早稲田商学第311号
昭和60年7月

最小交差の問題について

新 澤 雄 一

§1: はじめに

「X―Y平面上にせよ，立方体の表面上にせよ，連続した面上にあるn個の点を，すべて結んで生ずる線の交差点の最小数は，幾つか？」というのが，ここに提出した問題である。[1)]このような問題は，とるにたらない問題であるのか，必要性がないから研究されなかったのか，あるいは筆者が門外漢であるため，文献を知らないのか，この問題について論じた文献を知らない。いずれにせよ，この問題の図形化を自らに課して考察したのが，この論文である。

われわれが，計量経済学模型を作るとき，模型作成に必要な変数を並べて，それぞれの変数間の関係を線で結んで作図をするが，n個の変数を余り深く考察しないで，線によって結ぶと，数多くの線の交差を生ずる。幾つかの町を結ぶ道路を作るとき，立体交差を最小にして全ての町を結ぶには，どのように設計すればよいか，という問題も最小交差点の問題である。n個の点があるとき，全ての点を結びつけて生ずる最小の交差点の数が分っていれば，無駄な試行錯誤の並べ換えや，線の引き直しは，不必要になるであろう。

問題を明確にするために，結びつけられる点を町として，町を結ぶ線を道とし，それぞれの町は必ず，一本の道によって結ばれているものとすれば，町が

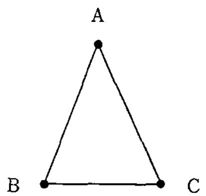
1） この問題の“連続した面”には“メービウスの平面”や“クラインの壺”のようにねじれた平面および空間を含まないものとする。

二つ以上なければ，道はなく，道が二本以上なければ，道の交差はないことは明らかである。道が二本以上存在するためには，町は少なくとも 3 つ以上なければならない。従って，この問題は結びつけられる町の数 $n \geqq 3$ について，考察すればよいであろう。

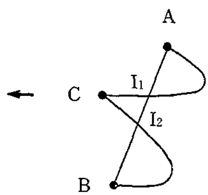
§2： 外縁追出法（Take Out of a Ring）

$n=3$ の場合

A，B，C 3 つの町があって，それぞれの町を互に全て結びつけると，第Ⅰ-1図のようになる。交差点 2 個を持つ第Ⅰ-2 図などの場合も考えられるが，点Cを移動すれば第Ⅰ-1 図のようになり，従って $n=3$ の場合には，交差点はO である。



第Ⅰ-1図



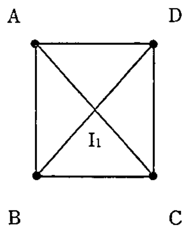
第Ⅰ・2図

$n=4$ の場合

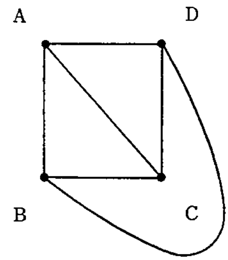
A，B，C，D 4 つの町の場合は，一般に第Ⅱ-1 図のように点を環状に配置し描かれることが多く，交差点が 1 個存在しているようにもみえるが，B—C の線をDの外側に持ってくれば，第Ⅱ-2 図のようになり，交差点はOである。

一つの線上に交差点が最も多く存在する線を，環状に並んでいる全ての点の外側へ追出し，さらにその他の線上に交差点が最も多く存在する線を前と同じように外側へ追出すことを繰返すことによって，交差点を減らす方法を，外縁追出法と呼べば，4 点を全て結び付けても第Ⅰ-2図のようになって，交差点は存在しない。

n=5 と n=6 の場合

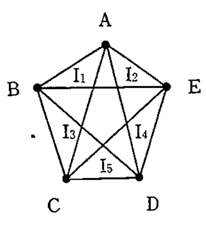


第Ⅱ-1図

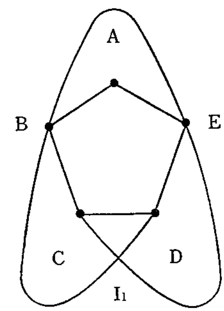


第Ⅱ-2図

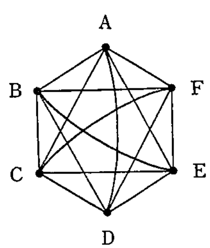
A，B，C，D，E 5つの町の場合はどうであろうか。5点は一般に星形に並べられ，第Ⅲ-1図のように，それぞれの点が結び付けられる。この場合 I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 のように5つの交差点が存在するが，4点のように，外縁追出法



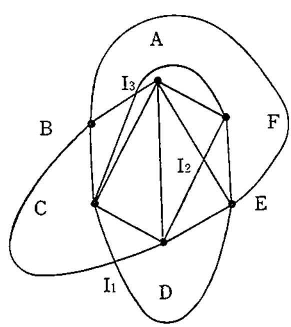
第Ⅲ-1図



第Ⅲ-2図



第Ⅳ-1図



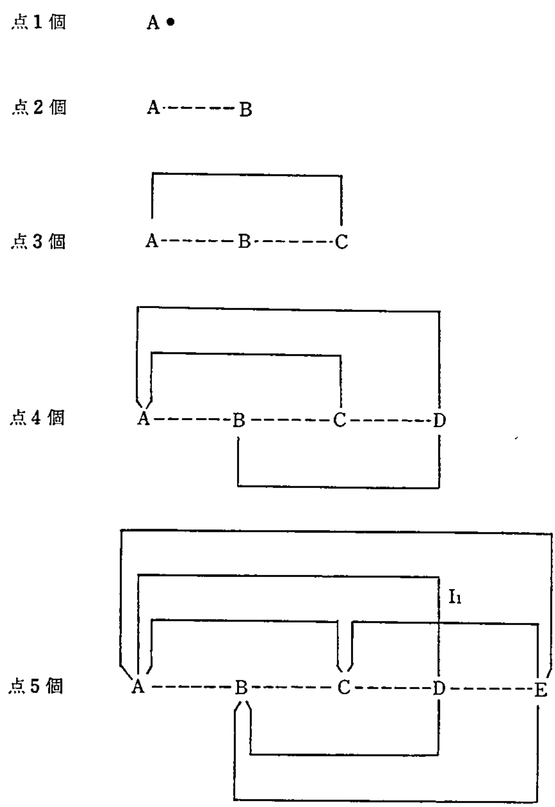
第Ⅳ-2図

によって線B—E，B—D，C—E，をA，C，Dの環の外側へ追出せば，第Ⅲ-2図のようになり，交差点は I_1 の1個である。

更にA，B，C，D，E，Fの6つの町の場合を考えると，一般に，蜂の巣型に町が並べられて第Ⅳ-1図のように，交差点は13-15個になるが，外縁追出法によって処理すれば，交差点は第Ⅳ-2図のように，最小限度で3個である。

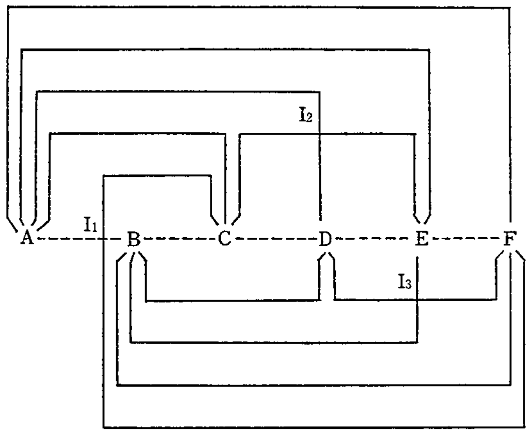
§3： 矩形法（Rectangular Method）

外縁追出法は，極めて普通に考えられる方法であって，点を環状に並べて線

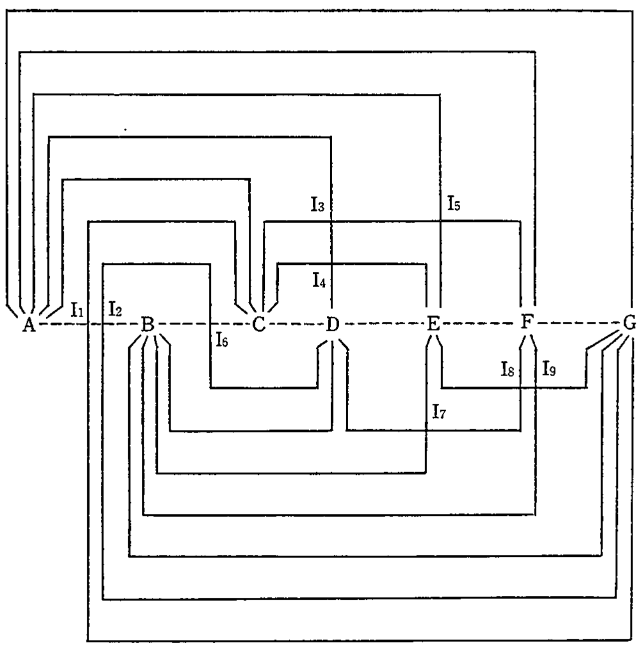


第Ⅴ-1図

点6個



点7個



第V-2図

を描くことによって，全体を把握し易いが，点が 7，8，9……と増加するにつれて，追出される線が再び重なりあう可能性が大きくなり，どのような追出し方が最小の交差点をもつのか，必ずしもはっきりしなくなるのである。この欠点を取り除くためには，基本的な位置を示すために直線上に点を並べ（点線で結んである），例えば最左端の点をAとし，順次右方へB，C，D……とならべて，それぞれの点を結付ける方法が考えられる。形の上から矩形法と呼ぶことにすれば，矩形法による表現の仕方は，第V-1図，第V-2図のようになるであろう。

矩形法のルールは点Aからｎ—１個の点B，C，D，E，……の順に上方に線を繋ぎ，次に点Bからｎ—２個の点をC，D，E，……の順に下方に線を繋ぎ，さらにCからD，E，……の順に交差が最もすくない空間を縫って線で繋ぐことを繰返し，全ての点が，それぞれｎ—１個の線で結ばれて終了する。点6個の場合はC—Eの線は，A—Dで交差（I_1）しているが，左方のA—Bと交差させてもよい。ところが点が6個になると第V-2図のように，C—EはA—Dと交差させ，C—FはA—Bと交差する場合が最小交差点をもつ図形となるのである。

このようにして，点6個の場合は最小交差点の数は，3個であり，点7個の場合は，9個である。

矩形法のルールは極めて簡単であり，理解し易いが，どのルートを通った時に交差点の数が最小になるのかは，置かれた線の関係によって決まるので，絶えず交差点の数を数えながら線を結び付ける作業をしなければならない。このようにして外縁追出法にせよ，矩形法にせよ，ｎが9，10，11，12……と増加するにつれて，複雑さが極端に増加し，実用性は余りない。

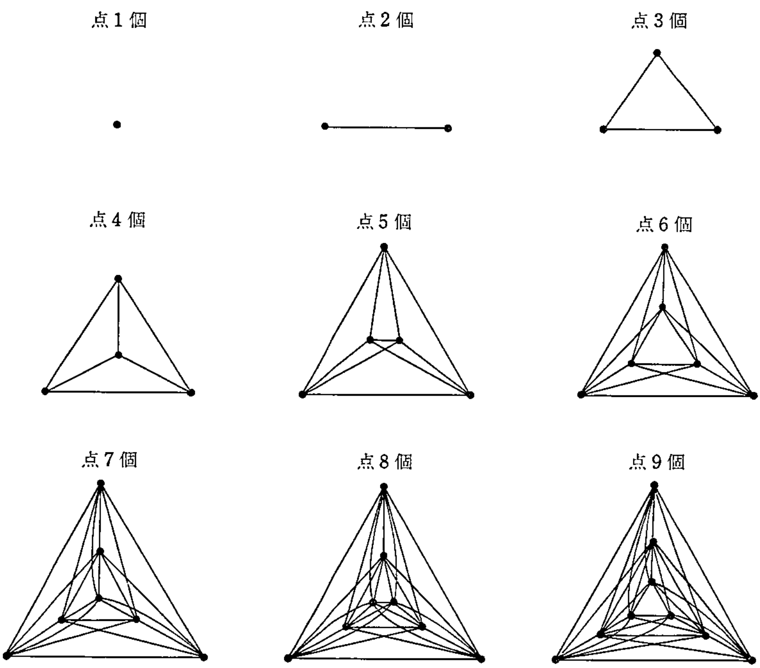
§4：　三角重畳法 (Folded Triangle Method)

幾つかの試みの後に，全ての正の整数Nを，3を mod として剰余Rと合同であることに気ずいたのであった。即ち，結ばれる点の数ｎは，必ず3の倍数

3S（S＝0, 1,2, 3……）に剰余R（R＝0, 1, 2）を加えたものであるからである。

N　S　R＝0	N　S　R＝1	N　S　R＝2
0＝0＊3＋0	1＝0＊3＋1	2＝0＊3＋2
3＝1＊3＋0	4＝1＊3＋1	5＝1＊3＋2
6＝2＊3＋0	7＝2＊3＋1	8＝2＊3＋2
9＝3＊3＋0	10＝3＊3＋1	11＝3＊3＋2
12＝4＊3＋0	13＝4＊3＋1	14＝4＊3＋2
…………………	…………………	…………………
…………………	…………………	…………………
n＝S＊3＋0	n+1＝S＊3＋1	n+2＝S＊3＋2
…………………	…………………	…………………

この考え方を図に表せば，第Ⅵ-1図のように並べることができるであろう。



第Ⅵ-1図

上図から直感的にも理解されるように，真中の三角形のなかに 3 を mod とする剰余の点（R＝0，1，2）を書入ることによって，3 で割り切れない n 点の場合も十分に結ぶ事ができる。上図のように，それぞれの点が n−1 個の線によって異なった点と結び付けられた時の交差の数が最小交差点の図形である。三角形をこのように重ね合せる方法は，任意性が殆どなく規則的に点と線とを結び付けることによって，自動的に最小交差点を求めることができるが，重ねあわされる三角形の数（Stage S＝INT(N/3)）が多くなると，作図は容易ではない。三角重畳法の考え方を生かして中心の剰余の点を頂点にして段階（Stage）を下方に書くことによって，次のような梯子型の作図をすることができる。

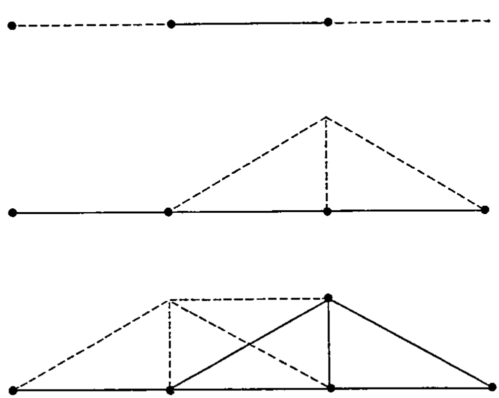
§5： 梯子型法（Ladder Method）

梯子型法の考え方はあくまでも三角重畳法と同じで，同法の一種であるが，三角重畳の図を立体化して表面を平面に展開した図形である。

点 3 個

点 4 個

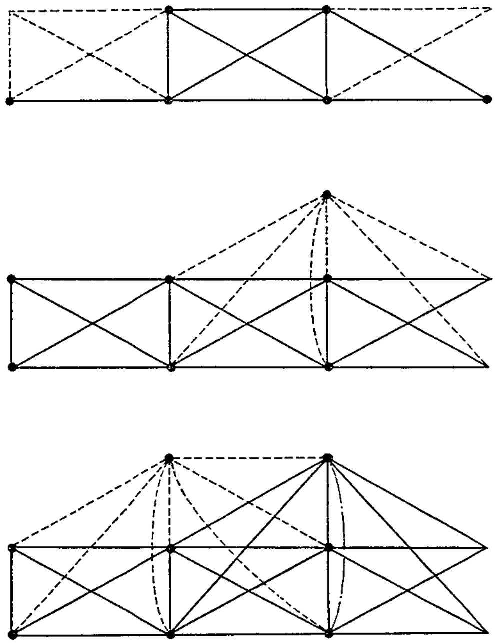
点 5 個



点 6 個

点 7 個

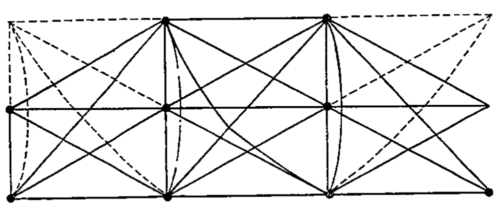
点 8 個



第Ⅵ-2図

更に一つ点を加えて 9 つの点を全て結び付けた場合は，Ⅵ-3 第図に示した通りである。

点 9 個



第Ⅵ-3図

このようにして12の点までの全ての点を結び付けたときの最小交差点の数は第Ⅰ表の通りであるが，問題は必ずしも単純ではない。

第Ⅰ表

点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
最小交差点	0	0	0	0	1	3	9	19	36	63	102	156

§6：数理的処理による工夫（Mathematical Treatment）

図形的工夫によって，いかに注意深く此の問題の解決を試みても，直ぐに限界に達するので，数理的処理による工夫が必要になる。R＝1，2 の場合は R＝0 を基礎として誘導出来るものとして，始めに簡単化のために，点が 3 の倍数＝段階（Stage）の場合を解析してみよう。梯子型の三角形の一面だけを考えればよいからである。

N……………点の数

N＝3S＋R　但し此の場合はR＝0

L1，L2，L3，L4……Lr　左側の第 1 番目から第 r 番目の点

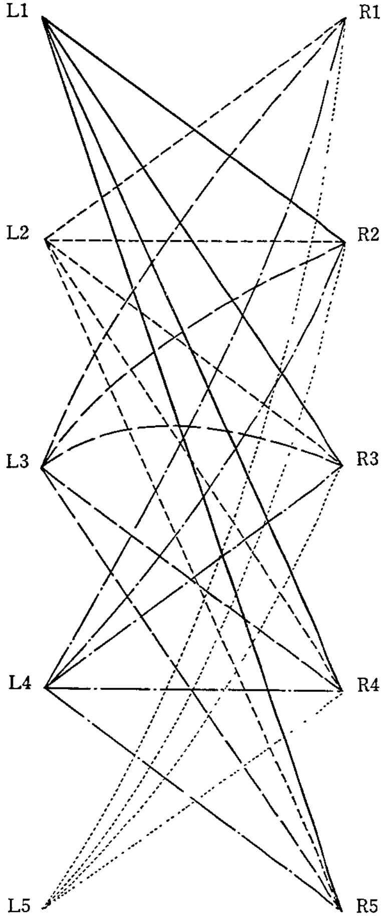
R1，R2，R3，R4……Rr　右側の第 1 番目から第 r 番目の点

第Ⅶ図において，点 R1 から点 R5 までの 5 つの点から，それぞれ左側の点 L1，L2，L3，L4，L5 の 5 つの点へ，それぞれ 5 本の線が出ている。今点 R1 から L2 へ一本の線を書くと L1 から出ている線を何回過ぎるだろうか？この例では 4 回であり，つぎに R1 から L3 へ一本の線を書くと L1 から出ている線を何回過ぎるだろうか？　というように重複を避けながら順次相手側と結び付けて数えてゆくと，第Ⅶ図に示したようになるからその合計（Sum of Inner Intersection 内部交差・Ⅱ）は

$$\mathrm{II} = S(S-1)\{(S-1)+(S-2)+(S-3)\cdots\cdots\cdots+(S-(S-1))\}/2$$
$$=\{S^2(S-1)^2\}/4$$

である。この例では，S＝5 であるから内部交差点は 100 個である。

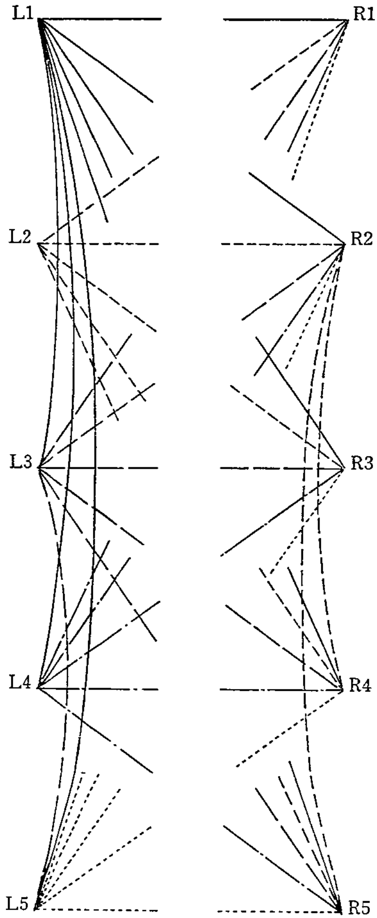
第Ⅵ-2 図の点 7 個以上の場合に見られるように，右側と左側それぞれの点が



第Ⅶ図

	L1	L2	L3	L4
R1	S-1	S-1	S-1	S-1
	S-1	S-1	S-1	
	S-1	S-1		
	S-1			
R2	S-2	S-2	S-2	S-2
	S-2	S-2	S-2	
	S-2	S-2		
	S-2			
R3	S-3	S-3	S-3	S-3
	S-3	S-3	S-3	
	S-3	S-3		
	S-3			
R4	S-4	S-4	S-4	S-4
	S-4	S-4	S-4	
	S-4	S-4		
	S-4			

結ばれるだけでなく，それぞれの側にある点同志が結ばれ，その結果として，新な交差を生ずる。此の交差を側点交差と呼べば，左側の点L1から点L2，L3 L4，……Lr を結び，次に右側の点R2から点R3，R4，……Rr を結び，更に左側の点L3から点L4，L5，……Lr を結び，……というように，右側と左側を交互にそれぞれの側にある点同志を結ぶ事によって側点交差（Side Inter-



第一次側点交差

	S2	S3	S4····	Sr-2	Sr-1
L1	(r-2) S	(r-3) S	(r-4) S ····	2S	S
L3			(r-4) S ····	2S	S
Li			··3S	2S	S
··			··3S	2S	S
··			5S 4S 3S	2S	S
Lr-3			3S	2S	S
Lr-1					S

	S3	S4	S2····	Sr-2	Sr-1
R2	(r-3) S	(r-4) S	(r-5) S····	2S	S
R4			(r-5) S····	2S	S
Rj			··3S	2S	S
··			··3S	2S	S
··			··3S	2S	S
Rr-4			4S 3S	2S	S
Rr-2				2S	S

第Ⅷ図

secion・SI）を求めることができる。

但し側点交差で注意せねばならぬのは，内部交差の線と交わる第一次の側点交差と側点交差をするがゆえに生ずる派生的側点交差がある。

第Ⅷ図からも類推されるように，第一次側点交差総計（PR0）には，左側と

右側とに段階（S）の結び付きを交互に異にする側点交差がある。また，段階（S）が奇数か偶数かによって，側点交差の計算方法が多少異なるので，R＝0 の場合を基準として，分類して示そう。

第一次側点交差（PR0）は

段階（S）が奇数の場合（OPR0）は

$$OPR0=S\{(S-1)(S-2)+(S-3)(S-4)+(S-5)(S-6)+\cdots\}/2$$

であるから，左側（LOPR0）$=(S+1)(S)(S-1)(2S-3)/24$

右側（ROPR0）$=(S)(S-1)(S-3)(2S-1)/24$

段階（S）が偶数の場合（EPR0）は

$$EPR0=S\{(S-2)(S-3)+(S-4)(S-5)+(S-6)(S-7)+\cdots\cdots\}/2$$

であるから，左側（LEPR0）$=(S)^2(S-2)(2S+1)/24$

右側（REPR0）$=(S)^2(S-2)(2S-5)/24$

第一次側点交差（PR0）は左側（LOPR0 または LEPR0）と右側（ROPR0 またはREPR0）とを合計して

$$PR0=S\{1\cdot(S-2)+2\cdot(S-3)+3\cdot(S-4)+\cdots\cdots+(S-2)\cdot 1\}$$
$$=\{S^2(S-1)(S-2)\}/6$$

である。

派生的側点交差（DR0）も第一次側点交差（PR0）と同じように分類され，さらに段階（S）が奇数か偶数かによって，側点交差の計算方法が異なるので，いま左側を基準にして左側の派生的側点交差の合計（LDR0）と右側の派生的側点交差の合計（RDR0）とに分けて計算式をしめそう。

すなわち左側の派生的側点交差は，第Ⅸ図のように奇数番目の各段階が対応し，右側の派生的側点交差は偶数番目の各段階が対応している。

左側の派生的側点交差

L1 から出ている線上の派生的側点交差は，L3 から出ている線上の交差に

対して

$(S-4)+(S-5)+(S-6)+(S-7)+\cdots\cdots+(S-(S-1))$

$=(S-3)S-4)/2$

であり，同様に，L1からL5に対して出ている線上の派生的側点交差は，$(S-5)(S-6)/2$ であり，以下同様に，Lr までの交差の合計は

L1とL3について

$(S-4)+(S-5)+(S-6)+(S-7)+\cdots\cdots+(S-(S-1))$

$=(S-3)(S-4)/2$

L1とL3とL5について

$2\{(S-6)+(S-7)+(S-8)+(S-9)+\cdots\cdots+(S-(S-1))\}$

$=2(S-5)(S-6)/2$

L1とL3とL5とL7について

$3\{(S-8)+(S-9)+\cdots\cdots+(S-(S-1))\}=3(S-7)(S-8)/2$

$\cdots\cdots$

$\cdots\cdots$

すなわち

$$\frac{(S-3)(S-4)}{2}+\frac{2(S-5)(S-6)}{2}+\frac{3(S-7)(S-8)}{2}\cdots\cdots+$$

このようにして

段階（S）が奇数の場合（ODR0）

左側（LODR0）$=(S+1)(S-1)(S-3)^2/(6*2^4)$

右側（RODR0）$=(S-1)^2(S-3)(S-5)/(6*2^4)$

$$\mathrm{ODR0}=\mathrm{LODR0}+\mathrm{RODR0}$$
$$=(S-1)(S-3)(S^2-4S+1)/48$$

段階（S）が偶数の場合（EDR0）

左側（LEDR0）$=(S)^2(S-2)(S-4)/(6*2^4)$

右側 $(REDR0)=(S)(S-2)(S-4)^2/(6*2^4)$

$$EDR0=LEOR0+REDR0$$

$$=(S)(S-2)^2(S-4)/48$$

また段階（S）が奇数の場合の第一次交差と派生交差の和（OSR0）は,

$$OSR0=ODR0+ODR0$$

左側 $(LOSR0)=3(S+1)(S-1)^3/32$

右側 $(ROSR0)=(S-1)(S-3)(9S^2-10S+5)/96$

段階（S）が偶数の場合の第一次交差と派生交差の和（ESR0）は,

$$ESR0=EPR0+EDR0$$

左側 $(LESR0)=3(S)^3(S-2)/32$

右側 $(RESR0)=(S)(S-2)(9S^2-28S+16)/96$

このようにして, R=0 のときの一面における派生的側点交差の合計 DR0 は左側の点 L1, …, Lr を結ぶ交差と, 右側の点 R1, …, R2 を結ぶ交差との合計であって, 上述の結果からさらに左側の段階（S）が奇数の場合と偶数の場合とに分けて考えることができる。従って, R=0 の時の一面の交差の総計 SR0 は

$$SR0=IIR0+PR0+DR0$$

であるから,

段階（S）が奇数のときの交差の総計 SOR0 は, 内部交差（IIR0）に段階（S）が奇数の場合第一次交差と派生交差を加え

$$SOR0=\{S^2(S-1)^2\}/4+\{S^2(S-1)(S-2)\}/6$$

$$+(S-1)(S-3)(S^2-4S+1)/48$$

段階（S）が偶数のときの交差の総計 SER0 は,

$$SER0=\{S^2(S-1)^2\}/4+\{S^2(S-1)(S-2)\}/6$$

$$+(S)^2(S-2)^2(S-4)/48$$

更に, R=0 の時の3面の交差の総計 TR0 は TR0=3•SR0 であるから

Sが奇数のときは，TOR0＝3•SOR0

Sが偶数のときは，TER0＝3•SER0

である。

R＝1 の場合

剰余のRが1の場合というのは点Pが 1，4，7，10，13，……(3*S＋1) の場合であって，三面からなる梯子型のある一面の上に一つの点を加える事によって得られる。R＝0 の場合と関連させて説明するために，三つの梯子型の面を左から左側面(L)，中心面(C)，右側面(R)，とし R＝0の側点はすべての面で左側最上方すなわち西北の隅 L1から最初の線が出ているものとしよう(第Ⅵ-3図参照)。またR＝1のときは，中心面の右側つまり右側面の左側の上方に，一点（N1）を加えるものとしよう(第Ⅵ-2図参照。)このようにすると，N1 からその他の全ての点を結び付ければ，左側面は変化せず，中心面の右側に点が加わって生ずる線上に極めて規則的に交差点を計算することができる。

一つの点が加わることによって，内部交差の増加，すなわち，付加的内部交差（AIIR1）は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AIIR1} &= S(S-1)+S(S-2)+S(S-3)+\cdots\cdots+S\cdot 1\\
&= S^2(S-1)/2
\end{aligned}
$$

であるから，中心面の内部交差（CIIR1）は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{CIIR1} &= \mathrm{IIR0}+\mathrm{AIIR1}\\
&= S^2(S-1)^2/4+S^2(S-1)/2\\
&= S^2(S-1)(S+1)/4
\end{aligned}
$$

中心面の第一次側点交差（CPR1）については，右側の（CRPR1）は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{CRPR1} = S\{&S(S-1)+(S-2)(S-3)+(S-4)(S-5)\\
&+\cdots\cdots\}/2
\end{aligned}
$$

であって，段階（S）が

奇数について CROPR1＝$(S+1)(S)(S-1)(2S+3)/24$

偶数について CREPR1＝(S＋2)(S)^2(2S－1)/24

である。また派生的側点交差（CDR1）については，段階（S）が

奇数について CLODR1＝(S－1)(S－3)(11S^2－28S＋9)/96

偶数について CLEDR1＝(S－2)(S)(11S^2－38S＋24)/96

ここまでは中心面の左側について論じなかったが，R＝0 のときの左側と同じで良いだろうか。中心面の左側が R＝0 のままであれば，N1から左側の側点L1，L2，L3,……Ls に対して第一次側点交差および派生的側点交差が発生する。S＝3 までは，此の問題は生じないが，Sが4以上の場合，中心面のL1，L2，L3,……Ls を結び付けたまま中心面から左側面の R1，R2，R3,……Rs へ移し換えると左側面は左側の側面交差と同じ数だけ交差数が増加し，中心面はその分だけ減少する。したがって全体としては R＝0 のときと交差数は不変であるが，R＝0 のままで N1を増加させた場合は，中心面の左側に新な側点交差が増加したにも拘わらず，このように処理した場合は中心面の左側の側点交差は生じない。この分だけ少なくなったのであった。この現象については，R＝2 ではあるが，第Ⅳ-2図の点7個の場合をそのままにして点を1個増加すると，中心面の右側の側点交差が1個増加するが，7個のときの中心面の右側の線を右面の左側へ移動すれば増加しないことからも理解されるであろう。すなわち，ルールとしては点を付加した場合に，R＝1 ならば付加した点 N1から出る側点交差は中心面に，R＝2 ならば外側になるように左側面，中心面，右側面の側点交差を揃えることである。

したがって，R＝1 の時は左側面は R＝0 の右側点交差と中心面の左側点交差とが入れ代わり，R＝2 の時は中心面が R＝0 の時の右側面の左側点交差と中心面の右側点交差とが入れ代わるのである。

このようにして，R＝1 の時の左側面は，左側も右側もともに側点交差(LLOR1) は等しく段階（S）が

奇数のとき

$$LLOR1 = S^2(S-1)^2/4+2\{(S+1)(S)(S-1)(2S-3)/24$$
$$+(S+1)(S-1)(S-3)^2/96\} = (S-1)^2(7S^2-3)/16$$

偶数のとき

$$LLER1 = S^2(S-1)^2/4+2\{(S)^2(S-2)(2S+1)/24$$
$$+(S)^2(S-2)(S-4)/96\} = (S)^2(7S^2-14S+4)/16$$

中心面についていえば,

左側（CLSR1）の第一次側点交差について段階（S）が

奇数のとき　$CLOPR1 = (S+1)(S-1)(S-3)(2S-1)/24$

偶数のとき　$CLEPR1 = (S+1)(S)(S-2)(2S-5)/24$

右側（CRSR1）についていえば

奇数のとき　$CROSR1 = CROPR1 + CLODR1$

$$= (S+1)(S)(S-1)(2S+3)/24+(S-1)(S-3)(11S^2-28S+9)/96$$

偶数のとき　$CRESR1 = CREPR1 + CLEDR1$

$$= (S+2)(S)^2(2S-1)/24+(S)(S-2)(11S^2-38S+24)/96$$

である。

右側面については，内部交差（RIIR1）と左側点交差（RLSR1）に右第一次側点交差（RRPR1）をくわえて求められる。

$$RIIR1 = S^2(S-1)(S+1)/4$$

RLSR1

奇数のとき　$RLOSR1 = RLOPR1 + RLODR1$

$$= (S+1)(S)(S-1)(2S-3)/24+(S+1)(S-1)(S-3)^2/96$$
$$= 3(S+1)(S-1)^3/16$$

偶数のとき　$RESR1 = REPR1 + REDR1$

$$= (S)^2(S-2)(2S+1)/24+(S)^2(S-2)(S-4)/96$$
$$= 3(S)^3(S-2)/16$$

RRPR1

奇数のとき　$ROPR1=(S-1)(S-3)(2S-1)/24$

偶数のとき　$REPR1=(S)(S-2)(2S-5)/24$

である。

R＝2 の場合

剰余のRが2の場合というのは点Pが 2, 5, 8, 11, 14, …… (3･S＋2) の場合である。R＝1 の場合と同じようにして， R＝0 の時の左側面 (LR0) の右上に点(N2)を加え左側面のL1, L2, L3,……およびR1, R2, R3,……を結び，次にN2から中心面の R1, R2, R3を結ぶと左側面の内部交差の合計 (LIIR2) は R＝1の中心面の内部交差と同じで，

$$LIIR2=(S+1)(S)^2(S-1)/4$$

である。また左側面の右側点 (LRSR2) は R＝1の時の中心面の右側交差 (CRSR1) と同じである。

$$LRSR2=CRSR1$$

奇数のとき

$$LROSR2=(S+1)(S)(S-1)(2S+3)/24+(S-1)(S-3)(11S^2-28S+9)/384$$

偶数のとき

$$LRESR2=(S+2)(S)^2(2S-1)/24+(S)(S-2)(11S^2-38S+24)/384$$

増加する派生交差は，

奇数のとき　$L0DR2=(S+1)(S-1)(2S-3)/24$

偶数のとき　$LEDR2=(S)(S-2)(2S+1)/24$

であって，これに R＝0のときの左側点交差 LSR0 を加えると LSR2 になる。

$$LLSR2=(S+1)(S)(S-1)(2S-3)/24+(S+1)(S-1)(S-3)/96$$

第Ⅱ表　最小交差の内部構造

段階 S	剰余 R	点 N	左側面 Left Side Phase			中心面 Central Phase			右側面 Right Side Phase			合計 SUM			総合計
			左側点 LLN	内部交差 LIIN	右側点 LRN	左側点 CLN	内部交差 CIIN	右側点 CRN	左側点 RLN	内部交差 RIIN	右側点 RRN	左側面 LN	中心面 IIN	右側面 RN	Grand Total
0	0	0													
0	1	1													
0	2	2													
1	0	3													
1	1	4													
1	2	5					1						1		1
2	0	6		1			1			1		1	1	1	3
2	1	7		1			3	2		3		1	5	3	9
2	2	8		3	2		9		2	3		5	9	5	19
3	0	9	3	9		3	9		3	9		12	12	12	36
3	1	10	3	9	3		18	9	3	18		15	27	21	63
3	2	11	4	18	9	4	36	4	9	18		31	44	27	102
4	0	12	12	36	4	12	36	4	12	36	4	52	52	52	156
4	1	13	12	36	12	5	60	29	12	60	5	60	94	77	231

4	2	14	15	60	29	15	100	15	29	60	5	104	130	94	328
5	0	15	36	100	15	36	100	15	36	100	15	151	151	151	453
5	1	16	36	100	36	18	150	68	36	150	18	172	236	204	612
5	2	17	43	150	68	43	225	43	68	150	18	261	311	236	808
6	0	18	81	225	43	81	225	43	81	225	43	349	349	349	1047
6	1	19	81	225	81	49	315	144	81	315	49	387	508	445	1340
6	2	20	94	315	144	94	441	94	144	315	49	553	629	508	1690
7	0	21	162	441	94	162	441	94	162	441	94	697	697	697	2091
7	1	22	162	441	162	104	588	260	162	588	104	765	952	854	2571
7	2	23	184	588	260	184	784	184	260	588	104	1032	1152	952	3136
8	0	24	288	784	184	288	784	184	288	784	184	1256	1256	1256	3768
8	1	25	288	784	288	198	1008	453	288	1008	198	1360	1659	1494	4513
8	2	26	322	1008	453	322	1296	322	453	1008	198	1783	1940	1659	5382
9	0	27	480	1296	322	480	1296	322	480	1296	322	2098	2098	2098	6294
9	1	28	480	1296	480	340	1620	711	480	1620	340	2256	2671	2440	7367
9	2	29	530	1620	711	530	2025	530	711	1620	340	2861	3085	2671	8617
10	0	30	750	2025	530	750	2025	530	750	2025	530	3305	3305	3305	9915
10	1	31	750	2025	750	550	2425	1105	750	2475	550	3525	4130	3775	11430
10	2	32	820	2475	1105	820	3025	820	1105	2475	550	4400	4665	4130	13195

217

$$+(S+1)(S-1)(2S-3)/24$$
$$=(S+1)(S-1)(9S^2-10S-3)/96$$
$$LRSR2=(S)^2(S-2)(2S+1)/24+(S)^2(S-2)(S-4)/96$$
$$+(S)(S-2)(2S+1)/4$$
$$=(S)(S-2)(9S^2+8S+4)/96$$

中心面については，中心面の左側点 (CLSR2) は R=0 のときの右側点交差 (RSR0) と等しく

奇数 $CLOSR2=(S)(S-1)(S-3)(2S-1)/24$
$$+(S-1)^2(S-3)(S-5)/96$$

偶数 $CLESR2=(S)^2(S-2)(2S-5)/24+(S)(S-2)(S-4)^2/96$

中心面の内部交差 (CIIR2) は

$$CIIR2=(S+1)^2(S)^2/4$$

中心面の右側点交差 (CRSR2) は全体が対称性があって

CRSR2=CLSR2　したがって

奇数 CROSR2=CLOSR2

偶数 CRESR2=CLESR2

である。

右側面については，右側面の左側 (RLSR2) は，LRSR2 と等しく，したがって

RLSR2=LRSR2=CRSR1

であり，また内部交差 (RIIR2) は，CIIR2 と等しく，右側点交差 (RRSR2) は，RPR1 に等しい。

上述の計算式によって計算した結果を第Ⅱ表に掲載してある。一見不規則に見える交差の数も，内部的に分解して見れば，可なり規則性がある事が分るであろう。

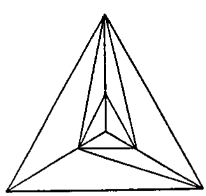
§7：　あとがき

2月下旬に突然原稿の依頼を受け，漸く，間にあったのが此の論文である。だからといって別に単なる思い付きで書いたのではない。此の論文の骨子は，私の古びたノートの片隅に7/31/69と書かれているように，今から15年以上も前に，計量経済の作図の必要から考えたものであった。当時は，12～13点までの点を作図的に結ぶことが主眼であったので，数理的にはおよその見当をつけるに止どまり，ここに提出したように厳密には処理していなかった。折にふれて補足的な考察を進めてはきたが，今回良い機会なので纒めてみたのであった。最小交差の問題を完全に解決したかどうかということになると，一応このように完成してみると，最小交差は極めて整然とした簡単なルールの上にあり，知力というよりは腕力が要求された問題であって，単純な計算に誤りがなければ，可なり追いつめたのではないかと思っている。

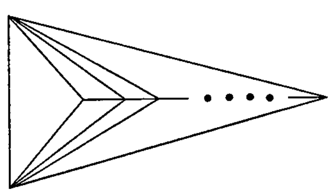
此の論文では各種の考え方を特長的な名称で明示したが，あるいは，すでに私より前に各種の方法に名称が与えられているかも知れない。十分に妥当性がありそれが私の工夫を越えているならば，当然その人の考え方を取り入れるのにやぶさかではない。

現実の世界に問題を移すと，最近のように電子回路のプリント配線に類する作業が多くなったり，コンピュータの素子の密度が極端に高くなるにつれて，此の問題が重要性を帯びてくるのではないだろうか？　実際には，n個全ての点を，全て結び付けるケースよりも，ある点同志は結ぶ必要がない場合が多いであろう。もしn個の全ての点を全部が全部を結ぶ必要が無ければ，全ての点を必ず結ぶ時の最小交差というのは，全ての点を任意に結ぶ時の最大交差であるから，このようにn個の点を結び付けたときは，全く交差点の無い結び付きで，最大の手は幾つかという問題も派生してくるのである。全てを結び付けた時の最小交差の図から出発して，最も交差の多い線を外しながら必要な結び付

きを，残せば良いであろう。例えば5点の場合に3点がそれぞれ4本の線によって他の4点に結ばれ，2点が3本の線によって3点に結ばれるとすれば，交差点はない。同様に6点の場合は，4本の線で結ばれるか，あるいは，2つの点が5本の線で，そのほかの2つの点が4本の線で，さらにそのほかの2つの3点が本の線で結ばれるように，結ばれる手が24個或は，線が12本ならば，交差点は無い。また，7点の場合は，全ての点が第 X-1 図のように，6本の結ばれる線の手を持つ点が1個，5本，4本，3本の線の手を持つ点がそれぞれ2個ずつならば交差点は無い。さらに5本の線の手を持つ点が3個，4本の線の手を持つ点が3個，3本の線の手を持つ点が1個の場合も交差点は無い。このようにして7点の場合結ばれる手が30個あるいは線が15本ならば交差点は無いのである。すなわち，N個の点があって，それらの点がL本の線で結ばれるとき，$L \leq 3(N-2)$ ならば，交差を持たない図が少なくとも一個存在する。此の関係は3点を結ぶ三角形の外側に $N-3$ の点を並べ，この三角形の三点に交差しないように結び付ける交差を持たない基本図形から容易に得られる。（第 X-2 図参照）全ての点を結び付けて生ずる線は，点がN個存在すれば，Nから2個とる組み合わせ個存在するから，交差の問題は線の数Lが $N(N-1)/2 > L > 3(N-2)$ の範囲にあるときに生ずるのである。Lが $N(N-1)/2 > L$ ならば，全ての点を結び付けて生ずる線（Lmax）の最小交差が交差の最大数であるから，Lによって生ずる交差は，それよりも減少する。



第X-1図



第X-2図