早稲田商学第 426 号
２０１０年１２月

貨幣的交換経済の動学分析

片　岡　孝　夫

1.　序

代表的個人が存在する動学的一般均衡理論を基にしてマクロ経済モデルを構築し，それが外生的技術ショックにどのように反応するかを分析することで景気変動を理解しようとする実物的景気循環理論は，今日のマクロ経済学におけるベンチマーク理論といえる。しかし，この見方が現実の景気変動の特徴をうまく捉えているか，という点については，早い段階から多くの疑問が提示されてきた。[1]

たとえば，このようなモデルで景気変動を説明するためには相当に大きく持続的な「生産性」ショックが日常的に発生している必要がある。しかしそこでいう生産性ショックを外生的な「技術」の変化とみなすことが適当であるか，という点については大いに議論の余地があろう。また持続的な生産性ショックは強い所得効果を持つので，標準的なパラメーター設定の下では現実のデーターに見られる消費量と労働供給量の間の強い正の相関関係を説明することが困難であることも指摘されている。

標準的な実物的景気循環理論は摩擦の無い一般均衡モデルを基礎としているため貨幣を持たないが，キャッシュ・イン・アドバンス制約を導入したり代表的個人の効用関数に実質貨幣残高を含めたりすることで，そこに貨幣を導入することは容易である。しかし，そのようなモデルでは貨幣的なショックが実体経済に与える強い影響力を十分に説明できず，金融政策を分析するた

（1）　たとえば Summers (1986) を見よ。

めの理論としては限界がある。[2]

こういった実物的景気循環モデルの問題点は，それが摩擦の無い市場を想定していることに起因すると考えるのは自然な発想であろう。こういった観点から，現在では貨幣を導入した実物的景気循環モデルに名目価格の硬直性，労働市場のサーチ過程，金融市場の不完全性などを組み込んだ DSGE (Dynamic Stochastic General Equilibrium) モデルが精力的に研究されている。[3] たとえば Yun (1996) は実物的景気循環モデルにキャッシュ・イン・アドバンス制約，独占的競争，名目価格の硬直的を導入したモデルを考察しているが，このようなモデルは伝統的 IS-LM モデルと似た動学的性質を持つことが知られている。

キャッシュ・イン・アドバンス制約や実質貨幣残高を効用関数に含めることで一般均衡的モデルに貨幣を導入することはしばしば行われているが，マクロ経済モデルに完全なミクロ的基礎を求める立場からは，貨幣の有用性は仮定されるべきものではなく，むしろモデルの中で説明されるべきであろう。交換のメディアとしての貨幣の機能を明示的に分析するものとしては Diamond (1984) や Kiyotaki and Wright (1991, 1993) に始まるサーチ論的な貨幣研究の系譜が存在しており，Wang and Shi (2006) や Menner (2006) はこの流れに沿った形で代表的個人モデルに貨幣を導入することを試みている。[4] しかしながら，サーチ論的な貨幣理論の枠組みにおいて，貨幣は多様な家計間で行われる不確実な二者間取引を仲介するために導入されるものであるから，代表的個人モデルとの相性は必ずしも良くない。事実，前掲論文におい

(2)　たとえば実質貨幣残高を効用関数に含める Sidrauski (1967) のモデルにおいて，効用関数を分離可能とすれば貨幣は中立的になってしまう。また Hansen-Cooley (1995) は実物的景気循環モデルにキャッシュ・イン・アドバンス制約を導入したモデルを検討し，それだけでは貨幣が実体経済に与える影響力を十分に説明できないことを論じている。

(3)　DSGE モデルの概説については加藤 (2002) が有益である。

(4)　サーチ論的な貨幣研究のサーベイとしては Shi (2005) が有用である。邦文では清水 (2002) がこの分野の入門的解説をしている。

ては，一つの家計の中に無数のメンバーが存在してサーチを行っており，個々のメンバーが直面する不確実性は，全体としての家計に統合されることよってプールされるという，やや人工的な設定を採用することでこの問題が回避されている。

本稿では，各期に外生的に生まれる多様な交換機会をランダムに受け取った家計が独立して行動するような代表的個人の存在しない動学的マクロ経済モデルにおいて貨幣の役割が検討される。ここでいう「交換機会」とは，ある種類の財を一回だけ生産し，かつ別種の財を一回だけ消費することを可能にするような機会を意味し，それを受け取った家計は自分に適した相手を探し出して１対１の交換を行う必要があるが，この生産物市場におけるサーチの過程に関し,「最適マッチング下の物々交換経済」,「ランダム・マッチング下の物々交換経済」,「貨幣的交換経済」という３つのケースを考える。

「最適マッチング下の物々交換経済」において新たな交換機会を得た家計は，自分の供給できるものを相手が需要し，相手の供給できるものを自分が需要するという意味で「欲望が二重に一致する」相手を瞬時に探し出し物々交換を行うことができると仮定される。これは基本的に多くの実物的景気循環モデル等で想定されている摩擦の無い経済に対応するものである。それに対し,「ランダム・マッチング下の物々交換経済」では，交換を求める者同士を結びつけるマッチングがランダムであり，１回のマッチングで欲望の二重の一致が成立する相手と出会えるとは限らない。ここでは，家計は何度もマッチングを繰り返すことになるが，貨幣は導入されず，人々は依然として物々交換を行っていると想定する。「貨幣的交換経済」では，ランダム・マッチングの世界に，交換のメディアとしての貨幣を導入し，各取引者は，第一段階として自分の供給できる財を貨幣と交換し，第二段階で貨幣を自分の求める消費財と交換する，という貨幣的交換を行う場合を考察する。

この経済においては，各期に発生する交換機会の量的な変化（量的生産性

ショック）と，個々の交換機会の労働生産性の変化（質的生産性ショック）という 2 種類の生産性ショックを区別して論じることができる。本稿の主要な目的は，これらの生産性ショックに対する反応が 3 つの経済でどのように異なるかを比較検討することにある。

次節ではモデルの実物的な環境を記述した上で，最適マッチング下の物々交換経済とランダム・マッチング下の物々交換の二つが検討される。第 3 節では貨幣的交換経済が分析され，第 4 節ではシミュレーション分析によって 3 つのケースが比較検討される。

本稿で得られる主な結論は以下の通りである。質的生産性ショックについては，3 つの経済の反応は類似しており，貨幣的交換の存在はマクロ経済の動学分析に大きな影響を与えない。しかし量的生産性ショックがマクロ経済に与える影響は，3 つの経済で大きく異なり，貨幣的交換の存在はその効果をより拡大し，かつ持続的にする傾向がある。特に，貨幣供給量が最適な水準よりも少なく，生産物の供給者が需要者を見つけることに苦労しているような経済においてその効果は著しく，一時的量的生産性ショックが GDP や労働供給，物価水準に与える影響は 3 年を経過しても依然として大きい。また一時的貨幣ショックに関しても，貨幣供給量が最適水準より大きい場合と小さい場合では，その効果が大きく異なり，後者のケースでは一時的貨幣ショックは極めて長期にわたって GDP や物価水準に強い影響を与え得ることが示される。これらの結論は，貨幣が不足している経済においては持続的に大きな「乗数効果」が働く可能性があることを示唆するものであり，需要ショックがマクロ経済に与える影響は一時的であるとする標準的な見解に疑問を呈するものでもある。

2.　物々交換経済

2.1　モデル

離散的時間，$t = 0, 1, 2, \cdots$，を持つ動学的経済を考える。0 期には 1 単位の無限期間生存する連続的家計が存在し，さらに各期 t (ただし $t \geq 1$) には $g(1+g)^{t-1}$ 単位の新たな家計が参入する。(g は正の定数である。) したがって人口成長率は g で一定であり，t 期の人口は $(1+g)^t$ となる。各期に $i \in [0,1)$ でインデックスされる多様で非耐久的な消費財が存在する。i 財と i' 財の「異質性の程度」は $\min(|i-i'|, 1-|i-i'|)$ で表されるものとする。これは区間 $[0,1)$ を半径 $1/(2\pi)$ の円周に対応させるとき，2 点 i, i' が成す短弧の長さに相当し，その値は 0 と 0.5 に入る。

各期 t において $(j,k) \in [0,1)^2$ でインデックスされる多様な「交換機会」が $(1+g)^t a_t$ 単位発生し，その期に生存する家計にランダムに割り当てられる。各期に発生する交換機会群のタイプ (j,k) は領域 $[0,1)^2$ 上に一様分布している。t 期に交換機会 (j,k) を与えられた家計には，t 期以降に 1 回だけ自分の労働を投入して j 財を生産し，さらに k 財との異質性の程度が $\alpha/2$ 以下であるような財を 1 回だけ消費することが可能になる。（α は 0 と 1 の間の値をとるパラメーターである。）消費と生産は異なる期に行ってもよいし，同じ期に行ってもよいが，j と k がいかに近い場合であっても，自分自身の生産物を自家消費することはできないと仮定する。各交換機会は 1 回の生産と 1 回の消費を終えた時点で消滅するが，それらの活動を終えるまでは無期限に経済に留まり，その期間中は 1 期間につき δ 単位の労働コストがかかるものとする。家計は自分が受け取った交換機会を途中で中断することはできない。

ある家計が t 期に一つの交換機会を受け取り，それを用いて t' 期に x' 単位の生産を行い，t” 期に x” 単位の消費を行うとすれば (もちろん t' と t” は t 以上でなければならない)，t' 期に $u(x')$ 単位の効用が発生するが，t” 期には

$w(x", b_{t"})$ 単位の労働を供給しなければならない。（他人の労働時間を利用して生産を行うことはできない。）$b_{t"}$ は $t"$ 期における労働生産性を表すパラメーターであり，$t"$ 期に生産を行う全ての家計で共通である。また 1 単位の労働は 1 単位の不効用を生み出すものとし，時間割引ファクターを β とすれば，この交換機会が生み出す効用を t 期で評価したものは

$$-\beta^{t''-t}w(x'', b_{t''}) + \beta^{t'-t}u(x') - \sum_{\tau=t}^{\max(t',t'')} \beta^{\tau-t}\delta$$

となる。ここでは関数 u, w を次のように特定化する。

$$u(x) = x^{\gamma},$$
$$w(x, b) = \frac{x^{\eta}}{b},$$

ただし γ は 0 と 1 の間の値，η は 1 以上の値をとるパラメーターである。

一つの交換機会を受け取った家計は，交換相手を求めて市場に参加する必要がある。市場では 1 期間につき 1 回のマッチングが行われ，交換を求める者同士が引き合わされて交渉を行うが，人々は自分に適した相手と出会えるまで何期間も市場に留まり，サーチ活動を繰り返す可能性がある。ところで家計はある時点に複数の交換機会を新たに受け取ることはないが，一つの交換機会を得て市場で交換相手をサーチしている最中の家計が，さらにもう一つの交換機会を受け取り，結果的に複数の交換機会を並行して運用することは考えられる。しかしここでは，市場でサーチ活動を行っている者の人口は家計全体に比べて十分小さいため，新たに誕生した交換機会が，既にサーチ中の家計に割り当てられる可能性を無視できると仮定する。(5)

(5)　この想定は議論を単純化する。また，一つの家計が複数の交換機会を保有する可能性を認めたとしても，そのような家計は 1 期間あたりマッチングに 2 回参加できると考えるならば本稿の議論を変更する必要はない。ただしその場合には，一方の交換機会のために参加したマッチングにおいて，他方の交換機会に関する交渉はできないと仮定しなければならない。

家計が交換機会を受け取るタイミングは彼の行動から独立であり，また彼が一つの交換機会に関してとる行動は，他の交換機会から受け取る効用と独立であるから，人々は与えられた交換機会一つ一つについて，そこから発生する期待効用を最大化するように行動すればよい。したがって以下では，個々の交換機会を独立した経済主体と見なして議論を進める。

t 期において交換機会を保有し市場でサーチ活動を行っている者の人口 (家計 1 単位あたり) を n_t とし，その中で h_t 単位が t 期中に x_t 単位の消費財を生産し，他の家計に消費させたとしよう。このとき家計 1 単位あたりの GDP, 労働供給量，効用発生量 (それぞれ y_t, l_t, ω_t と表記する) は，

$$\begin{aligned} y_t &= h_t x_t \\ l_t &= h_t w(x_t, b_t) + n_t \delta, \\ \omega_t &= h_t u(x_t) - l_t \end{aligned}$$

となる。

各期 t における交換機会の発生量 a_t と労働生産性 b_t はそれぞれ t 期の生産性に関する「量的」,「質的」な水準を表すパラメーターといえるが，それらはある定常的な値 a, b の近傍に留まるとし，定常点からの乖離の比率，$(a_t - a)/a$, $(b_t - b)/b$, をそれぞれ $\hat{a}_t$, $\hat{b}_t$ と表そう。（以下，^ 記号のついた変数は全て定常水準からの乖離率を表すものとする。）列ベクトル $(\hat{a}_t, \hat{b}_t)^\top$ を t 期の生産性ショックと呼び e_t と表記する。(添え字の $\top$ は転置を表す記号である。) 生産性ショック e_t は t 期の家計にとって観察可能であり，以下の動学方程式に従うと仮定する。

$$e_t = G\, e_{t-1} + \epsilon_t \tag{1}$$

ただし $\epsilon_t = (\epsilon_t^a, \epsilon_t^b)^\top$ は生産性ショックに対する t 期のイノベーションを表す平均ゼロ，i.i.d. の確率変数であり，その分散行列を H と表す。また定常性

を保証するため，行列 G の 2 つの固有値は，いずれも複素平面上の単位円の中にあると仮定する。定常分布における e_t の分散行列を M とすれば

$$M = \sum_{i=0}^{\infty} G^i\, H\, (G^i)^\top$$

であり，e_{t+i} と e_t の共分散行列は $G^i M$ で与えられる。

2.2 最適マッチング下の物々交換経済

ここでは，各期に誕生した交換機会は，その期のうちに適当な交換相手（たとえばタイプ (j, k) の交換機会にとっては，それと対称的なタイプ (k, j) の機会）を瞬時に探し出してペアを組み，どれだけの消費財を交換するかについてナッシュ交渉を行うような場合を検討する。交渉を行うペアは対称的であるから，両者が交換する財の量は，それによって生まれる利得 $u(x_t) - w(x_t, b_t)$ を最大化するように定まるので，その一階条件から次式が得られる。

$$x_t = \left(\frac{\gamma b_t}{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta-\gamma}} \tag{2}$$

最適マッチング下の物々交換経済では t 期の家計 1 単位あたり市場参加人口 n_t と，生産者人口 h_t はいずれも，その期の交換機会発生量 a_t と等しくなるから，家計 1 単位あたりの GDP，労働供給量，効用発生量はそれぞれ，

$$y_t = a_t x_t = \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta-\gamma}} \; a_t\, b_t^{\frac{1}{\eta-\gamma}},$$

$$l_t = a_t (w(x_t, b_t) + \delta) = a_t \left(\left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^{\frac{\eta}{\eta-\gamma}} b_t^{\frac{\gamma}{\eta-\gamma}} + \delta\right)$$

$$\omega_t = a_t\left(u(x_t) - w(x_t, b_t) - \delta\right) = a_t \left(\phi b_t^{\frac{\gamma}{\eta-\gamma}} - \delta\right)$$

である。ただし上式における ϕ は以下で定義される定数である。

$$\phi \equiv \left(\left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^{\frac{\gamma}{\eta-\gamma}} - \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^{\frac{\eta}{\eta-\gamma}}\right)$$

$b_t = b$ かつ $a_t = a$ となる定常均衡の近傍で上の式を一次近似し，$\hat{y}_t$ 等の変数で表せば，

$$o_t = O\, e_t$$

と書ける。ただし，

$$o_t = \begin{pmatrix} \hat{y}_t \\ \hat{l}_t \\ \hat{\omega}_t \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\eta-\gamma} \\ 1 & \frac{\gamma w}{(\eta-\gamma)(w+\delta)} \\ 1 & \frac{\gamma(u-w)}{(\eta-\gamma)(u-w-\delta)} \end{pmatrix}$$

である。この式の 1 期における期待値を取り，$e_0 = 0$ とおいて (したがって $e_1 = \epsilon_1$ である) 整理すれば

$$E_1(o_t) = O\, G^{t-1} \epsilon_1$$

となるが，これは 1 期の生産性ショック ϵ_1 が GDP 等の系列に与えるインパルス・レスポンスを表している。また定常分布における o_t の分散と自己共分散を求めれば，

$$\mathrm{var}(o_t) = O\, M\, O^{\top}$$
$$\mathrm{cov}(o_{t+i}, o_t) = O\, G^i\, M\, O^{\top}$$

となる。

2.3　ランダム・マッチング下の物々交換経済

上では，自分に適した交換相手を探し出すための費用が存在しないため，すべての市場参加者は 1 回のマッチングで交換を完了できるような場合を考察した。本項では，市場参加者はランダムに選ばれた相手とペアを組み，欲望の二重の一致が成立した場合にのみ交換の交渉を行えるような場合を考える。ここでは市場参加者の多くは，自分に適した交換相手とめぐり合うまで何期間もマッチングを繰り返さなければならない。

ここでも t 期における家計 1 単位あたりの市場参加者人口を n_t と表そう。彼らはランダムに引き合わされ $n_t/2$ 単位のペアを作るが，それらのうち α^2 の割合だけで欲望が二重に一致し交換が行われる。残りは次期のマッチングに再び参加することになるので，市場参加人口に関して

$$n_{t+1} = \frac{1-\alpha^2}{1+g} n_t + a_{t+1} \tag{3}$$

が成立する。

a_t, b_t が a, b で一定であり，かつ n_t が n で一定となるような定常均衡においては，(3) 式より

$$n = \frac{1+g}{\alpha^2+g} a$$

となる。この定常均衡の近傍において (3) 式を線形近似し，これまでと同様，$(n_t - n)/n$ を $\hat{n}_t$ と表そう。列ベクトル $(\hat{a}_t, \hat{b}_t, \hat{n}_t)^\top$ を $\bar{e}_t$ と表せば，

$$\bar{e}_{t+1} = \bar{G}\, \bar{e}_t + \bar{J}\, \epsilon_{t+1} \tag{4}$$

と書ける。ただし $\bar{G}$, $\bar{J}$ は以下で定義される行列である。

$$\bar{G} \equiv \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{G}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline \frac{aG_{1,1}}{n} & \frac{aG_{1,2}}{n} & \frac{1-\alpha^2}{1+g} \end{array} \right), \quad \bar{J} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{a}{n} & 0 \end{pmatrix}$$

(4) 式を展開すれば $\bar{e}_t$ の定常分布における分散行列は，

$$\bar{M} \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \bar{G}^t\, \bar{J}\, H\, \bar{J}^\top (\bar{G}^\top)^t$$

で示されることが分かる。

α^2 の確率で「欲望が二重に一致」したペアは，お互いが提供し合う消費財の量，x_t，をナッシュ交渉により決定するとしよう。ここでも x_t は交換により発生する利得 $u(x_t) - w(x_t, b_t)$ を最大化するように決まるので，最適マッ

チングの場合と同様 (2) 式が成立する。このとき t 期に発生する家計 1 単位あたり GDP，労働供給量と効用発生量は

$$y_t = \alpha^2 x_t n_t = \alpha^2 \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta-\gamma}} b_t^{\frac{1}{\eta-\gamma}} n_t$$

$$l_t = (\alpha^2 w(x_t, b_t) + \delta) n_t = \left(\alpha^2 \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^{\frac{\eta}{\eta-\gamma}} b_t^{\frac{\gamma}{\eta-\gamma}} + \delta\right) n_t$$

$$\omega_t = \left(\alpha^2 (u(x_t) - w(x_t, b_t)) - \delta\right) n_t = \left(\alpha^2 \psi b_t^{\frac{\gamma}{\eta-\gamma}} - \delta\right) n_t$$

である。これらを定常均衡の近傍で線形近似し，整理すれば，

$$o_t = \bar{O}\, \bar{e}_t$$

と書ける。ただし，

$$\bar{O} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\eta-\gamma} & 1 \\ 0 & \frac{\eta\alpha^2 w}{(\eta-\gamma)(\alpha^2 w+\delta)} & 1 \\ 0 & \frac{\gamma\alpha^2(u-w)}{(\eta-\gamma)(\alpha^2(u-w)-\delta))} & 1 \end{pmatrix}$$

である。

先ほどと同様にして，上式の 1 期における期待値をとり $\bar{e}_0 = (0, 0, 0)^\top$ とすれば，

$$E_1(o_t) = \bar{O}\bar{G}^{t-1}\, \bar{J}\epsilon_1$$

となり，生産性ショック ϵ_1 の o_t の列に対するインパルス・レスポンスが求められる。また定常分布における o_t の分散行列と自己共分散行列は以下のとおりである。

$$\mathrm{var}(o_t) = \bar{O}\, \bar{M}\, \bar{O}^\top$$

$$\mathrm{cov}(o_{t+i}, o_t) = \bar{O}\, \bar{G}^i\, \bar{M}\, \bar{O}^\top$$

3. 貨幣的交換経済

この節では，ここまで論じてきた経済に交換のメディアとしての貨幣を導入し，各生産機会が貨幣的交換を行う場合を分析する。この経済における貨幣とは，政府のみが費用ゼロで生産することができる，耐久的，分割不可能，かつそれ自体は効用をもたらさないような財である。

3.1 均衡条件

ここでは各交換機会は，第一段階として自分の生産する財を 1 単位の貨幣と交換し，次の段階で貨幣を自分の好む消費財と交換する。第一段階の交換を行おうとしている者は「供給者」，第二段階の交換を行おうとしている者は「需要者」である。t 期のマッチングに需要者や供給者として参加する者が現在保有している交換機会から受け取る効用の期待値をそれぞれ，v_t^D や v_t^S とし，t 期における家計 1 単位あたりの供給者人口を s_t，需要者人口を m_t と表そう。各需要者は 1 単位の貨幣を持っているから m_t は家計 1 単位あたり貨幣供給量と解釈できる。また m_t, s_t は t 期の人々にとって観察可能であるとする。

貨幣供給量の列は政府によって外生的に与えられる。ここでは貨幣供給量の列が単調増加であること，すなわち各期において

$$m_t - \frac{m_{t-1}}{1+g} \geq 0$$

が成立すると仮定する。[(6)] 需要者と供給者の間で t 期のマッチングが行われる直前に，政府は家計 1 単位あたり $m_t - m_{t-1}/(1+g)$ 単位の貨幣を生産し，まだ貨幣を入手していない市場参加者中から同量をランダムに選んで，1 人

(6) 貨幣供給量が減少する場合，政府は貨幣を保有する需要者から何らかの形で貨幣を回収する必要があるが，このモデルの設定において，それを自然な形で表現するのは難しい。定常均衡において m_t は一定であり，人口成長率 g は正であると仮定されているから，その近傍で，この仮定は自然である。

につき 1 単位ずつ貨幣を提供する。t 期首に政府から貨幣を受け取った者は，供給者ではなく需要者としてマッチングに参加できるようになるため，期待効用が $v_t^D - v_t^S$ だけ上昇することになる。ここでは，そのようにして貨幣を受け取る者は，この期待効用の上昇分を丁度相殺するだけの労働生産物を政府に支払うと仮定する。彼が政府に支払う生産物の量を z_t とすれば，それを生産するための労働，z_t^η / b_t，は $v_t^D - v_t^S$ と等しくなるから

$$z_t = b_t^{\frac{1}{\eta}} \left(v_t^D - v_t^S\right)^{\frac{1}{\eta}}$$

が成立する。政府は貨幣増発によって回収した消費財を廃棄すると仮定するが，その生産量は GDP の一部としてカウントされる。

各期の貨幣供給量 m_t はある定常的な水準 m の近傍にあるものとし，$\hat{m}_t = (m_t - m)/m$ は以下の貨幣政策ルールに従うと仮定する。(7)

$$\begin{aligned}\hat{m}_t = {} & G_{3,1}\hat{a}_{t-1} + G_{3,2}\hat{b}_{t-1} + G_{3,3}\hat{m}_{t-1} + G_{3,4}\hat{s}_{t-1} \\ & + J_{3,1}\epsilon_t^a + J_{3,2}\epsilon_t^b + \epsilon_t^m\end{aligned}$$

上式における ϵ_t^m は t 期における貨幣政策固有の i.i.d. ショックを表し，その平均はゼロ，分散は σ_m^2 であるとする。

各期において需要者と供給者の間でランダムな 1 対 1 のマッチングが 1 回だけ行われるが，一般に両者の人口は等しくないので，t 期に成立するペアは $(1+g)^t \min(s_t, m_t)$ 単位であり，需要者か供給者の一方はマッチングにあぶれる可能性がある。t 期の供給者 $(1+g)^t s_t$ 単位のうち $\alpha(1+g)^t \min(s_t, m_t)$ 単位は，自分の供給できる財を望む需要者と出会い，交換を行って需要者に変わる。また残りの $(1+g)^t(s_t - \alpha \min(s_t, m_t))$ 単位のうち $(1+g)^{t+1} m_{t+1} - (1+g)^t m_t$ 単位は $t+1$ 期首に政府から貨幣を受取ることで需要者に変わる。一方で，$t+1$

(7) この政策ルールの右辺に現われる変数は $\hat{a}_t, \hat{b}_t, \hat{s}_t$ の情報を含んでいるから，t 期の貨幣供給量は同時期の生産性や供給者人口に依存すると考えてもよい。

期には $(1+g)^{t+1}a_{t+1}$ 単位の供給者が新たに経済に参入するから，供給者人口に関して，

$$s_{t+1}=\frac{s_t-\alpha\min(s_t,m_t)}{1+g}-\left(m_{t+1}-\frac{m_t}{1+g}\right)+a_{t+1} \tag{5}$$

が成立する。

t 期のマッチングで，自分の望む財を生産できるような供給者と出会えた需要者について考えよう。x_t 単位の消費財と引き換えに貨幣を渡すことに合意したとすれば，彼は $u(x_t)$ の効用を得て交換を終了することができる。一方，交換を拒否すれば，次期に再び需要者としてマッチングに参加し $\beta E_t(v^D_{t+1})$ の期待効用を得る。したがって，彼が交換に合意することによって得る期待効用のゲインは，

$$u(x_t)-\beta E_t(v^D_{t+1})\geq 0 \tag{6}$$

である。取引が行われるためには上式が非負である必要がある。

次に，t 期のマッチングで，自分が生産できる財を欲しているような需要者と出会えた供給者について考えよう。彼が x_t 単位の生産物と引き換えに貨幣を入手すれば，その期に $w(x_t,b_t)$ の労働の不効用が発生するが，次期には需要者としてマッチングに参加できるから，その場合の期待効用は $-w(x_t,b_t)+\beta E_t(v^D_{t+1})$ である。交換を拒否した場合には，次期に再び供給者としてマッチングに参加するか，政府の増発する貨幣を受け取って需要者になる，という二つの可能性がある。前者の期待効用は $\beta E_t(v^S_{t+1})$，後者の期待効用は $\beta(E_t(v^D_{t+1})-w(z_{t+1},b_{t+1}))$ であるが，両者が一致するように z_{t+1} が調整されるので，交換に合意することによって得られる期待効用ゲインは

$$-w(x_t,b_t)+\beta E_t(v^D_{t+1})-\beta E_t(v^S_{t+1})\geq 0 \tag{7}$$

であるといってよい。ここでも交換が行われるためには，上式が非負でなければならない。

需要者と供給者は，貨幣と何単位の財を交換するかに関してナッシュ交渉を行うものとする。すなわち x_t は b_t, $E_t(v^D_{t+1})$, $E_t(v^S_{t+1})$ を所与とし，両者の期待効用ゲインの積を最大にするように定まるが，この最大化問題の一階条件を整理すれば x_t に関する多項式

$$(\gamma+\eta)x_t^{\eta}-\beta\eta E_t(v^D_{t+1})x_t^{\eta-\gamma}-\beta\gamma b_t(E_t(v^D_{t+1})-E_t(v^S_{t+1}))=0 \qquad (8)$$

が得られる。この式は，第一項の係数が正，(7) より定数項が負であるので，x_t が正の領域で少なくとも一つの解を持つ。また (8) 式は正の領域で複数の解を持ち得ないことも容易に示せるので，与えられた $b_t, E_t(v^D_{t+1}), E_t(v^S_{t+1})$ に対し正の x_t が一意に定まることになる。(8)

v^D_t, v^S_t は次のベルマン方程式を満たさなければならない。

$$\begin{aligned} v^D_t &= \frac{\alpha\min(s_t,m_t)}{m_t}u(x_t) \\ &\quad+\left(1-\frac{\alpha\min(s_t,m_t)}{m_t}\right)\beta E_t(v^D_{t+1})-\delta, \qquad (9)\\ v^S_t &= \frac{\alpha\min(s_t,m_t)}{s_t}\left(-w(x_t,b_t)+\beta E_t(v^D_{t+1})\right) \\ &\quad+\left(1-\frac{\alpha\min(s_t,m_t)}{s_t}\right)\beta E_t(v^S_{t+1})-\delta \qquad (10)\end{aligned}$$

$\{(s_t,v^D_t,v^S_t,x_t)\}_{t=0}^{\infty}$ の確率過程が各期において (5), (6), (7), (8), (9), (10) を満たすならば，それは貨幣的均衡となる。貨幣的均衡において発生する家計 1 単位あたり GDP，労働供給量，効用はそれぞれ

$$y_t=\alpha\min(s_t,m_t)x_t+\left(m_t-\frac{m_{t-1}}{1+g}\right)z_t,$$

$$l_t=\alpha\min(s_t,m_t)w(x_t,b_t)+(s_t+m_t)\delta+\left(m_t-\frac{m_{t-1}}{1+g}\right)(v^D_t-v^S_t),$$

---

(8)　もし，これが複数の解を持つとすれば，(8) 式左辺の微分，

$$x_t^{\eta-\gamma-1}\left(\eta(\gamma+\eta)x^{\gamma}-\beta\eta(\eta-\gamma)E_t(v^D_{t+1})\right)$$

は正の領域で 2 回以上ゼロになるはずであるが，それは不可能である。

$\omega_t = \alpha \min(s_t, m_t) u(x_t) - l_t$

である。また t 期において 1 単位の貨幣は x_t 単位の消費財と交換されているので x_t の逆数を物価水準と解釈することができる。これを p_t と表そう。

3.2　定常均衡

a_t, b_t, m_t の値が a, b, m で一定であるとき，s_t, v_t^D, v_t^S, x_t が一定となるような均衡を定常均衡と呼び，タイミングを表す添え字を省略する。定常均衡において (5) 式は

$$\min(s, m) = \frac{(1+g)a - g(s+m)}{\alpha} \tag{11}$$

となるが，これは s と m の大小関係によって場合分けされているので，$m > s$ となる定常均衡をタイプ I，$m \leq s$ となる定常均衡をタイプ II と呼ぶことにしよう。それぞれのタイプについて (11) 式を解けば，

$$s = \begin{cases} \frac{(1+g)a-gm}{\alpha+g} & \text{ただし} \quad m \in \left(\frac{(1+g)a}{\alpha+2g}, \frac{(1+g)a}{g}\right) \quad \text{（タイプ I）} \\ \frac{(1+g)a-(\alpha+g)m}{g} & \text{ただし} \quad m \leq \frac{(1+g)a}{\alpha+2g} \quad \text{（タイプ II ）} \end{cases} \tag{12}$$

となる。

貨幣供給量 m が $\frac{(1+g)a}{\alpha+2g}$ と等しいとき，タイプ I とタイプ II の境界上の定常均衡が実現するが，このときの供給者人口 s は需要者人口 m と一致し，各期のマッチングにあぶれる者は存在しないので，貨幣的交換は最も効率的になる。この貨幣供給量を最適な貨幣供給量とよび，m^* と表そう。貨幣供給量が m^* より大きいため，供給者人口に対し貨幣量＝需要者人口が過剰となるタイプ I の定常均衡において，m がさらに 1 単位上昇すれば定常均衡における供給者人口 s は $g/(\alpha+g)$ 単位低下し，需要者人口と供給者人口の不均衡は拡大する。逆に貨幣が m^* より小さく需要者人口に対して供給者人口が多すぎるようなタイプ II の定常均衡において m がさらに 1 単位減少すれば，s

は $(\alpha+g)/g$ 単位上昇し，ここでも需要者人口と供給者人口の不均衡は拡大する。しかし $(\alpha+g)/g$ は $g/(\alpha+g)$ より大きいので（経済成長率 g が小さな値をとるとすれば，その差は極めて大きなものになるかもしれない），貨幣供給量の変化が定常均衡に与える影響力は二つのタイプ間で対称的ではない。このことは第 4 節のシミュレーション分析において一層明らかになるだろう。

2 つのベルマン方程式 (9), (10) 式を定常均衡において評価し，(11) 式を用いて整理すれば，定常均衡における両者の期待効用 v^D, v^S は定常均衡における消費の効用 u と各生産者の労働供給量 w の一次式で表現されることが分かる。

$$v^D = v_u^D\, u + v_0^D, \tag{13}$$

$$v^S = v_u^S\, u + v_w^S\, w + v_0^S, \tag{14}$$

ただし，この式の係数は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
v_u^D &= \frac{(1+g)a - g(m+s)}{\beta(1+g)a + (1-\beta-\beta g)m - \beta gs},\\
v_0^D &= \frac{-m\delta}{\beta(1+g)a + (1-\beta-\beta g)m - \beta gs},\\
v_u^S &= \frac{\beta((1+g)a - g(m+s))v_u^D}{\beta(1+g)a - \beta gm + (1-\beta-\beta g)s},\\
v_w^S &= \frac{-(1+g)a + g(m+s)}{\beta(1+g)a - \beta gm + (1-\beta-\beta g)s},\\
v_0^S &= \frac{\beta\big((1+g)a - g(m+s)\big)v_0^D - \delta s}{\beta(1+g)a - \beta gm + (1-\beta-\beta g)s}
\end{aligned}$$

また定常均衡において需要者と供給者が交換を行うことで得る期待効用のゲインは

$$u - \beta v^D = g_u^D\, u + g_0^D,$$

$$-w + \beta(v^D - v^S) = g_u^S\, u + g_w^S\, w + g_0^S$$

となる。ただし，

$$
\begin{aligned}
g_u^D &= 1 - \beta v_u^D, \\
g_0^D &= -\beta v_0^D, \\
g_u^S &= \beta(v_u^D - v_u^S), \\
g_w^S &= -1 - \beta v_w^S, \\
g_0^S &= \beta(v_0^D - v_0^S)
\end{aligned}
$$

である。

これらの表現を用いれば，定常均衡におけるナッシュ積最大化のための一階条件は

$$
(\gamma g_w^S - \eta g_u^D)x^\eta + (b\gamma g_u^S)x^\gamma + (-\eta g_0^D)x^{\eta-\gamma} + (b\gamma g_0^S) = 0
$$

と書ける。これを数値的に解くことで x が求まれば，定常均衡における消費の効用 $u = x^\gamma$ と労働量 $w = x^\eta / b$ が求まり，(13), (14) 式より v^D, v^S が定まる。これらが定常均衡において評価した非負制約 (6), (7) を満足するならば定常均衡が求められたことになる。

3.3　定常均衡の近傍における動学分析

ここでは定常均衡の近傍において均衡条件を一次近似し，線形の動学体系を導出することを考える。ただし均衡条件 (5), (9), (10) は s_t と m_t の大小関係に応じて場合分けされているので，タイプ I とタイプ II の定常均衡の近傍では線形化された動学方程式の係数は異なるかもしれない。はじめにタイプ I の定常均衡の近傍を分析することからはじめよう。

貨幣的交換経済において t 期の「状態」は $(\hat{a}_t, \hat{b}_t, \hat{m}_t, \hat{s}_t)^\top$ で表されることになるが，これを $\widetilde{e}_t$ と表そう。タイプ I 定常均衡の近傍では $\min(m_t, s_t) = s_t$ であるから，供給者人口の動学方程式 (5) を一次近似して整理すれば，状態

ベクトル $\widetilde{e}_t$ は次の AR(1) 過程に従うことが分かる。

$$\widetilde{e}_t = \widetilde{G}\,\widetilde{e}_{t-1} + \widetilde{J}\,\widetilde{\epsilon}_t \tag{15}$$

と書ける。ただし 2 つの行列 $\widetilde{G}$, $\widetilde{J}$, および列ベクトル $\widetilde{\epsilon}_t$ は以下のように定義される。

$$\widetilde{G} = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{G}} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline G_{3,1} & G_{3,2} & G_{3,3} & G_{3,4} \\ \frac{aG_{1,1}-mG_{3,1}}{s} & \frac{aG_{1,2}-mG_{3,2}}{s} & \frac{(1-(1+g)G_{3,3})m}{(1+g)s} & \frac{(1-\alpha)s-(1+g)mG_{3,4}}{(1+g)s} \end{array}\right),$$

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ J_{3,1} & J_{3,2} & 1 \\ \frac{a-mJ_{3,1}}{s} & \frac{-mJ_{3,2}}{s} & -\frac{m}{s} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\epsilon}_t = \begin{pmatrix} \epsilon_t^a \\ \epsilon_t^b \\ \epsilon_t^m \end{pmatrix}$$

$\widetilde{\epsilon}_t$ は貨幣経済における外生的ショックのイノベーションを表す i.i.d., 平均ゼロの確率ベクトルであり，その共分散行列は

$$\widetilde{H} \equiv \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{H}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sigma_m^2 \end{array}\right)$$

で与えられる。これまでと同様にして，状態ベクトル $\widetilde{e}_t$ の定常分布における分散行列 $\widetilde{M}$ を求めれば,

$$\widetilde{M} \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \widetilde{G}^t\,\widetilde{J}\,\widetilde{H}\,\widetilde{J}^\top(\widetilde{G}^\top)^t$$

である。

次に (8), (9), (10) 式をタイプ I の定常均衡の近傍で一次近似し，dx_t を消去して整理すれば,

$$A\,E_t(v_{t+1}) = B\,v_t + C\,\widetilde{e}_t \tag{16}$$

と書ける。ただし

$$v_t \equiv \begin{pmatrix} dv_t^D \\ dv_t^S \end{pmatrix},$$

$$A \equiv \begin{pmatrix} \beta(m-\alpha s)F_x - \alpha s u' F_D & -\alpha s u' F_S \\ \alpha\,(\beta F_x + w_x F_D) & \beta(1-\alpha)F_x + \alpha w_x F_S \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} mF_x & 0 \\ 0 & F_x \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha b s u' F_b & \alpha s(u-\beta v^D)F_x & -\alpha s(u-\beta v^D)F_x \\ 0 & \alpha b(w_b F_x - w_x F_b) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_x = \eta(\gamma+\eta)x^{\eta-1} - \beta\eta(\eta-\gamma)v^D x^{\eta-\gamma-1},$$

$$F_D = -\beta\eta x^{\eta-\gamma} - \beta b\gamma,$$

$$F_S = \beta b\gamma,$$

$$F_b = -\beta\gamma(v^D - v^S),$$

である。

行列 A は非特異であると仮定し，$A^{-1}B$，$A^{-1}C$ をそれぞれ K, L と記そう。(16) 式を展開し整理すれば次式を得る。

$$K^{-\tau}E_t(v_{t+\tau}) = v_t + \sum_{k=1}^{\tau} K^{-k}\,L\,\widetilde{G}^{k-1}\,\widetilde{e}_t$$

この経済は発散せず，K の 2 つの固有根はいずれも複素平面状の単位円の外にあると仮定すれば，上式左辺は τ が大きくなるにつれてゼロに収束するから，

$$v_t = N\,\widetilde{e}_t \tag{17}$$

となる。ただし

$$N = -\sum_{k=1}^{\infty} K^{-k}\, L\, \widetilde{G}^{k-1}$$

である。

タイプ I 定常均衡の近傍で家計 1 単位あたり GDP，物価水準，労働供給量，効用発生量を線形近似し，$\left(\hat{y}_t, \hat{p}_t, \hat{l}_t, \hat{\omega}_t\right)^{\top}$ を $\widetilde{o}_t$ として整理すれば，

$$\widetilde{o}_t = P^A\, E_t(v_{t+1}) + P^B\, v_t + P^C\, \widetilde{e}_t + P^D\, \widetilde{e}_{t-1} \tag{18}$$

と書ける。ただし

$$P^A \equiv \begin{pmatrix} \frac{-\alpha s F_D}{y F_x} & \frac{-\alpha s F_S}{y F_x} \\ \frac{F_D}{x F_x} & \frac{F_S}{x F_x} \\ \frac{-\alpha s w_x F_D}{l F_x} & \frac{-\alpha s w_x F_S}{l F_x} \\ \frac{-\alpha s (u' - w_x) F_D}{\omega F_x} & \frac{-\alpha s (u' - w_x) F_S}{\omega F_x} \end{pmatrix},$$

$$P^B = \begin{pmatrix} \frac{gmz}{\eta(1+g)(v^D - v^S) y} & \frac{-gmz}{\eta(1+g)(v^D - v^S) y} \\ 0 & 0 \\ \frac{gm}{(1+g)l} & \frac{-gm}{(1+g)l} \\ \frac{-gm}{(1+g)\omega} & \frac{gm}{(1+g)\omega} \end{pmatrix},$$

$$P^C \equiv \begin{pmatrix} 0 & \frac{gmz}{\eta(1+g)y} - \frac{\alpha b s F_b}{y F_x} & \frac{mz}{y} & \frac{\alpha s x}{y} \\ 0 & \frac{b F_b}{x F_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha b s}{l}\left(w_b - \frac{w_x F_b}{F_x}\right) & \frac{m}{l}(\delta + v^D - v^S) & \frac{(\alpha w + \delta)s}{l} \\ 0 & -\frac{\alpha b s}{\omega}\left(w_b + \frac{(u' - w_x)F_b}{F_x}\right) & \frac{m(-\delta - v^D + v^S)}{\omega} & \frac{(\alpha(u-w) - \delta)s}{\omega} \end{pmatrix},$$

$$P^D \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{zm}{(1+g)y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m(v^D - v^S)}{(1+g)l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(v^D - v^S)}{(1+g)\omega} & 0 \end{pmatrix}$$

である。

(16), (17), (18) 式を整理し行列 $\left(P^A\,K + P^B\right)\,N + P^C$ を Q と表記すれば次式を得る。

$$\widetilde{o}_t = Q\,\widetilde{e}_t + P^D\,\widetilde{e}_{t-1} \tag{19}$$

さらに $\widetilde{e}_0 = 0$ とおけば (15) 式と (19) 式より，

$$\begin{aligned}
\widetilde{o}_1 &= Q\widetilde{J}\widetilde{\epsilon}_1, \\
E_1(\widetilde{o}_2) &= (Q\widetilde{G} + P^D)\widetilde{J}\widetilde{\epsilon}_1, \\
&\vdots \\
E_1(\widetilde{o}_t) &= \left(Q\,\widetilde{G} + P^D\right)\widetilde{G}^{t-2}\widetilde{J}\widetilde{\epsilon}_1 \quad (t \geq 2)
\end{aligned}$$

となり，1 期のショック $\widetilde{\epsilon}_1$ が $\widetilde{o}_t$ の経路に与えるインパルス・レスポンスが計算できる。また $\widetilde{e}_t$ の定常分布における分散行列は $\widetilde{M}$ であったから $\widetilde{o}_t$ の分散行列と自己共分散行列は以下のように求まる。

$$\mathrm{var}(\widetilde{o}_t) = Q\widetilde{M}Q^\top + Q\widetilde{G}\widetilde{M}(P^D)^\top + P^D\widetilde{M}\widetilde{G}^\top Q^\top + P^D\widetilde{M}(P^D)^\top$$

$$\mathrm{cov}(\widetilde{o}_{t+i}, \widetilde{o}_t) = Q\widetilde{G}^i\widetilde{M}Q^\top + Q\widetilde{G}^{i+1}\widetilde{M}(P^D)^\top + P^D\widetilde{G}^{i-1}\widetilde{M}Q^\top + P^D\widetilde{G}^i\widetilde{M}(P^D)^\top$$

ここまではタイプ I 定常均衡の近傍で動学体系を線形近似したが，タイプ II 定常均衡の近傍においても同様の分析が可能であり，そこでの動学も (15), (19) 式の形で表現できる。ただしここでは，$\widetilde{G}, A, B, C, P^A, P^C$ の係数行列は以下のように変わる。

$$\widetilde{G} = \begin{pmatrix}
G_{1,1} & G_{1,2} & 0 & 0 \\
G_{2,1} & G_{2,2} & 0 & 0 \\
G_{3,1} & G_{3,2} & G_{3,3} & G_{3,4} \\
\frac{aG_{1,1} - mG_{3,1}}{s} & \frac{aG_{1,2} - mG_{3,2}}{s} & \frac{(1-\alpha-(1+g)G_{3,3})m}{(1+g)s} & \frac{s-(1+g)mG_{3,4}}{(1+g)s}
\end{pmatrix},$$

$$A \equiv \begin{pmatrix} (1-\alpha)\beta F_x - \alpha u' F_D & -\alpha u' F_S \\ \alpha m(\beta F_x + w_x F_D) & \beta s F_x + \alpha m(-\beta F_x + w_x F_S) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} F_x & 0 \\ 0 & sF_x \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha b u' F_b & 0 & 0 \\ 0 & \alpha b m(w_b F_x - w_x F_b) & C_{2,3} & C_{2,4} \end{pmatrix},$$

$$C_{2,3} = -\alpha(-w + \beta(v^D - v^S))mF_x,$$

$$C_{2,4} = \alpha(-w + \beta(v^D - v^S))mF_x,$$

$$P^A \equiv \begin{pmatrix} \frac{-\alpha m F_D}{yF_x} & \frac{-\alpha m F_S}{yF_x} \\ \frac{F_D}{xF_x} & \frac{-F_S}{xF_x} \\ \frac{-\alpha m w_x F_D}{lF_x} & \frac{-\alpha m w_x F_S}{lF_x} \\ \frac{-\alpha m(u'-w_x)F_D}{\omega F_x} & \frac{-\alpha m(u'-w_x)F_S}{\omega F_x} \end{pmatrix},$$

$$P^C \equiv \begin{pmatrix} 0 & \frac{gmz}{\eta(1+g)y} - \frac{\alpha b m F_b}{F_x y} & \frac{m(\alpha x + z)}{y} & 0 \\ 0 & \frac{bF_b}{F_x x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha b m}{l}\left(w_b - \frac{w_x F_b}{F_x}\right) & \frac{m}{l}(\alpha w + \delta + v^D - v^S) & \frac{\delta s}{l} \\ 0 & -\frac{\alpha b m}{\omega}\left(w_b + \frac{(u'-w_x)F_b}{F_x}\right) & \frac{m(\alpha(u-w)-\delta-v^D+v^S)}{\omega} & -\frac{\delta s}{\omega} \end{pmatrix}$$

4.　シミュレーション分析

本節では，これまで分析した 3 つの経済の動学的特徴を，シミュレーション分析により明らかにする。ところで本稿のモデルで現れるパラメーターの一覧は以下の通りであるが，シミュレーションを行う前に，これらの値を決定しておく必要がある。

- $a \in (0,1)$: 家計 1 単位あたり交換機会発生量
- $b > 0$: 労働生産性

- $g > 0$: 1 期間あたり人口成長率
- $\alpha \in (0, 1)$: 消費可能な財の範囲 (=貨幣的交換の成功確率)
- $\beta \in (0, 1)$: 1 期間あたり時間選好ファクター
- $\gamma \in (0, 1)$: 消費の効用関数のパラメーター
- $\eta > 1$: 生産関数のパラメーター
- $\delta > 0$: 交換機会の 1 期間あたり生存費用
- $m > 0$: 家計 1 単位あたり貨幣供給量 (=全人口に占める需要者の比率)
- $G_{1,1}, G_{1,2}, G_{2,1}, G_{2,2}, H$: 生産性ショックの動学方程式におけるパラメーター
- $G_{3,1}, G_{3,2}, G_{3,3}, G_{3,4}, J_{3,1}, J_{3,2}, \sigma_m^2$: 通貨政策ルール

このモデルでは，取引を求める者たちの間で 1 期間あたり 1 回のマッチングが行われるとされている。したがって，そのようなマッチングが週に 1 回程度行われていると想定するならば，1 年間は本モデルの 52 期間に相当することになる。さらに 1 年あたりの経済成長率を 3%，1 年あたりの時間割引ファクターを 0.95 とするならば，1 期間あたりの経済成長率と時間割引ファクターはそれぞれ 0.0006，0.9990 となる。各家計は平均して 5 年に 1 回の率で新たな交換機会を受け取るとしよう。したがって 1 期間中に新たな交換機会を受け取る確率 a は $0.2/52 = 0.0039$ となる。貨幣的交換経済において貨幣供給量が最適な水準にあるとすれば，マッチングにあぶれる者は存在しないので，新たに誕生した交換機会は 3ヶ月間で 13 回のマッチングを経験するはずであるが，その間に 2 回の交換に成功して交換を完了できる者が半数程度存在すると仮定しよう。すなわち

$$(1-\alpha)^{13}+13\alpha(1-\alpha)^{12}=0.5$$

である。これを数値的に解けば $\alpha=0.1258$ となる。以上のように g, a, α を定めるとき最適貨幣供給量は

$$m^{*}=\frac{(1+g)a}{\alpha+2g}=0.0303$$

になる。もし貨幣供給量が m^{*} の近傍にあるとすれば，需要者と供給者の人口はほぼ等しくなるので，各期に市場に参加する者は人口の 6%程度になる。

この経済において余剰を最大にするような最適な交換が行われるとすれば，各取引で交換される消費財の量 x は (2) 式で与えられ，それを消費することから生まれる効用 u とそれを生産するために失われる労働の不効用 w はそれぞれ，$(\gamma b/\eta)^{\frac{\gamma}{\eta-\gamma}}$，$(\gamma b/\eta)^{\frac{\eta}{\eta-\gamma}}/b$ になる。このとき消費の効用 u は，それを生み出すために必要となる労働の不効用 w の 2 倍程度であると仮定しよう。すなわち，

$$\frac{(\gamma b/\eta)^{\frac{\gamma}{\eta-\gamma}}b}{(\gamma b/\eta)^{\frac{\eta}{\eta-\gamma}}}=\frac{\eta}{\gamma}=2$$

であるが，η は 1 以上であるから，γ は 0.5 と 1 の間にある。γ の値をその中間である 3/4 に設定すれば，η は 1.5 となる。

最適な取引量による交換が行われるならば，1 回の交換は $u-w$ の純効用を生み出すが，これまでのパラメーター設定を受け入れるならば，その値は $b/4$ となる。ところで貨幣的交換経済において貨幣供給量が最適な水準の近傍にあるとき，各交換機会は 3ヶ月間で 13 回のマッチングを経験し，その中で半数程度が取引を完了すると仮定した。このとき失われる 13 期間分のサーチ費用は最適な交換がもたらす純効用の 10%であると仮定しよう。これは δ が $b/520$ で与えられることを意味する。労働生産性を表すパラメーター b については，$b=10$ として計算を行った。なお，この値を 1 や 100 に変化させてもシミュレーションの結果はほとんど変わらなかった。

表 1　定常均衡

		x	y	ω	s/m
最適マッチング & 物々交換		1.00	1.00	1.00	—
ランダム・マッチング & 物々交換		1.00	0.97	0.50	—
貨幣的交換	$m = 1.1m^*$	0.79	0.78	0.84	0.91
	$m = 1.05m^*$	0.83	0.83	0.85	0.95
	$m = m^*$	0.88	0.87	0.86	1.00
	$m = 0.995m^*$	1.87	1.85	0.44	2.12
	$m = 0.99m^*$	2.60	2.56	–0.37	3.25

表 1 は，ここまでのパラメーターの下で 3 つの経済における定常均衡を求め比較したものである。(x, y, ω の値については最適マッチング下の物々交換経済における値を 1 に基準化してある。) 最適マッチング下の物々交換経済とランダム・マッチング下の物々交換経済において，取引量は余剰を最大にする水準に定まるので x の値は等しい。しかしランダム・マッチング下ではサーチが何度も繰り返されるためサーチ費用が大きくなり，ω の値は半分程度にまで下がっている。[9] 貨幣的交換経済では，取引量 x は余剰を最大にする水準から外れているが，ランダム・マッチング下の物々交換経済に比べればサーチ期間が節約されるので，貨幣供給量が最適な水準 m^* にある限り，最適マッチング下の物々交換と近い効用水準が実現できる。

貨幣供給量が m^* から離れるにつれて s/m の値が 1 から乖離し，貨幣的交換の効率性が下がるため ω の値は低下するが，1 単位の貨幣供給量の変化が定常均衡に与える影響はタイプ I とタイプ II で大きく異なる。貨幣が過剰なタイプ I の定常均衡においては貨幣供給量が m^* よりも 10%大きくなったとしても，大きな変化は見られない。しかし貨幣供給量が過少なタイプ II の定常均衡では，m の値が最適な水準から僅かに 1%不足するだけで定常均衡における s/m は大きく上昇し，供給者が需要者に出会うことは困難になるた

(9)　2 つの経済では GDP の値はほぼ等しい。これはサーチ活動にかかわる労働コストが GDP の定義に反映されていないことによる。

め，純効用 ω の値が負になってしまうのである。

また表 1 からは貨幣供給量が拡大するにしたがって定常均衡における取引量 x と GDP の値は縮小することが読み取れる。これは，貨幣の増加により供給者がマッチングにあぶれる確率は低下し，その交渉力が強くなることで，貨幣と引き換えに提供される労働生産物の量が減少することによる。以下では，貨幣供給量について $m = 1.1m^*$ のケース (タイプ I) と $m = 0.995m^*$ のケース (タイプ II) の二つを検討しよう。行列 K の固有値は，タイプ I の場合 1.053 と 1.008 であり，タイプ II の場合では 1.057 と 1.003 であった。したがってこれらのパラメーター設定は前節でおいた仮定と整合的である。

各種のインパルス・レスポンスを計算するためには，ここまでに設定したパラメーターに加え，生産性ショックの動学方程式と通貨政策ルールの係数を設定する必要がある。ここではそれらに関し，可能な限り単純な仮定を採用し，

$$G = \begin{pmatrix} 0.5^{\frac{1}{13}} & 0 \\ 0 & 0.5^{\frac{1}{13}} \end{pmatrix},$$
$$\hat{m}_t = 0.5^{\frac{1}{13}}\hat{m}_{t-1} + \epsilon_t^m$$

かつ ϵ_t^a と ϵ_t^b の共分散がゼロであるとした。これは量的生産性ショック，質的生産性ショックが 3ヶ月間で半減することを意味する。さらに GDP 等の変動係数や自己相関係数を求めるためには ϵ_t^a, ϵ_t^b, ϵ_t^m の分散を定めなければならないが，ここでは量的生産性ショックのみが起こるケース（$\mathrm{var}(\epsilon_t^a) = 1$, $\mathrm{var}(\epsilon_t^b) = \mathrm{var}(\epsilon_t^m) = 0$），質的生産性ショックのみが起こるケース（$\mathrm{var}(\epsilon_t^b) = 1$, $\mathrm{var}(\epsilon_t^a) = \mathrm{var}(\epsilon_t^m) = 0$），および貨幣的ショックのみが起こるケース（$\mathrm{var}(\epsilon_t^m) = 1$, $\mathrm{var}(\epsilon_t^a) = \mathrm{var}(\epsilon_t^b) = 0$）の 3 つを検討した。

表 2 は量的生産性ショックの GDP に対するインパルス・レスポンスを示しているが，a_t の変動が GDP や労働供給に与える効果はそれぞれのケース

表 2　量的生産性ショック ϵ_1^a の $\hat{y}_t$ 等に対するインパルス・レスポンス

	最適マッチング & 物々交換		ランダム・マッチング & 物々交換		貨幣的交換 (タイプ I)			貨幣的交換 (タイプ II)		
	$\hat{y}_t$	$\hat{l}_t$	$\hat{y}_t$	$\hat{l}_t$	$\hat{y}_t$	$\hat{l}_t$	$\hat{p}_t$	$\hat{y}_t$	$\hat{l}_t$	$\hat{p}_t$
t = 1	1.00	1.00	0.02	0.02	0.13	0.12	0.00	0.07	0.10	−0.04
3ヶ月後	0.50	0.50	0.15	0.15	0.23	0.21	0.00	0.13	0.19	−0.07
半年後	0.25	0.25	0.19	0.19	0.54	0.50	0.00	0.72	1.04	−0.43
1 年後	0.06	0.06	0.16	0.16	0.18	0.17	0.00	1.15	1.66	−0.68
2 年後	0.00	0.00	0.08	0.08	0.01	0.01	0.00	1.26	1.80	−0.74
3 年後	0.00	0.00	0.03	0.03	0.00	0.00	0.00	1.23	1.70	−0.72

で大きく異なっている。2 つの物々交換経済において 1 回の交換で取引される消費財の量 x_t は b_t だけに依存しており，取引人口の影響を受けない。したがって最適マッチング下の物々交換経済における GDP はその期に発生する取引機会の量 a_t に正確に対応しており，量的生産性ショックの影響は 3ヶ月ごとに半減していく。一方，ランダム・マッチング下の物々交換経済における GDP は市場参加人口 n_t に対応しているが，a_t のショックは n_t に累積的な効果を与えるため，その影響はより持続的になる。

次に貨幣的交換経済を見てみよう。貨幣供給が潤沢なタイプ I の定常均衡の近傍において正の量的生産性ショックは取引人口 αs_t と各取引における取引量 x_t の両方を変化させることで GDP に影響を与えるが，物価水準 p_t がほとんど一定であることからも分かるように，後者の影響は大きくない。ここでは，a_t の増加は供給者人口を増やし，取引が成立するペアの量を増大させることで GDP を拡大するが，その効果は累積的であるため GDP に対する影響は半年程度のラグを伴うことになる。一方，貨幣供給量が取引人口のボトルネックとなるタイプ II 定常均衡の近傍では，量的生産性ショックは取引人口 αm_t を変化させないから，GDP に対する影響は x_t の変化のみによって引き起こされる。ここでは，交換機会の発生量が一時的に増加することは，

表 3　質的生産性ショック ϵ_1^b の $\hat{y}_t$ 等に対するインパルス・レスポンス

	最適マッチング & 物々交換		ランダム・マッチング & 物々交換		貨幣的交換 (タイプ I)			貨幣的交換 (タイプ II)		
	$\hat{y}_t$	$\hat{l}_t$	$\hat{y}_t$	$\hat{l}_t$	$\hat{y}_t$	$\hat{l}_t$	$\hat{p}_t$	$\hat{y}_t$	$\hat{l}_t$	$\hat{p}_t$
t = 1	1.33	0.99	1.33	1.35	0.64	−0.03	−1.05	0.62	−0.07	−0.80
3ヶ月後	0.67	0.50	0.67	0.67	0.61	−0.03	−1.00	0.59	−0.07	−0.76
半年後	0.33	0.25	0.33	0.34	0.31	−0.01	−0.50	0.29	−0.03	−0.38
1 年後	0.08	0.06	0.08	0.08	0.08	−0.00	−0.12	0.07	−0.01	−0.10
2 年後	0.01	0.00	0.01	0.01	0.00	−0.00	−0.00	0.00	−0.00	−0.00
3 年後	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	−0.00	−0.00	0.00	−0.00	−0.00

供給者人口を拡大し，その交渉力を弱める。このことにより各供給者が貨幣と引き換えに支払う消費財の量は増加し，GDP は増加するのである。この効果は過剰になった供給者人口が貨幣量の増加によって吸収されるまで続くので極めて長期間持続し，またその期間中は a_t の効果が累積されるため GDP の変動幅も大きくなる。事実，ランダム・マッチング下の物々交換経済とタイプ I の貨幣的交換経済において量的生産性ショックの影響はショック後半年程度でピークを迎え，その後は減衰してゆくのに対し，タイプ II の貨幣的交換経済ではショック後 3 年が経過した時点でもその影響力は顕著である。以上の点は表 5 の上段において，タイプ II 貨幣的交換経済における GDP の変動係数 $\sigma(\hat{y}_t)$ と自己相関係数 $\rho(\hat{y}_t, \hat{y}_{t-52})$ が極めて高くなっていることにも表れている。

表 3 には質的生産性ショックの GDP 等に対するインパルス・レスポンスが示されている。ここでは，いずれのケースにおいても取引人口は一定であり，GDP への影響は x_t を通してのみ表れる。(2) 式から分かるように物々交換経済における取引量 x_t は b_t の増加関数であるから，労働生産性の上昇は GDP と労働供給量を拡大するが，その効果は生産性ショックと歩調を合わせて減衰する。これはタイプ I，タイプ II の貨幣的交換経済においても同

表 4　貨幣的ショック ϵ_1^m の $\hat{y}_t$ 等に対するインパルス・レスポンス

	貨幣的交換 (タイプ I)			貨幣的交換 (タイプ II)		
	$\hat{y}_t$	$\hat{l}_y$	$\hat{p}_y$	$\hat{y}_t$	$\hat{l}_y$	$\hat{p}_y$
t = 1	8.02	6.97	0.15	8.64	7.90	0.32
3ヶ月後	−1.51	−1.24	0.15	−0.08	−0.37	0.34
半年後	−0.23	−0.18	0.08	−0.69	−1.12	0.55
1 年後	−0.00	−0.01	0.02	−1.13	−1.60	0.70
2 年後	−0.00	−0.00	0.00	−1.24	−1.78	0.73
3 年後	−0.00	−0.00	0.00	−1.21	−1.74	0.71

様であるが，労働供給量に対する効果は物々交換経済と貨幣的交換経済では方向が逆になっている。

表 4 は 2 つの貨幣的交換経済において貨幣的ショックが GDP，労働供給，物価水準に与えるインパルス・レスポンスを示しているが，ここでいう「貨幣的ショック」には若干の注意が必要であろう。定常均衡にあった経済において，t 期に正の貨幣的ショック ($\epsilon_t^m > 0$) が観測されたとすれば，それは t 期における貨幣の増加量が通常よりも大きかったことを意味するが，家計 1 単位あたりの貨幣供給量 m_t は時間の経過とともに本来の水準を回復すると仮定されているから，このショックは $t+1$ 期以降の貨幣増発分を定常均衡における水準よりも圧縮する効果を持つのである。

貨幣的交換経済において貨幣供給量の変化は 3 つの経路を通して GDP に影響を与える可能性がある。第一に，貨幣供給量が増加することは，政府が通常より多くの貨幣を増発し，それによって民間の生産物をより多く買い入れることを意味するので，需要面から t 期の GDP を拡大させる効果を持つ。ただし t 期の貨幣供給量の拡大は将来の貨幣供給量の増分を減少させるので，この効果は $t+1$ 期以降には逆に作用することに注意する必要がある。第二に，貨幣供給量の変化は需要者と供給者の人口を変化させることを通して取引人口に影響を与え，GDP を変化させる。たとえば貨幣供給量が増えたとす

れば，政府が発行する貨幣を受け取った供給者が需要者に変わることで供給者人口が減少するが，これは供給者人口が交換のボトルネックとなるタイプIの貨幣的交換経済において，取引人口を低下させGDPを低下させる効果を持つ。しかし需要者人口がボトルネックとなるタイプIIの均衡では，貨幣供給量の増加は取引人口を拡大するので，この効果は逆になる。第三に，貨幣的ショックは需要者と供給者の交渉力を変化させることで個々の取引量 x_t に影響を与える。貨幣供給量の拡大により供給者人口が相対的に低下すれば，供給者の交渉力が高まり，彼らが貨幣と引き換えに提供する消費財の量は低下する。この観点からは，貨幣供給量の増加はGDPに負の影響，物価水準に正の影響を与えることになろう。

表4の数値はこれらの効果が合成されたものであるが，タイプI，タイプIIいずれのケースにおいても，貨幣供給量の拡大は当初GDPを拡大するものの，その後はGDPに対して持続的な負の効果を持つことが分かる。また表2で論じられたように，タイプIIの均衡においては貨幣的ショックによって引き起こされた供給者人口，需要者人口のかく乱が人口や貨幣供給の成長によって旧に復するためには長い時間がかかるので，その影響は極めて持続的である。タイプI均衡において，貨幣的ショックの影響は1年程度でほぼ消滅するが，タイプII均衡では2年ほどのラグをおいて表れ，3年が経過してもその影響は依然として大きい。このことは表5の下段においてタイプII均衡におけるGDPの変動係数と自己相関係数が極めて大きな値を示していることにも表れている。

以上見てきたように，生産性ショックや貨幣ショックが経済に与える効果を考える上で，交換のメディアとしての貨幣の働きを考慮することは極めて重要であり，また貨幣が十分に供給されている場合とその逆の場合では量的生産性ショックや貨幣的ショックが経済に与える効果はその規模と持続性において大きく異なることが明らかになった。金融不況期には，流動性の不足により

表 5　GDP，雇用量，物価水準の変動

		$\sigma(\hat{y}_t)$	$\sigma(\hat{l}_t)$	$\rho(\hat{y}_t,\hat{l}_t)$	$\sigma(\hat{p}_t)$	$\rho(\hat{y}_t,\hat{p}_t)$	$\rho(\hat{y}_t,\hat{y}_{t-52})$
	最適 & 物々交換	3.14	3.14	1.00	—	—	0.06
$\sigma_a^2=1$	ランダム-物々交換	1.53	1.53	1.00	—	—	0.59
$\sigma_b^2=0$	貨幣的交換 $(m=1.1m^*)$	2.66	2.45	1.00	0.02	1.00	0.10
$\sigma_m^2=0$	貨幣的交換 $(m=0.995m^*)$	31.83	45.76	1.00	18.79	−1.00	0.99
	最適 & 物々交換	4.19	3.12	1.00	—	—	0.06
$\sigma_a^2=0$	ランダム& 物々交換	4.19	4.23	1.00	—	—	0.06
$\sigma_b^2=1$	貨幣的交換 $(m=1.1m^*)$	2.03	0.09	−1.00	3.31	−1.00	0.06
$\sigma_m^2=0$	貨幣的交換 $(m=0.995m^*)$	1.94	0.21	−1.00	2.57	−1.00	0.06
$\sigma_a^2=\sigma_b^2=0$	貨幣的交換 $(m=1.1m^*)$	8.58	7.45	1.00	0.50	−0.01	0.03
$\sigma_m^2=1$	貨幣的交換 $(m=0.995m^*)$	32.55	45.91	1.00	18.56	−0.96	0.91

供給者人口に比べて需要者人口が不足すると考えられるが，このような時期における貨幣政策を考える上で本モデルは有用な示唆を与えるかもしれない。

参考文献

［1］ Cooley, T.F. and G.D. Hansen, 1995, “Money and the Business Cycles”, in T.F. Cooley ed., *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton Univ. Press.

［2］ Diamond, P., 1984, “Money in Search Equilibrium”, *Econometrica* 52.

［3］ Kiyotaki, N. and R. Wright, 1991, “A Contribution to the Pure Theory of Money,” *Journal of Economic Theory* 53 (2).

［4］ Kiyotaki, N. and R. Wright, 1993, “A Search-Theoretic Approach to Monetary Economics,” *American Economic Review* 83 (1).

［5］ Menner, M., 1996, “A Search-Theoretic Monetary Business Cycle Model with Capital Formation”, *Contributions to Macroeconomics* 6 (1).

［6］ Sidrauski, M., 1967, “Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy,” *American Economic Review* 57 (2).

［7］ Shi, S., 2005, “Viewpoint: A microfoundation of monetary economics”, *Canadian Journal of Economics* 39 (3).

［8］ Summers, L.H., 1986, “Some skeptical observation on real business cycle theory,” *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review* 10 (4).

［9］ Yun, T., 1996, “Nominal Rigidity, Money Endogeneity, and Business Cycles,” *Jour-*

nal of Monetary Economics 37.
［10］ Wang, W. and S. Shi, (2006), “The variability of velocity of money in a search model,” *Journal of Monetary Economics* 53.
［11］ 加藤涼，(2007),「現代マクロ経済学講義」，東洋経済新報社。
［12］ 清水崇，(2002),「貨幣のサーチモデル」，経済セミナー 2002 年 9 月。