_0 m + \alpha_0 n &= (\alpha_0\beta_1)x_1 + (\alpha_0\beta_2)x_2 + (\alpha_0\beta_3)x_3 \end{aligned}$$

となり，これを（Q）の項で置き換えると

$$\frac{(a_1 c_2 d_3)}{P} m + \frac{(b_1 c_2 d_3)}{P} n = (\alpha_0\beta_1)x_1 + (\alpha_0\beta_2)x_2 + (\alpha_0\beta_3)x_3$$

となり，（E）の第 4 行

$$(a_1 c_2 d_3)m + (b_1 c_2 d_3)n = x_1(c_2 d_3) - x_2(c_1 d_3) + x_3(c_1 d_2) = (x_1 c_2 d_3)$$

と比較すると

$$(\alpha_0\beta_1) = \frac{(c_2 d_3)}{P}, \quad (\alpha_0\beta_2) = -\frac{(c_1 d_3)}{P}, \quad (\alpha_0\beta_3) = \frac{(c_1 d_2)}{P} \qquad \text{(R)}$$

が得られる。これを本編の記号で書き換えれば

$$(\alpha\beta') = \frac{(C''D''')}{(AB'C''D''')}, \quad (\alpha\gamma') = -\frac{(C'D''')}{(AB'C''D''')}, \quad (\alpha\lambda') = \frac{(C'D'')}{(AB'C''D''')}$$

となり，例えば

$$\lambda'\alpha-\lambda\alpha'=(\alpha\lambda')=\frac{(C'D'')}{(AB'C''D''')}$$

なので，総ての項の分母が行列式（$AB'C''D'''$）なのがわかる。

［付録3　（18）を元のパラメーターだけを用いて完全に記述する。］

（18）式を現在の技術を用いて導出してみる。まず

$$m\sim N(0,\sigma_1^2),\quad n\sim N(0,\sigma_2^2),\quad p\sim N(0,\sigma_3^2),\ q\sim N(0,\sigma_4^2)$$

を独立の測定要素とし，偏微分係数の行列を

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}$$

と置くことにする。すると

$$\mathbf{x}\equiv\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \\ q \end{pmatrix}$$

であるが（KS1あるいはKS4に相当），この場合多変量正規分布の性質により（例えば, Muirhead, 1982, p. 6, Theorem 1.2.6.）

$$p(x,y,t,s)=\frac{1}{(\pi)^{4/2}}\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{A\Sigma A'}|}}e^{-\mathbf{x'(A\Sigma A')^{-1}x}}\,dxdydtds \qquad \text{(KS11)}$$

となる。ここで

$$\mathbf{A\Sigma A'}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \sigma_3^2 & \\ & & & \sigma_4^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & 1 & 0 \\ A_{14} & A_{24} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11}^2\sigma_1^2+A_{12}^2\sigma_2^2+A_{13}^2\sigma_3^2+A_{14}^2\sigma_4^2 & A_{11}A_{21}\sigma_1^2+A_{12}A_{22}\sigma_2^2+A_{13}A_{23}\sigma_3^2+A_{14}A_{24}\sigma_4^2 & A_{13}\sigma_3^2 & A_{14}\sigma_4^2 \\ A_{11}A_{21}\sigma_1^2+A_{12}A_{22}\sigma_2^2+A_{13}A_{23}\sigma_3^2+A_{14}A_{24}\sigma_4^2 & A_{21}^2\sigma_1^2+A_{22}^2\sigma_2^2+A_{23}^2\sigma_3^2+A_{24}^2\sigma_4^2 & A_{23}\sigma_3^2 & A_{24}\sigma_4^2 \\ A_{13}\sigma_3^2 & A_{23}\sigma_3^2 & \sigma_3^2 & 0 \\ A_{14}\sigma_4^2 & A_{24}\sigma_4^2 & 0 & \sigma_4^2 \end{pmatrix}$$

である。そこで x, y 間の相関係数は

$$r = \frac{A_{11}A_{21}\sigma_1^2 + A_{12}A_{22}\sigma_2^2 + A_{13}A_{23}\sigma_3^2 + A_{14}A_{24}\sigma_4^2}{\sqrt{A_{11}^2\sigma_1^2 + A_{12}^2\sigma_2^2 + A_{13}^2\sigma_3^2 + A_{14}^2\sigma_4^2}\sqrt{A_{21}^2\sigma_1^2 + A_{22}^2\sigma_2^2 + A_{23}^2\sigma_3^2 + A_{24}^2\sigma_4^2}}$$

で与えられる。Bravais の記法に戻せば

$$r = \frac{AA'/h_m + BB'/h_n + CC'/h_p + DD'/h_q}{\sqrt{A^2/h_m + B^2/h_n + C^2/h_p + D^2/h_q}\sqrt{A'^2/h_m + B'^2/h_n + C'^2/h_p + D'^2/h_q}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{1/h_x}\sqrt{1/h_y}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{\alpha_0}\sqrt{\alpha_1}}$$

である。（KS11）の周辺分布を考慮すれば，（18）は結局（KS8）や（KS9）と同じになる。この表現から偏微分係数の内積が相関係数の発現に重要なのがわかる。また，測定要素の分散（誤差と言ってよかろう）が大きいほど，相関係数に与える影響が大きくなるというやや逆説的な性質も読み取れる。

［文献］

Bertrand, J. (1889). Calcul des Probabilités. Paris :Gauthier-Villars. (2nd ed. 1907).

Bravais, A. (1846). Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point. *Mémoires presents par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France. Sciences Mathématiques et Physiques*, 9, 255–332.

Czuber, E. (1891). Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig: Teubner.

Denis, D. J. (2000). The Origins of Correlation and Regression: Francis Galton or Auguste Bravais and the Error Theorists ? *Paper presented at the 61st Annual Convention of the Canadian Psychological Association.* http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/bravais.htm

Galton, F. (1889). Co-relations and their Measurement, chiefly from Anthropometric Data. *Proceedings of the Royal Society of London*, 45, 135–145.

Hald, A. (1998). A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930. New York: Wiley.

国沢清則（1966）．確率統計演習 1　確率　培風館

Laplace, P.-S. (1772). Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences,* 267–376.

Muirhead, R. J. (1982). Aspects of Multivariate Statistical Theory. New York :Wiley.

Pearson, K.(1896). Mathematical Contributions to the Theory of Evolution, III: Regression, Heredity and Panmixia. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London(A),* 187, 253–318.

Pearson, K. (1920). Notes on the History of Correlation. *Biometrika*, 13, 25–45.

Plackett, R. L. (1983). Karl Pearson and the Chi-squared Test. *International Statistical Review*, 51, 59–72.

椎名乾平（2013）．七つの正規分布　心理学評論，56，7–34.

Taylor, J. R. (1996). An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements. University Science Books. 林　茂雄・馬場　凉（訳）（2000）．計測における誤差解析入門　東京化学同人