早稲田商学第 413・414 合併号
2　0　0　7　年　12　月

Chow 検定統計量と制約付き最小二乗推定量

坂　野　慎　哉

1．はじめに

Chow 検定は，計量経済分析における構造変化の検定として最も標準的な手法であり，たいていの計量経済学のテキストには取り上げられている。その呼称は Chow（1960）に由来する。この Chow 検定は回帰係数に対する線形制約の検定の応用であり，その検定統計量は制約付き最小二乗残差平方和と制約無しの最小二乗残差平方和から構成されている。

ところで，代表的な大学院レベルのテキスト，たとえば Greene（2003）や Davidson and MacKinnon（1993）などでは，回帰係数のパラメータに線形制約を課した場合の回帰係数の最小二乗推定量の式を，Chow 検定の紹介に先立って導出している。もちろん，Chow 検定統計量の制約付き最小二乗残差平方和の部分も，そのような制約付き最小二乗推定量の式に当てはめれば求まるはずであるが，上に挙げたようなテキストでは，Chow 検定統計量の導出にあたり，その過程をスキップしている。

そこで小稿では，回帰係数の制約付き最小二乗推定量の式を用いて，Chow 検定統計量を構成する制約付き最小二乗残差平方和部分に対応する制約付き最小二乗推定量を導出し，それによって，大学院レベルの代表的なテキストにおける Chow 検定統計量の制約付き最小二乗残差平方和部分についての解説の

補足を行いたい。

以下，２節では，上述の小稿の目的をより具体的に説明する。３節では，回帰係数の制約付き最小二乗推定量の式を用いてChow検定統計量の制約付き最小二乗推定量の導出を実際に行う。４節では，小稿の内容をまとめる。

２．小稿の目的

本節ではまず，記号の約束を兼ねて，Chow検定について小稿の議論に必要な最小限の説明を行う。

次の重回帰モデルを考える。

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_K x_{tK} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., T \tag{2.1}$$

（2.1）のように，回帰係数がtに依存しないように回帰モデルを表記した場合，tが１からTまでの全期間にわたって全ての回帰係数が変化していないことを暗黙のうちに仮定していることになる。ここで，１からTまでの間のある時点T_bにおいて，回帰係数が変化しているかもしれないという疑いがあったとしよう。すなわち，（2.1）を

$$y_t = \beta_{11} + \beta_{12} x_{t2} + \cdots + \beta_{1K} x_{tK} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., T_b \tag{2.2}$$

$$y_t = \beta_{21} + \beta_{22} x_{t2} + \cdots + \beta_{2K} x_{tK} + \varepsilon_t, \quad t = T_{b+1}, ..., T \tag{2.3}$$

のように２つの期間に分けて記したときに，

$$H_0 : \beta_{11} = \beta_{21}, \beta_{12} = \beta_{22}, ..., \beta_{1K} = \beta_{2K} \tag{2.4}$$

のK個の式のうち，少なくとも１つは成り立っていないかもしれないということである。Chow検定はこのようなときに，（2.4）を帰無仮説とし，（2.4）が成り立たないことを対立仮説として，回帰係数の変化の有無の判断に用いられる。もちろんここで，（2.2）および（2.3）のいずれにおいても観測期間は

K 以上でなくてはならず，両式とも説明変数の間に線形の関係があってはならない。

さて，(2. 2) と (2. 3) をまとめ，行列とベクトルを使って表記すると，以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{T_b} \\ \hline y_{T_b+1} \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1K} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{T_b 2} & \cdots & x_{T_b K} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x_{T_b+1\,2} & \cdots & x_{T_b+1\,K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & x_{T2} & \cdots & x_{TK} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{1K} \\ \hline \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{2K} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{T_b} \\ \hline \varepsilon_{T_b+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix} \tag{2. 5}$$

ここで，

$$\mathbf{y_1} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{T_b} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y_2} := \begin{pmatrix} y_{T_b+1} \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X_1} := \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{T_b 2} & \cdots & x_{T_b K} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X_2} := \begin{pmatrix} 1 & x_{T_b+1\,2} & \cdots & x_{T_b+1\,K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{T2} & \cdots & x_{TK} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta_1} := \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{1K} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta_2} := \begin{pmatrix} \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{2K} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon_1} := \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{T_b} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon_2} := \begin{pmatrix} \varepsilon_{T_b+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix}$$

とおくと，(2. 5) は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta_1} \\ \boldsymbol{\beta_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_1} \\ \boldsymbol{\varepsilon_2} \end{pmatrix} \tag{2. 6}$$

のように記すことができる。ただし，右辺の行列の中の $\mathbf{0}$ は，適当な零行列を表すものとする。(2. 2) は (2. 6) の記法を用いると，

$$\mathbf{y_1} = \mathbf{X_1}\boldsymbol{\beta_1} + \boldsymbol{\varepsilon_1}$$

であり，(2. 3) は

$$\mathbf{y_2}=\mathbf{X_2}\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_2$$

である。(2. 2) も (2. 3) も説明変数間に線形の関係はないと仮定され，かつ観測期間は K 以上とも仮定されているので，K 列の行列である $\mathbf{X_1}$ と $\mathbf{X_2}$ の階数はいずれも K であり，それゆえ (2. 6) 右辺の行列は明らかに階数 $2K$ であり，

$$\begin{pmatrix}\mathbf{X_1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{X_2}\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\mathbf{X_1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{X_2}\end{pmatrix},\ \mathbf{X_1}'\mathbf{X_1},\ \mathbf{X_2}'\mathbf{X_2}$$

は，行列の階数に関するよく知られた性質から，いずれも非特異であることがわかる。帰無仮説 (2. 4) が成り立っていてもいなくてもよい場合，すなわち $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2$ なる制約が課されていない場合，$\boldsymbol{\beta}_1$ と $\boldsymbol{\beta}_2$ の推定量ベクトルをそれぞれ $\mathbf{b_1}$，$\mathbf{b_2}$ とおくならば，$\mathbf{b_1}$，$\mathbf{b_2}$ は (2. 6) に通常の最小二乗法 (OLS) を適用することにより，以下のように求まる。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{b_1}\\ \mathbf{b_2}\end{pmatrix}&=\left[\begin{pmatrix}\mathbf{X_1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{X_2}\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\mathbf{X_1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{X_2}\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{X_1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{X_2}\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\mathbf{y_1}\\ \mathbf{y_2}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{X_2}'\mathbf{X_2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{X_1}'\mathbf{y_1}\\ \mathbf{X_2}'\mathbf{y_2}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}\mathbf{X_1}'\mathbf{y_1}\\ (\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\mathbf{X_2}'\mathbf{y_2}\end{pmatrix}\end{aligned}\qquad(2.7)$$

ここで，(2. 7) の右辺２行目から３行目の導出には，ブロック対角行列の逆行列の公式を用いている。(2. 7) から，制約 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2$ が課されていない場合には，$\mathbf{b_1}$ は (2. 2) のみに，$\mathbf{b_2}$ は (2. 3) のみに OLS を適用した結果求まる推定量と同じであることがわかる。

１節でも触れたように，Chow 検定統計量は回帰係数に対する線形制約の検定の応用であり，その検定統計量は (2. 6) の制約付き OLS 残差平方和と制約

無しの OLS 残差平方和から構成されている。具体的には，(2. 6) の制約付き OLS 残差平方和を $RRSS$，制約無しの OLS 残差平方和を $URSS$ とおき，Chow 検定統計量を F とおくと，

$$F = \frac{(URSS - RRSS)/K}{RRSS/(T-2K)} \tag{2.8}$$

であり，F は (2. 6) の誤差項が相互に無相関で正規分布に従うと仮定されるとき，帰無仮説 (2. 4) のもとで，自由度 K，$T-2K$ の F 分布に従う。(2. 7) によって (2. 6) の回帰係数の制約無しの OLS 推定量が求まれば，それを用いて $URSS$ を求めることができる。

それでは次に，$RRSS$ を求めるための，(2. 6) の回帰係数の制約付き OLS 推定量を見てみよう。(2. 6) を次のように記す。

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.9}$$

ここで，

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \end{pmatrix},\ \mathbf{X} := \begin{pmatrix} \mathbf{X_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X_2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta_1} \\ \boldsymbol{\beta_2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_1} \\ \boldsymbol{\varepsilon_2} \end{pmatrix}$$

である。さらに，帰無仮説 (2. 4) は次のように行列とベクトルで表記することができる。

$$H_0 : \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \tag{2.10}$$

ここで，(2. 10) の右辺の $\mathbf{0}$ は K 次の零ベクトルであり，K 次の単位行列を $\mathbf{I}$ とおくと，

$$\mathbf{R} := \left(\mathbf{I} \middle| -\mathbf{I}\right) \tag{2.11}$$

である。このとき，線形制約 (2. 10) のもとでの (2. 9) の回帰係数の OLS 推定量を $\mathbf{b}_*$ とおくと，それは次の式で求まる。

$$\mathbf{b}_* = \mathbf{b} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\left\{\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\right\}^{-1}\mathbf{Rb} \tag{2.12}$$

ここで，

$$\mathbf{b} := \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \end{pmatrix}$$

である。すなわち $\mathbf{b}$ は，（2.7）によって求まる，（2.9）の回帰係数の制約無しの OLS 推定量である。

（2.12）は，一般的な制約付き OLS 推定量の式であり，行列 $\mathbf{R}$ の階数がその行数と一致していて行数が列数以下ならば，（2.9）に限らず適用できる。（2.12）の導出については，たとえば Greene（2003）などのテキストに譲るが，右辺の行列

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}' \tag{2.13}$$

が非特異であることの理由説明は省略されているテキストも多いので，ここで触れておく。行列 $\mathbf{R}$ は，（2.11）からわかるように階数 K であり，しかもこの階数は $\mathbf{R}$ の行数でもある。よって，任意の非零 K 次ベクトル $\mathbf{a}$ を $\mathbf{R}'$ の左からかけてできるベクトル $\mathbf{R}'\mathbf{a}$ は，行列の階数の性質より $2K$ 次の非零ベクトルとなる。一方，$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ は当然非特異であるから，よく知られた定理により正値定符号行列であり，したがってこの行列とベクトル $\mathbf{R}'\mathbf{a}$ から作られる２次形式

$$\mathbf{a}'\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\mathbf{a} \tag{2.14}$$

は正の値をとる。（2.14）は，任意の非零ベクトル $\mathbf{a}$ と行列（2.13）より作られた２次形式と見ることができるから，これが正の値をとるということは，（2.13）は正値定符号行列であるはずであり，したがって非特異である。

さて，（2.12）によって回帰係数の制約付きの OLS 推定量が求まれば，それを用いて制約付きの OLS 残差平方和を求めることができるであろう。しかし，

１章で触れたように，代表的なテキストでは，その過程をスキップし，代わりに次のような導出を行っている。

いま，制約（2. 10）が正しい，すなわち $\boldsymbol{\beta_1} = \boldsymbol{\beta_2}$ が成り立っているとし，$\overline{\boldsymbol{\beta}}$ を

$$\boldsymbol{\beta_1} = \boldsymbol{\beta_2} = \overline{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{pmatrix}$$

のようなベクトルとする。そしてこのベクトルを係数ベクトルとする次の線形回帰式を OLS 推定する。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X_1} \\ \mathbf{X_2} \end{pmatrix} \overline{\boldsymbol{\beta}} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_1} \\ \boldsymbol{\varepsilon_2} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

（2. 15）は，（2. 2）と（2. 3）に制約（2. 10），すなわち（2. 4）を課したモデルをベクトルと行列を用いて記したものであるから，$\overline{\boldsymbol{\beta}}$ の OLS 推定量は（2. 12）によって求まる制約付き推定量と同じものとなっているはずである。より具体的に説明するなら，

$$\mathbf{b}_* := \begin{pmatrix} \mathbf{b_{*1}} \\ \mathbf{b_{*2}} \end{pmatrix}$$

とおくと $\overline{\boldsymbol{\beta}}$ の OLS 推定量は $\mathbf{b_{*1}}$ や $\mathbf{b_{*2}}$ と等しいはずである。代表的なテキストでは，このように（2. 15）を OLS 推定して求まる OLS 残差の平方和を，制約付きの OLS 残差平方和 *RRSS* として検定統計量に用いればよいと説明している。このような説明をしているテキストは，先に挙げた Greene（2003）や Davidson and MacKinnon（1993）などのほか，邦書では岩田（1982）がある。この説明が正しいことは直感的に明らかだが，小稿では次節において，（2. 12）によって求まる制約付き OLS 推定量が（2. 15）の OLS 推定量と等しいことを示すことにより，上記テキストの説明を補完したい。

3．Chow 検定における制約付き最小２乗推定量の導出

本節ではまず，前節の（2. 12）を，（2. 6）の記号を使って書き直す。

（2. 13）は，

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}' = \left(\mathbf{I} \middle| -\mathbf{I}\right)\begin{pmatrix} (\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1} + (\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1} \tag{3. 1}$$

のように書き直せる。

$$\mathbf{D} := (\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1} + (\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}$$

とおくとき，

$$\mathbf{R}'\left(\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\right)^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{R}'\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}\mathbf{D}^{-1}\left(\mathbf{I} \middle| -\mathbf{I}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{-1} & -\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}$$

であり，さらにこのことと **b** の定義から

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\left(\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\right)^{-1}\mathbf{R}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} (\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{D}^{-1} & -\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b_1} - (\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b_2} \\ -(\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b_1} - (\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b_2} \end{pmatrix}$$

となるから，（2. 12）は次のように記すことができる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b_{*1}} \\ \mathbf{b_{*2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} - (\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b_1}(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b_2} \\ \mathbf{b_2} - (\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b_1}(\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b_2} \end{pmatrix} \tag{3. 2}$$

さらに（2. 7）と（3. 1）より，（3. 2）の両辺の上のブロックからなる式は次

のようにかける。

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{*1} &= (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 \\ &\quad -(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\left\{(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}+(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\right\}^{-1}(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 \\ &\quad +(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\left\{(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}+(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\right\}^{-1}(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2 \qquad (3.3)\end{aligned}$$

同様に，(3.2）の両辺の下のブロックからなる式は次のようにかける。

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{*2} &= (\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2 \\ &\quad +(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\left\{(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}+(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\right\}^{-1}(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 \\ &\quad -(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\left\{(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}+(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\right\}^{-1}(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2 \qquad (3.4)\end{aligned}$$

さて，次の定理は，行列の和の逆行列に関するものである。

定理　次数が等しい２つの正方行列 $\mathbf{W}$，$\mathbf{Z}$ と，その和 $\mathbf{W}+\mathbf{Z}$ が，いずれも非特異であるとき，

$$(\mathbf{W}+\mathbf{Z})^{-1}=\mathbf{W}^{-1}-\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}\mathbf{W}^{-1} \qquad (3.5)$$

$$(\mathbf{W}+\mathbf{Z})^{-1}=\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}\mathbf{Z}^{-1} \qquad (3.6)$$

が成り立つ。

（証明）(3.5)，(3.6）のいずれも，それらの右辺と（$\mathbf{W}+\mathbf{Z}$）の積が，対応する次数の単位行列になることを示せばよい。

$$\begin{aligned}&(\mathbf{W}+\mathbf{Z})\left\{\mathbf{W}^{-1}-\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}\mathbf{W}^{-1}\right\} \\ &=\mathbf{I}-(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}-\mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}\mathbf{W}^{-1} \\ &=\mathbf{I}-\mathbf{Z}\left\{\mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}-\mathbf{I}+\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}\right\}\mathbf{W}^{-1} \\ &=\mathbf{I}-\mathbf{Z}\left\{(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}-\mathbf{I}\right\}\mathbf{W}^{-1}=\mathbf{I}\end{aligned}$$

よって（3.5）が示された。

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{W}+\mathbf{Z})\left\{\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}\mathbf{Z}^{-1}\right\}\\
&\qquad=(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}\mathbf{Z}^{-1}+\mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}\mathbf{Z}^{-1}\\
&\qquad=\mathbf{Z}\left\{\mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}+\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}\right\}\mathbf{Z}^{-1}\\
&\qquad=\mathbf{Z}\left\{(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})(\mathbf{W}^{-1}+\mathbf{Z}^{-1})^{-1}\right\}\mathbf{Z}^{-1}=\mathbf{I}
\end{aligned}
$$

よって（3.6）が示された（証明終り）。

ところで，（3.3）の右辺は

$$
\begin{aligned}
&\left[(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}-(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}\left\{(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}+(\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\right\}^{-1}(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}\right]\mathbf{X_1}'\mathbf{y_1}\\
&\qquad+\left[(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}\left\{(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}+(\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\right\}^{-1}(\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\right]\mathbf{X_2}'\mathbf{y_2} \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

のように記すことができるが，上記の「定理」の（3.5）を（3.7）の１つ目の［　］内に適用し，（3.6）を（3.7）の２つ目の［　］内に適用しすると，（3.3）は次のように書き直せる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b_{*1}}&=(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1}+\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\mathbf{X_1}'\mathbf{y_1}+(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1}+\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\mathbf{X_2}'\mathbf{y_2}\\
&=(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1}+\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}(\mathbf{X_1}'\mathbf{y_1}+\mathbf{X_2}'\mathbf{y_2}) \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

ただし，（3.7）の $\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1}$ を「定理」の $\mathbf{Z}$ に対応させ，（3.7）の $\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2}$ を「定理」の $\mathbf{W}$ に対応させている。一方，（3.4）の右辺は，

$$
\begin{aligned}
&\left[(\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}-(\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\left\{(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}+(\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\right\}^{-1}(\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\right]\mathbf{X_2}'\mathbf{y_2}\\
&\qquad+\left[(\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\left\{(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}+(\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}\right\}^{-1}(\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1})^{-1}\right]\mathbf{X_1}'\mathbf{y_1}
\end{aligned}
$$

のように記すことができるが，上と逆に $\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2}$ を「定理」の $\mathbf{Z}$ に対応させ，

$\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1}$ を「定理」の $\mathbf{W}$ に対応させた上で，上と同様の書き換えを行うと，(3. 8) の右辺と全く同じになる。すなわち，$\mathbf{b}_{*1}=\mathbf{b}_{*2}$ であることが示される。(3. 8) で求まる $\mathbf{b}_{*1}$ や $\mathbf{b}_{*2}$ は制約付きの OLS 推定量であるから，これらのうちのどちらを用いても，Chow 検定統計量を構成する制約付きの OLS 残差平方和 *RRSS* を求めることができる。

さて，前節で述べたように，(2. 15) の回帰係数 $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ の OLS 推定量は，(3. 8) で求められる制約付き推定量と同じもののはずである。$\bar{\boldsymbol{\beta}}$ の OLS 推定量を $\bar{\mathbf{b}}$ とおくとき，回帰係数の OLS 推定量の式から，

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{b}} &= \left[(\mathbf{X_1}' \quad \mathbf{X_2}')\begin{pmatrix}\mathbf{X_1}\\ \mathbf{X_2}\end{pmatrix}\right]^{-1}(\mathbf{X_1}' \quad \mathbf{X_2}')\begin{pmatrix}\mathbf{y_1}\\ \mathbf{y_2}\end{pmatrix}\\ &= (\mathbf{X_1}'\mathbf{X_1}+\mathbf{X_2}'\mathbf{X_2})^{-1}(\mathbf{X_1}'\mathbf{y_1}+\mathbf{X_2}'\mathbf{y_2}) \qquad (3.9)\end{aligned}$$

となる。(3. 9) の右辺 2 行目は (3. 8) の右辺 2 行目と等しいことから，$\mathbf{b}_{*1}=\mathbf{b}_{*2}=\bar{\mathbf{b}}$ であり，それゆえ Chow 検定統計量を構成する制約付き OLS 残差平方和 *RRSS* は，(2. 15) の OLS 残差から求めてもよいことがあらためて確認された。

4．結び

前節までに繰り返し述べてきたように，計量経済学の代表的なテキストでは, Chow 検定統計量の制約付き OLS 残差平方和部分 *RRSS* を求めるにあたり，制約付き OLS 推定量の式 (2. 12) を使わず，(2. 15) を OLS 推定して求まる OLS 残差平方和を用いる方法を説明している。むろんその理由は，後者のほうがはるかに導出が簡単なことであろう。どちらの方法でも結果として求まる OLS 推定量は同じであるけれども，小稿 3 節で示したように，(2. 12) を用いる方法では，計算も煩雑になる上，行列のあまり一般的でない定理も必要になる。3 節の「定理」のうち (3. 5) は，たとえば Harville (1997) のような，

統計の専門家を対象とした線形代数の専門書になら載っているが，標準的な計量経済学のテキストではあまり見られない。(3.6) もあまり見られないもので，筆者は自分で導出した。

上述の事情から，小稿の3節は，大学院レベルの標準的テキストにおけるChow 検定統計量の説明を補完するものとなっている。小稿が，そのレベルの計量経済学のクラスにおいて参考になれば幸いである。

参考文献

[1] Chow, Gregory C. (1960), "Tests of Equality between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions", *Econometrica*, vol.46, pp.167-174.
[2] Davidson, Russel and James G. MacKinnon (1993), *Estimation and Inference in Econometrics*, Oxford University Press.
[3] Greene, William H. (2003), *Econometric Analysis, 5th ed.*, Prentice-Hall.
[4] Harville, David A. (1997), *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*, Springer-Verlag New York（伊理正夫監訳『統計のための行列代数』シュプリンガー・ジャパン）.
[5] 畠中道雄（1996）『計量経済学の方法（改訂版）』創文社
[6] 岩田暁一（1982）『計量経済学』有斐閣