

市場における価格反転の時間間隔と時間変更

—為替レート高頻度データの分析—

熊谷善彰

abstract

金融市場において価格時系列を駆動する時間は実時間以外の時間を考えた方が適切な場合があることは以前から指摘されてきた。一方、価格時系列の特徴である裾の厚い分布やボラティリティ・クラスタリングを表現する方法として時間軸を伸縮させる時間変更の手法が用いられてきた。さらに近年、利用が進んだ高頻度データにはデータの時間間隔が不等間隔であるという特徴があり、取引の時間間隔に関する研究が盛んになった。本稿では粗視化した極値の時間間隔、すなわち価格反転の時間間隔の測定をこれまでの取引間隔に関連する研究の中に位置づけると共に、極値間の時間間隔について為替レートの高頻度データを用いて分布の形状、さらに自己相関や日中効果を確認した。その結果、極値の時間間隔の分布はワイブル分布に近く、粗視化の程度が小さい場合はティック時間、大きい場合は実時間で測定した場合により指数分布に近い形状となった。これは価格反転に関して、これを一様化する時間としては粗視化の程度が小さい場合はティック時間、粗視化の程度が大きい場合は実時間が適当であることを示唆している。また、粗視化した極値の時間間隔には、ボラティリティの低い時期をティック時間で測定した場合を除いた多くの場合で有意な自己相関が観測された。

キーワード：時間間隔, 粗視化, 価格の反転, 時間変更, 指数分布, ポアソン過程, ワイブル分布

1. はじめに

金融市場において取引は売り手と買い手が価格と数量において合意することで成立する。何らかの情報の発生により、あるいは投資家の手元資金を必要とするなどの流動性要因により、取引が行われるとして、これらの発生がランダムであるとすれば、ポアソン過程^(註1)でモデル化することが自然である。しかし、市場における時間は実時間に従って均一の速度で流れているとは限らない。一年の中では年末年始、盆休み、国際的にはクリスマス休暇など、経済活動あるいは経済に影響を与える様々な活動が不活発になる時期は存在する。また、年度あるいは暦年といった区切りで決算や課税が行われるという制度上の要因もある。一週間の中でも平日と土日、一日の中では昼間と夜間では資産価格に影響を与える経済あるいは他の種々のニュースが発生する頻度は異なる。このように新しい情報あ

るいは投資家の流動性需要等の要因の発生頻度は時間的に均一ではなく、高い時期と低い時期がある。

さらに取引が行われる場が開いているかどうかという問題もある。為替市場では1週間の平日は基本的に24時間取引が行われているが、上場株式については寄り付きから大引けまでの取引時間に市場内で行われる取引が主なものである。例えば東京証券取引所においては一日の決まった時間、すなわち立会取引（前場9：00-11：00、後場12：30-15：00）の始めと終わりに板寄せが行われるが、売買立会時間中はザラ場方式となり、売り手と買い手が出した指値あるいは成行の注文により不均等な時間間隔で取引が成立していく。一日の取引については一般に取引開始直後と取引終了間際に活発に取引が行われるというU字型の状態が観察される。また昼休みを制度的に設けていない市場でも多くの場合、昼食時間は取引が不活発になる。国内の商品先物市場においては一日に数回の決まった時間に買い注文と売り注文を付け合わせる板寄せが行われる。ここでは取引の間隔は取引所によって商品毎に固定されていて、夜間や非営業日を挟むと一般に時間的に等間隔ではない。これらの市場毎の制度的な要因によって取引が成立する時刻は制約を受けていて、取引を発生させる要因が時間的に均一に発生した場合であってもこれらの取引所などの制度的、習慣的な要因によって成立した取引の時間間隔は不均等になる。さらに取引が行われることで市場においてある種のセンチメントが生じて、それが人々の期待に影響を与える場合、市場が開いているかどうかの影響はより大きくなる。

このような広い意味での季節効果の存在は1月効果、曜日効果、日中効果（1日内季節性）などと呼ばれている。これらの現象は市場を駆動する時間が実時間とは別のものであることを示唆している。実時間と別の時間の候補としては市場の開いている時間、取引数の累積（累積ティック数）、出来高の累積などが考えられる（Ghysels（2000））。

ここで金融市場における価格時系列データの特徴と、これらの時間の流れの関係について整理する。

金融市場の価格時系列データには収益率分布が正規分布より裾の厚いこと（ファットテール）、ボラティリティが高い期間と低い期間が存在すること（ボラティリティ・クラスタリング）といった特徴がある。これらはオプションの理論価格を求めるBlack-Sholes式を導出するときの仮定とは異なっている。

Black-Sholesモデルでは原資産価格が幾何ブラウン運動に従うことを仮定している。幾何ブラウン運動に従う資産価格の収益率は正規分布となる。しかし、実際の株式をはじめ多くの金融資産の収益率は正規分布よりも裾が厚いこと（ファットテール）が知られている。一般に分布の裾の厚さは（積率）尖度で測定される。正規分布の場合、尖度は3であり、金融資産の収益率の分布は尖度が3よりも大きい急尖的な分布である。急尖分布を発生させるモデルの代表的なものに時間変更を用いるモデルとジャンプ拡散モデル（Merton（1976））がある。ジャンプ拡散モデルにおけるジャンプは複合ポアソン過程に従って発生する。すなわちジャンプはポアソン過程に従って発生し、発生した場合のジャンプの大きさはその対数収益率が正規分布に従う確率変数である。ジャンプ拡散モデルは収益率にみられる裾の厚い分布の形を表現できるだけでなく、ボラティリティ・スマイル^(注2)も説明できる。

金融市場において時間を何で測るべきかについては議論がある。物理的時間、市場が開いている時

間、など幾つかの候補がある。取引が活発な時間帯は「時間」が速く流れ、閑散としている時間は「時間」がゆっくり流れていると考えることもできる。これは確率論においては時間変更という技法である。

Mandelbrot and Taylor (1967) は確率過程 $X(t)$ を先導過程 $T(t)$ というもう一つの確率過程によって時間変換した確率過程 $X(T(t))$ によって価格時系列をモデル化し、先導過程として累積取引数、あるいは累積出来高を採用することを提案した。この場合は市場において価格時系列を駆動する時間として取引件数や出来高の累積を考えている。一般にこのような、実時間 t から別の時間への時間軸の変更 $t \rightarrow T(t)$ を時間変更 (time change) と呼ぶ (時間変更についてのサーベイは林 (2009) を参照されたい)。Mandelbrot (1967, 1997) は取引時間 (trading time) と呼ばれる時間尺度を定義した。これは実際の時間 (clock time) に対して、ゆっくり進むときもあれば速く進むときもある。実時間を t 、取引時間を $T(t)$ とする。指数 H のフラクタルブラウン運動を B_H とかこう。このときマルチフラクタル時間 (multifractal time) $T(t)$ に対するフラクタルブラウン運動は $X(t) = B_H(T(t))$ で表される。

収益率自体には有意な自己相関がないが、その絶対値および二乗の自己相関は有意に大きいことも知られている。つまり価格が上がるか下がるかの方向は予想できないが、価格変動の大きさはある程度予想でき、大きな変動があった翌日は大きな変動がある可能性が高く、あまり変動しなかった翌日はあまり変動しない場合が多い。ボラティリティが高い時期は時間軸上で固まって生じる傾向がある。このボラティリティ・クラスタリングは独立な増分を持つモデル (加法過程, レヴィ過程^(注3)) では発生しない。レヴィ過程 (ジャンプ拡散過程もレヴィ過程の一つである) ではボラティリティ・クラスタリングを表現できないが、これに時間変更を施すとボラティリティ・クラスタリングを表現できる。一方、一般化自己回帰条件付不均一分散 (GARCH: Generalized Auto-Regressive Conditional Hetero-skedasticity) モデルや確率ボラティリティモデル (Taylor (1986)) によってもボラティリティ・クラスタリングを表現できる。高頻度データに関してもボラティリティ・クラスタリングが観察されている (Dacorogna et al. (2001))。ボラティリティを市場の活況度に駆動される (劣後) 確率過程 (あるいは従属過程) としてモデル化し、ボラティリティの日中変動を再現しようとした研究もある (Ghysels and Jasiak (1994))。

ここで金融市場の価格系列における時間間隔の問題について特に高頻度データについての最近の研究を概観する。金融市場において取引が行われる間隔については特に近年高頻度データが入手可能となり、一層研究が盛んになっている。高頻度データの特徴として、時間軸については連続ではなく離散的で、不等間隔であることが挙げられる。価格軸についても取引所の決めた、あるいは習慣上決まっている刻み値の単位でしか取引が成立しないことによる離散性の影響が強くなる。さらに約定価格が売り注文と買い注文の間を上下する現象があり、ビッド・アスク・バウンスと呼ばれている。これにより、約定価格の時系列について1次の自己相関は負になる。これらについては実現ボラティリティを測定する立場からは除去すべきノイズとして捉えられる一方、市場のマイクロストラクチャーを分

析する立場からは重要な情報となる。

金融市場においては価格が変動するだけでなく、取引の発生する時間間隔も変動する。取引の発生という事象を秒単位などの細かい時間尺度で観測した場合、これらの事象がポアソン過程に従って発生するとしてモデル化することが最も自然であろう。その場合、取引発生 の時間間隔は指数分布に従うことになる。しかし、近年の研究によると取引の時間間隔の分布は指数分布ではないという結果が得られている。指数分布に替る分布としてはワイブル分布^(注4)、Mittag-Leffler 型の生存関数^(注5)などが候補に挙げられている。

Scalas et.al. (2004) はダウ工業株30種 (DJIA) の高頻度データを分析し、取引時間間隔の生存確率が指数分布に従わないことを示した。Scalas (2007) は取引間隔が指数関数的に分布しないことや標準偏差が大きいといった実際のデータの特徴を再現するために複合ポアソン過程を合成したモデルを導入した。Politi and Scalas (2008) は実際の取引間隔の分布の裾野がべき則に従うという仮説を棄却した。

Mittag-Leffler 分布は時間間隔が短い場合には引き延ばされた指数分布 (stretched exponential distribution) になり、時間間隔が長い場合にはべき則に従う。Mainardi et.al. (2000) はロンドン国際金融先物オプション取引所 (LIFEE) に上場されているドイツ国債 (BUND) 先物については時間間隔の分布としてはべき則を伴う Mittag-Leffler 関数が適切であるとした。Raberto et.al. (2002) は株式市場における生存確率が200秒以内では引き延ばされた指数分布 $\exp[-(\tau/\tau_0)^\beta/\Lambda(1+\beta)]$ に従うことを示した。Ivanov et.al. (2004) はニューヨーク証券取引所 (NYSE) に上場された30銘柄の株式について取引間隔の確率密度関数はワイブル分布に従うと報告している。

Takayasu et. al. (2001) は円ドル為替レートの高頻度データを分析し、その取引間隔は直前150秒間の取引間隔の平均値で規格化するとほぼ完全に指数分布に従い、有意な自己相関も観測されないことを示した。さらに実時間やティック時間の中間の時間として規格化した取引間隔を累積した規格化時間 (Normalized time) という時間を定義した。規格化時間で考えると取引はポアソン過程に従って発生しているとみなせ、取引間隔に対しては時間が一様に流れていることになる。

取引間隔の時系列構造を記述するモデルとしては自己回帰条件付デュレーション (Autoregressive Conditional Duration, ACD) モデルが代表的である (Engle and Russell (1998))。ACD モデルは、GARCH と同様の構造を持っており、取引間隔 (デュレーション) x_i をその条件付平均 $u_i = E[x_i | \mathcal{F}_{t_i-1}]$ と確率変数 ε_i の積として定式化している。ここで確率変数 ε_i は独立同一で期待値が $1 (E[\varepsilon_i] = 1)$ 、条件付平均 u_i は過去の取引間隔 x_j ($j < i$) や条件付平均自身 u_j ($j < i$) の関数 (最も基本的なモデルでは $u_i = w + \sum_{j=1}^p \alpha_j x_{i-j} + \sum_{j=1}^q \beta_j u_{i-j}$, $w > 0, \alpha > 0, \beta > 0$) である。単位時間当たりの取引頻度に相当する取引強度をモデル化した自己回帰条件付強度モデル (Autoregressive Conditional Intensity, ACI) もある (Russell (1999))。

近年、取引の時間間隔だけではなく (時間的に連続した) 価格変動の時間間隔についての研究もなされている。Kaizoji and Kaizoji (2004) はカームタイム間隔 (calm-time interval) を固定された

閾値を上回る価格変動の発生する時間間隔として定義し、東京証券取引所に上場されている800銘柄の株価についてカムタイム間隔を測定したところ、この分布がベキ則に従っていることを見いだした。一方、Yamasaki et.al. (2005) はボラティリティが与えられた閾値を超える間隔によってボラティリティ・リターン間隔 (volatility return intervals) を定義した。ここで用いられているボラティリティは前営業日からの価格変化を標準偏差で標準化したものである。株式市場や為替市場について、閾値が標準偏差の0.6倍から15倍の範囲において、ボラティリティ・リターン間隔は指数分布ではなく、より裾野の広いベキ分布に従うことが報告されている (Wang et.al. (2007))。

時間間隔が指数関数的でない事例は価格変動だけではなく、価格変動の累積である価格時系列から求められる初通過時間 (first passage time) に関連しても報告されている。ソニー銀行のドル/円レートは参照する為替レートが0.1円以上変動する毎に更新される。Sazuka (2007, 2009) ではこのソニー銀行の為替レートが更新される時間間隔を記述する分布として、ベキ則に従う裾野を持つワイブル分布を提案した。この分布はあるクロスオーバーポイントを境としてそれぞれワイブル分布とベキ則に従う。

プラスあるいはマイナスの同じ符号の観測値の列を連 (run) という。価格時系列においては正の連は価格がその連の続く間、継続して (単調に) 上昇していることを示している。連の長さはこの価格上昇の続いている期間である。価格の上昇の連は極小値から始まり、極大値で終わる。同様に価格の下落の連は極大値から始まり、極小値で終わる。価格の反転 (price reversal) は上昇から下落への反転の場合は極大値、下落から上昇への反転の場合は極小値で起こる。連の長さは価格の上昇あるいは下落のデュレーションである。価格反転の確率が一定ではなく連の長さに依存するならば、価格変動がランダムウォークするという仮説に反する結果である。McQueen and Thorley (1994) はNYSEの月次株価について高いリターンの連が終わる確率は連の長さが長くなるほど増加することを示した。

Hautsch (2004) は価格時系列の極値と極値の間の時間間隔を directional change duration と呼んでいる。最小の価格変動 dp を決め、これよりも大きな価格変動について間隔を求めている。Hautsch (2004) の中では dp は初通過時間である price change duration に対しても aggregation level として言及されている。ビッドとアスクの中央値 midquotes を基準にして株式・債券先物の銘柄毎に3つのレベルを設定している。price change duration の場合は最も低いレベルでは平均して10の取引を含み、最も高いレベルでは平均して500の取引を含んでいる (時間にして2時間ほどに相当する)。directional change duration の自己相関は有意で、特に1次の自己相関は dp が小さい場合、0.15から0.23の間の値を取る。これは極大値から極小値までの時間間隔が短いと、これに続く極大値までの時間間隔も短くなり、極小値から極大値までの時間間隔が短いと、これに続く極小値までの時間間隔も短くなる傾向を示している。つまり、直前の directional change duration から次の directional change duration を予測できる。しかしながら、概して dp が大きいとき時間的な依存性は減少し、有意ではなくなる。また一日の中の変動を見ると取引開始直後と終了間際は取引が活発化

して間隔が短くなり、逆に昼食時には間隔が長くなる。

本論文では、極値の定義を拡張して、極値の定義における閾値に対して価格反転の時間間隔を観測する。熊谷（1999）では投資家の行動モデルにおいて投資目標時点を定式化するために粗視化の程度に応じた極値を定義した。Kumagai（2002a）では粗視化した極値に基づく総変動などの変数を定義したが、これらは時間軸を伸縮させる時間変換によって変化しない。Kumagai（2002b）では時間変換に対して不変な一種のフラクタル次元として折畳次元を定義した。これらを用いた分析については熊谷（2002a）、熊谷（2004）を参照されたい。取引間隔は実時間（物理的時間、単位は分）とティック時間（単位は累積ティック数）の2つの時間で測定することができる。Kumagai（2010）では実時間、ティック時間に加えて粗視化した極値によって駆動される時間であるC-変動時間（C-fluctuation time）を定義し、このC-変動時間の進む（瞬間的な）速度を実時間あるいはティック時間で測った。これは粗視化の程度に応じた極値の間の時間間隔を実時間とティック時間の双方で測定することに相当する。

以下、第2節では粗視化した極値の定義を述べ、第3節で2008年7月から9月のユーロ／ドルの外国為替市場の高頻度データについて分析する。

2. 価格の反転と極値

価格の連続した上昇は価格時系列の極小値で始まり、極大値で終わる。同様に価格の連続した下落（ドローダウン）は極大値で始まり、極小値で終わる。価格上昇から下落への価格反転（price reversal）は極大値において、下落から上昇への価格反転は極小値において発生する。価格反転の時間間隔（待ち時間）は価格時系列における隣り合った極値（極大値と極小値）間の時間間隔である。

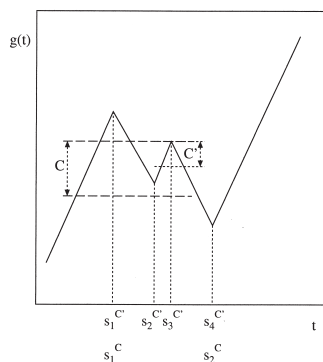


図1 C-極大値、 $g(t)$ は s_1^C においてC-極大値、 $s_1^{C'}=s_1^C$ および $s_3^{C'}$ においてC'-極大値をとる

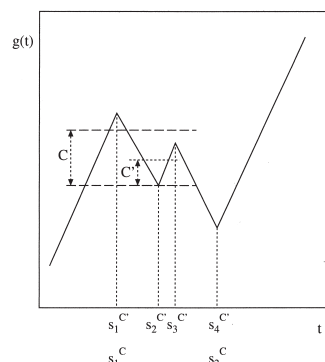


図2 C-極小値、 $g(t)$ は s_2^C においてC-極小値、 $s_4^C=s_2^C$ および $s_2^{C'}$ においてC'-極小値をとる

与えられた時系列 $g(t)$ に対して、粗視化の程度（解像度の閾値）に対応した極値を以下のように定義する（熊谷（1999））。 $g(s-d_1) < g(s) - C$, $g(s+d_2) < g(s) - C$ となるような $d_1, d_2 > 0$ が存在して区間 $[s-d_1, s+d_2]$ 内では g が s で最大値を取る場合、「 $g(t)$ は s において C -極大値を取る」という。閾値 C は極値を測定する際の価格軸における精度ともいえる。 C を大きくすると、データの細かい変動は粗視化によって観測されなくなる。つまり、 C 以下の変動は無視されることになる。通常定義による極大値は $C=0$ の場合、つまり 0-極大値である。価格上昇の連は 0-極大値において下落へと価格反転する。図 1 において破線で表示されている関数 $g(t)$ は s_1^C において C -極大値、 $s_1^{C'} = s_1^C$ と $s_3^{C'}$ において C' -極大値を取る。粗視化の程度を調節することにより、価格変動のどの部分に焦点を当てるかを定めることができる。

同様に $g(s-d_1) > g(s) - C$, $g(s+d_2) > g(s) - C$ となるような $d_1, d_2 > 0$ が存在して、 $g(s) = \min_{s-d_1 < t < s+d_2} g(t)$ であれば、「 $g(t)$ は s において C -極小値を取る」という。図 2 において関数 $g(t)$ は s_2^C において C -極小値、 $s_2^{C'} = s_2^C$ と $s_4^{C'}$ において C' -極小値を取る。価格下落の連は 0-極小値において上昇へと価格反転する。 C で粗視化した価格反転の回数は C を大きくするほど減少する。

この粗視化した極値は取引費用を考慮した場合の事後的に最適な取引と関連づけられる。売買に伴う取引費用が C のとき、 C -極小値で買い、 C -極大値で売ることが最適な取引戦略である。さらにこれらの極値を用いて一種のフラクタル次元である折畳次元が定義でき、この折畳次元は時間変換に対する不変量である（Kumagai（2002））。

与えられた閾値 C に対して、時系列 $g(t)$ が s_1^C , s_2^C , s_3^C , ... において C -極値（ C -極大値あるいは C -極小値）を取るとする。本論文では隣り合った C -極値間の時間間隔 $s_i^C - s_{i-1}^C$ の分布について考察する。価格反転のデュレーション、すなわち C -極値間の時間間隔は実時間（clock time）とティック時間（累積ティック数）で測定できる。

3. 分析

本論文で使用するデータは外国為替市場におけるドル／ユーロレートのティックデータである。金融データ提供会社 CQG により提供されているデータであり、時刻の精度は 1 分である。1 分以内の記録については発生順だけが分かり、秒単位の発生時刻は不明である。ビッド、アスク、トレードの中でトレードの価格を用いる。

ワイブルプロット（ワイブル確率紙分析）はデータがワイブル分布に従っているかどうかをグラフによって確かめる方法である。ワイブル分布の累積密度関数は

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t^m}{a}\right)\right]$$

であり、ここから

$$\ln \ln(1 - F(t)) = m \ln t - m \ln a$$

が導かれる。このためワイブル分布に従うデータを縦軸に $\ln \ln(1 - F(t))$ 、横軸に $\ln t$ をとってプロットすると、傾き m の直線となる。データが指数分布に従う場合は直線の傾きは 1 となる。

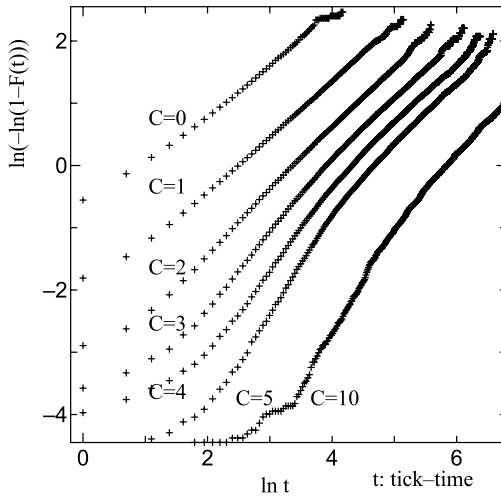


図3 C-極値間の時間間隔のワイブルプロット
EUR/USD, 2008年7月, ティック時間

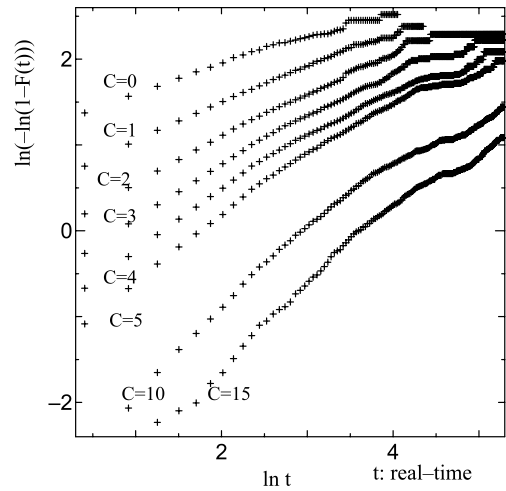


図4 C-極値間の時間間隔のワイブルプロット
EUR/USD, 2008年7月, 実時間

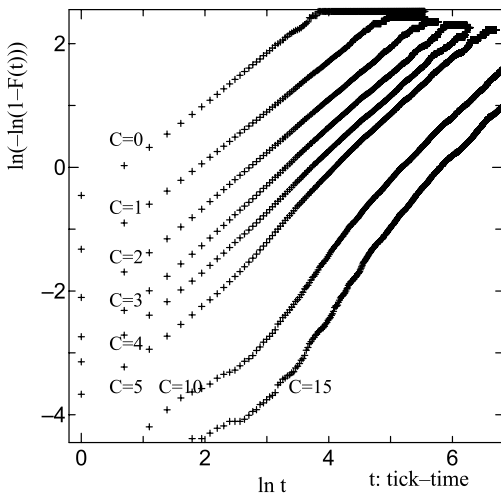


図5 C-極値間の時間間隔のワイブルプロット
EUR/USD, 2008年9月, ティック時間

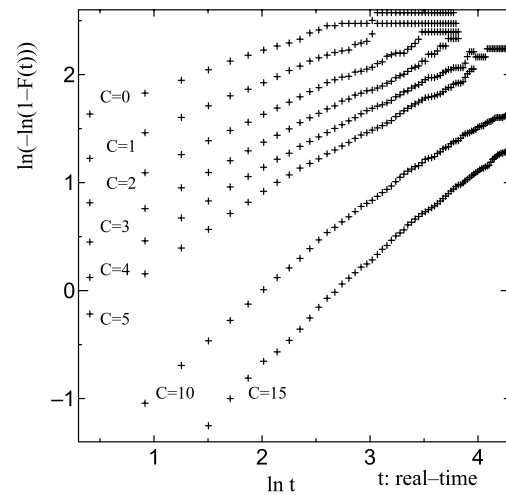


図6 C-極値間の時間間隔のワイブルプロット
EUR/USD, 2008年9月, 実時間

図3-6はC-極値間の時間間隔についてのワイブルプロットである。データの期間は、図3,4が市場が比較的静穏だった2008年7月、図5,6が9月15日のリーマンショックによりボラティリティが大きくなった9月であり、それぞれ該当月の全データを用いている。また、時間間隔を図3,5はティック時間、図4,6は実時間を用いて測定している。これらの図では傾きを見やすいように縦横

の比を全て1:1に調整している。ここで粗視化の程度を表す C は0から15pipsとしている。 $C=0$ の場合は通常の極値間の時間間隔である。1pipは外国為替市場の取引における刻み値（ありうる最も小さい価格変動）であり、ユーロ/ドルの場合は0.0001ユーロ、ドル/円の場合は0.01円である。ティック時間を用いた場合、 $C=0$ から5pipsまでの間、傾き m は0.8-0.9位の値で安定している。特に市場のボラティリティが大きくなった2008年9月の場合が顕著だが、 C を変化させていったときの曲線は $C=0$ から4pipsまでの間、直線となり、互いに概ね平行である。市場が平穏だった7月については C が3pips以上になると時間間隔の短い部分で直線から外れ、平行ではなくなる。実時間で測定した場合、傾きは1よりも小さく、 C が大きくなるほど次第に傾きを大きくなり、 $C=15$ pipsでは30分以下の範囲で傾きはほぼ1である。

このように粗視化の程度が小さい場合、実時間ではなくティック時間で測定した方が極値間の時間間隔が指数分布に近いことはティック時間が市場における価格変動を進展させる「時間」として適切であることを示唆している。同様に粗視化の程度が大きい場合、実時間で測定した方が極値間の時間間隔が指数分布に近く、実時間が価格変動を進展させる時間として適切なことを示唆している。

実時間で測定する場合、本論文で使用しているデータにおいては時刻の記録が分単位である。分単位で記録された時刻の差として求めた時間間隔が0分であるということは、取引時刻の差が0秒より大きく60秒未満であることを意味している。つまり、実際の時間差との誤差は平均して30秒である。これに対して0分以外の時間間隔については測定の誤差はマイナス60秒からプラス60秒までの範囲であり、平均すると0秒である。時間間隔の分布を求める際、この点については補正を行っている。

Kumagai (2010) では同時期の1週間のデータについて集計して分析している。小さい C に対してはティック時間で測定した場合により指数分布的であり、大きな C に対しては実時間で測定した場合により指数分布的であった。最も小さい閾値 $C(1-2\text{ pips})$ については C -極値間の時間間隔はティック時間で測った場合、指数分布的である。市場のボラティリティが大きくなっている状況では、閾値 $C(1-4\text{ pips})$ に対しても C -極値間の時間間隔は指数分布的になった。市場がボラティリティが低く、平穏であるとき、 $C(3-5\text{ pips})$ 程度の閾値に対しては実時間で測定した C -極値間の時間間隔がより指数分布的であった。市場のボラティリティが大きくなった状態では、さらに大きな閾値 $C(5-15\text{ pips})$ に対して実時間で測定した C -極値間の時間間隔が指数分布的になった。以上の結果は一週間のデータから時間間隔を片対数グラフにプロットしてその形状を観察したものである。本論文における1ヶ月間のデータの分析は上記の結果と整合的であるが、ワイブルプロットによると正確には指数分布に近いワイブル分布で表現する方が適切である。

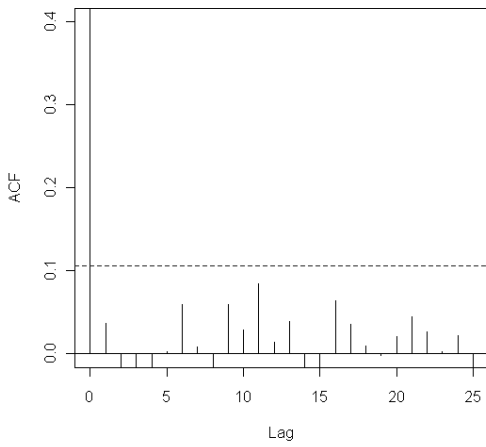


図7 C-極値間の時間間隔の自己相関（ティック時間， $C=3\text{pips}$ ）EUR/USD，2008年7月

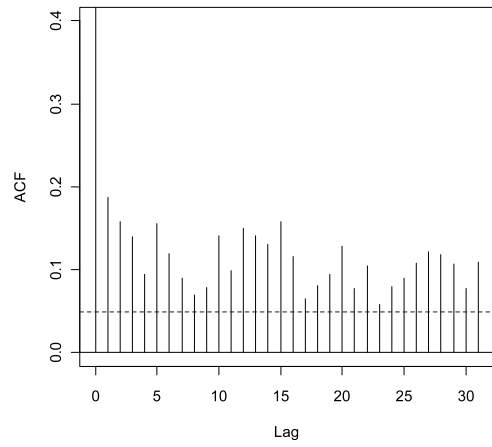


図8 C-極値間の時間間隔の自己相関（ティック時間， $C=3\text{pips}$ ）EUR/USD，2008年9月

粗視化された極値の時間間隔には次数が高くなるに従い減少するものの多くの場合に有意な正の自己相関が観測された。実時間で測定した場合は、市場が平穏でも荒れていてもどちらの場合でも自己相関は有意になる。しかし、ティック時間で測定した場合、市場の落ち着いているときは図7のように自己相関が有意ではない場合が多く、図8のように市場が荒れているときに自己相関が有意になる。

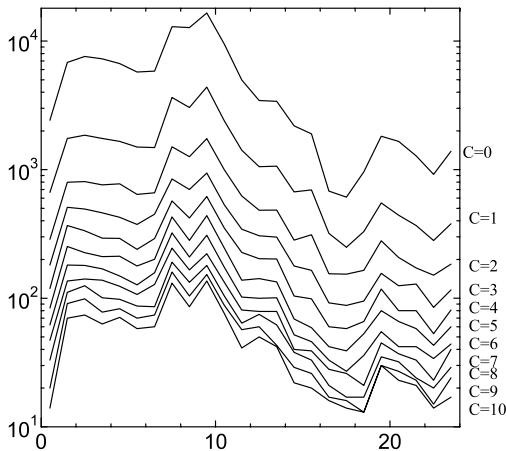


図9 1時間毎のC-極値の個数 EUR/USD，2008年7月

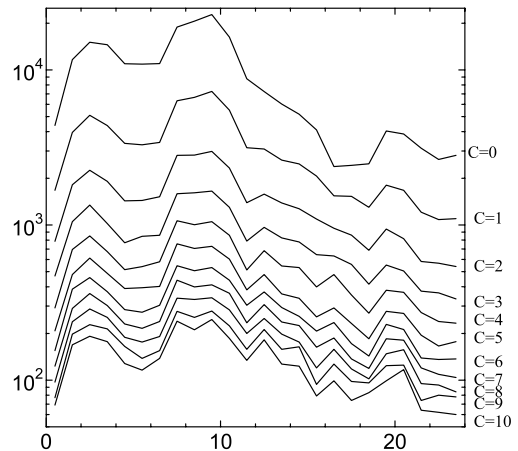


図10 1時間毎のC-極値の個数 EUR/USD，2008年9月

図9、10は粗視化した極値の個数の日中変動であり、一日を24分割して1時間毎に集計したものである。縦軸は対数をとっているのでCを大きくすると極値の個数は小さくなるが、動きはほぼ並行している。最初に半ば重なった大きな2つの山、そして離れて小さな1つの山があるが、それぞれ順にヨーロッパ、アメリカ、アジアにおける主要市場の取引時間に相当する。ティック数を同様に集計した日中変動と比較すると、ティック数が最も少ない16:00から18:00までの時間帯を除いてはほぼ並行した動きとなっている。

4. 結語

ワイブルプロットによる分析はティック時間で測定した場合、粗視化する程度が2pipsまでは極値間の時間間隔は指数分布に近いワイブル分布で表現できることを示している。またボラティリティが高くなると粗視化の程度を4pipsまで大きくしてもワイブル分布で表現できる。ワイブルプロットにおける曲線が平行であることは比例ハザードモデルにおける仮定を満たしている。この場合、ワイブルプロットの曲線間の縦軸方向の距離が相対ハザード比の対数に相当する。実時間で測定した場合は、ワイブル分布における形状パラメータは1よりも小さく、粗視化の程度を大きくするに連れて1に近づいていく。市場のボラティリティの影響はティック時間で測定した場合と比べると小さい。

粗視化された極値の時間間隔には多くの場合、有意な正の自己相関が観測される。粗視化の程度を小さくしてティック時間で測定した極値の時間間隔の分布は指数分布に近いが、自己相関が有意であればポアソン過程でモデル化することは適当ではない。実時間で測定した場合は、市場が平穏でも荒れていてもどちらの場合でも自己相関が有意になる。この結果は個別株式とドイツ国債先物についての Hautsch (2004) の結果と整合的である。一方、ティック時間で測定した場合、自己相関は市場の落ち着いているときは有意ではなく、市場が荒れているときに自己相関が有意になる傾向がある。価格変動を極値の時間間隔で捉えた場合、これを一様化する時間としては粗視化の程度が小さい場合は実時間よりもティック時間が適当であること、粗視化の程度が大きい場合はティック時間よりも実時間が適当であることが確認された。さらに日中変動の存在を考慮すると、極値間の時間間隔に対しても Takayasu et. al. (2001) に類似した方法による規格化の可能性がある、これは今後の課題とした。また、実時間で測定した時間間隔の自己相関が有意であることから、自己相関構造が市場のボラティリティにより異なることに注意しつつ、ACDモデルを応用することも考えられる。

5. 注

(注1) 時刻 t までに生じた事象の個数 $N(t)$ を表す確率過程 $N(t), t \geq 0$ を計数過程 (Counting Process) という。計数過程がゼロから出発し ($N(0)=0$)、独立増分を持ち、任意の時間 h の間に生じる事象の個数が、平均 λh のポアソン分布に従う $P(N(t+h)-N(t)=n) = e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^n}{n!}$ 場合、強度 (intensity) λ のポアソン過程という。3番目の条件は、事象が短い時間内に同時に発生することがないという条件 (希少性) と等価である。ポアソン過程の場合、ジャンプとジャンプの間に経過する時間は互いに独立で、平均 $1/\lambda$ の指数分布 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ に従う。

(注2) ボラティリティ・スマイルとは Black-Scholes モデルによりオプション価格から逆算したインプライド・ボラティ

リティが、行使価格によって異なる現象であり、原資産価格に近い行使価格のインプライド・ボラティリティに対して、行使価格が原資産価格から離れるほどインプライド・ボラティリティが高くなり、しかも行使価格が低いものほど顕著になる。これをグラフの形状からボラティリティ・スマイルと呼ぶ。

(注3) 連続な確率過程で増分が独立、かつ定常であるものを加法過程と呼ぶ。増分が定常であるとは、2時点間における増分の分布がその2時点の間隔にのみ依存することを意味する。引数の組 $k < l \leq m < n$ について $X_l - X_k$ と $X_n - X_m$ が独立であるという性質を持つ系列を加法系列と呼ぶ。連続引数の場合は加法過程という。共通部分を持たない区間列 (s_i, t_i) , (t_i, s_i+1) に対して、各区間における増分 $\Delta_i X = X(t_i) - X(s_i)$ ($1 \leq i \leq n$) が独立になるとき、 X は加法過程であるという。レヴィ過程は、加法過程と同様に増分が独立、かつ定常であり、さらに $(0, \infty)$ で右連続であり、 $(0, \infty)$ で左極限を持つ。ブラウン運動、ポアソン過程、複合ポアソン過程はいずれもレヴィ過程に含まれる。

(注4) ワイブル (Weibull) 分布は故障確率をモデル化する場合に用いられる。確率密度分布は

$$f(t) = \frac{m}{a} \left(\frac{t^{m-1}}{a} \right) \exp \left[- \left(\frac{t^m}{a} \right) \right], \quad 0 \leq t < \infty, \quad m > 0, \quad a > 0$$

である。ここで、 m は引き延ばしの指数 (形状パラメータ)、 a は特徴的な時間スケール (スケールパラメータ) である。形状パラメータを1にした場合が指数分布であり、指数分布はワイブル分布の特殊な場合といえる。

生存関数は時点 t まで事象の発生しない確率、すなわち補累積密度関数を時間の関数として表している。確率密度関数を $f(t)$ とすれば $1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(t) dt$ である。ワイブル分布の生存関数は引き延ばされた指数関数

$$1 - F(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{a} \right)^m \right]$$

である。 $m=1$ の場合、ハザード関数、すなわち事象の発生確率 $f(t)/(1-F(t))$ は定数となり、生存時間分布は指数分布となる (偶発故障型)。 $m>1$ の場合はハザードの発生確率が次第に増加する摩耗故障型、 $m<1$ の場合はハザードの発生確率が次第に減少する初期故障型である。

(注5) Mittag-Leffler 型の生存関数は

$$E_\beta \left(- (t/t_0)^\beta \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t/t_0)^{\beta n}}{\Gamma(\beta n + 1)}, \quad (0 < \beta \leq 1)$$

である (ここで $\Gamma(z)$ はガンマ関数である)。この関数は以下のように t/t_0 の小さいところでは引き延ばされた指数分布、 t/t_0 の大きいところではベキ則に漸近する。

$$E_\beta \left(- (t/t_0)^\beta \right) \sim \exp \left[- (t/t_0)^\beta / \Gamma(\beta + 1) \right], \quad (t/t_0 \rightarrow 0)$$

$$E_\beta \left(- (t/t_0)^\beta \right) \sim - (t/t_0)^{-\beta} / \Gamma(-\beta + 1), \quad (t/t_0 \rightarrow \infty)$$

References

- [1] Dacorogna, M. M., R. Gençay, U. A. Müller, R. B. Olsen, and O. V. Pictet (2001) *An Introduction to High-Frequency Finance*, San Diego: Academic Press.
- [2] Engle, R. F. and J. R. Russell (1998) Autoregressive Conditional Duration: A New Model for Irregularly Spaced Transaction Data, *Econometrica*, 66, 1127-1162.
- [3] Feller, W. (1966, 1968) *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1.2, Wiley.
- [4] Ghysels, E. and J. Jasiak (1994) Stochastic Volatility and Time Deformation: An Application to Trading Volume and Leverage Effects, Working Paper, CRDE.
- [5] Ghysels, E. (2000) Some Econometric Recipes for High-frequency Data Cooking, *J. Business and Economics Stat.* 18 154-63.
- [6] Hautsch, N. (2004) *Modelling Irregularly Spaced Financial Data-Theory and Practice of Dynamic Duration Models*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- [7] 林高樹 (2009) 高頻度データと時間変更, 統計数理, 57, 1, 39-65.
- [8] Ivanov, P. C., A. Yuen, B. Podobnik, and Y. Lee, (2004) Common Scaling Patterns in Intertrade Times of U.S. Stocks, *Phys. Rev. E*, 69, 056107.
- [9] Kaizoji, T. and M. Kaizoji (2004), Power Law for the Calm-time Interval of Price Changes, *Physica A*, 336, 563-570.
- [10] 熊谷善彰 (1999) 取引費用と目標時点を考慮した投機的市場モデル, 三田商学研究, 42, 4, 71-92.
- [11] Kumagai, Y. (2002a) Time-space Scaling of Financial Time Series," in *Empirical Science of financial fluctuations: The Advent of Econophysics* ed. H. Takayasu, Tokyo: Springer-Verlag, 250-259.
- [12] 熊谷善彰 (2002) 金融時系列データのフラクタル分析, 多賀出版

-
- [13] Kumagai, Y. (2002b) Fractal Structure of Financial High Frequency Data, *Fractals*, 10, 13–18.
- [14] Kumagai, Y. (2003) Time Evolution of Fractal Structure by Price-axis Scaling and Foreign Exchange Intervention Operations,” in *The Application of Econophysics-Proc. of the 2nd Nikkei Econophysics Symp.* ed H Takayasu, Tokyo: Springer-Verlag, 58–63
- [15] 熊谷善彰 (2004) 金融市場における価格変動の値幅と時間—為替レート高頻度データのフラクタル分析, 早稲田大学教育学部学術研究—地理学・歴史学・社会科学編一, 52, 31–47.
- [16] Kumagai, Y. (2010) Time Scale defined by the Fractal Structure of the Price Fluctuations in Foreign Exchange Markets, *J. Physics Conference series*, 221, 0120161, 1–7.
- [17] Mainardi, F., M. Raberto, R. Gorenflo, E. Scalas, Fractional Calculus and Continuous-time Finance II: the Waiting-time Distribution, *Physica A* 287 (2000) 468–481.
- [18] Mandelbrot, B.B. and H. Taylor (1967) On the Distribution of Stock Price Differences, *Operations Research*, 15, 1057–1062.
- [19] Mandelbrot B. B. (1997) *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*, New York: Springer-Verlag.
- [20] McQueen and Thorley (1994) Are Stock Returns Predictable? A Test Using Markov Chains, *J. Finance*, 46, 239–263.
- [21] Merton, R. C. (1976) Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous, *Journal of Financial Economics*, 3, 125–144.
- [22] Politi, M. and E. Scalas (2008) Fitting the Empirical Distribution of Intertrade Durations, *Physica A*, 387, 2025–2034.
- [23] Raberto, M., E. Scalas, F. Mainardi (2002) Waiting-times and Returns in High-frequency Financial Data: An Empirical Study, *Physica A*, 314, 749–755.
- [24] Russell, J. R. (1999) Econometric Modeling of Multivariate Irregularly Spaced High-Frequency Data, Working paper, Univ. of Chicago.
- [25] Sazuka, N. (2007) On the Gap between an Empirical Distribution and an Exponential Distribution of Waiting Times for Price Changes in a Financial Market, *Physica A*, 376, 500–506.
- [26] Sazuka, N., J. Inoue, E. Scalas (2009) The Distribution of First-passage Times and Durations in FOREX and Future Markets, *Physica A*, 388, 2839–2853.
- [27] Scalas, E., R. Gorenflo, H. Luckock, F. Mainardi, M. Mantelli, M. Raberto (2004) Anomalous Waiting Times in High-frequency Financial Data, *Quantitative Finance*, 4, 695–702.
- [28] Scalas, E., T. Kaizoji, M. Kirchler, J. Huber, A. Tedeschi (2006) Waiting Times between Orders and Trades in Double Auction Markets, *Physica A*, 366, 463–471.
- [29] Scalas, E. (2007) Mixtures of Compound Poisson Processes as Models of Tick-by-tick Financial Data, *Chaos Solitons Fractals*, 34, 33–40.
- [30] Takayasu, M., H. Takayasu and M. P. Okazaki (2002) Transaction Interval Analysis of High-resolution Data, in H. Takayasu ed. *Empirical Science of Financial Fluctuations-The Advent of Econophysics*, Springer Verlag, Tokyo.
- [31] Taylor, S.J. (1986) *Modeling Financial Time Series*, John Wiley, Chichester.
- [32] Yamasaki, K., L. Muchnik, S. Havlin, A. Bunde, and H. E. Stanley (2005) Scaling and Memory in Volatility Return Intervals in Financial Markets, *Proc. National Aca. Sci.* 102, 9424–9428.
- [33] Wang, F., P. Weber, K. Yamasaki, S. Havlin, and H. E. Stanley (2007) Statistical Regularities in the Return Intervals of Volatility, *Eur. Phys. J. B*, 55, 123–133.