# 管理会計情報の有用性(2)

## ——エイジェンシー・モデルによる検証——

佐藤紘光

〔前稿の目次〕



〔本稿の目次〕



## Ⅴ　セカンド・ベスト解

前節で得たファースト・ベスト解（FBS）は，業績情報が管理者行動$a$（努力水準）を完全測定するという理想的な前提条件のもとで得られた。この前提条件は，前述したように，経営者が管理者行動を完全に観察できることを意味するから，情報収集の禁止的なコストを考慮に入れるならば，現実的情況のもとでは，この条件が充足されるのは，極めてまれであろうと考えなければならない。そこで，本節では，完全情報の仮定を緩め，不完全ではあるがなんらかの形で努力をサロゲイトする情報が入手できる場合を考察しよう。その最も代表的なものが実績$x$に関する情報であろう[1]。

実績（の期待値）と努力の間には，さきに仮定したように，正の相関が

あるから，実績情報を通じて，行使された努力水準に関してなんらかの予測を行うのは十分可能であろう。つまり，優れた（劣った）実績が実現したときには，おそらく高（低）水準の努力が行使されたであろうと判断しうるであろう。しかし，第1図に示したように，両者は，通常，確率的関係でしかないから，時として，高水準の努力を払ったにもかかわらず低い実績に終ったり，逆に，環境に恵れて，なんら努力をしないにもかかわらず優れた実績に結びつくことが，確率的には僅かであっても，起りうる。こうした条件のもとでは，管理者には，自己の怠慢を環境の悪さに責任転嫁する余地が残される。したがって，この場合に，FBS の最適報酬ルールである固定給 $r^*$ を管理者に補償するときには，努力を最小限に抑制させてしまうという moral hazard 現象が生じる[2]。

管理者に対してこのような契約違反行為を行わせないようにするには，（3－6）の誘因提供すなわち動機づけの制約条件を充足することが不可欠となる（FBSを支えた完全情報の仮定がこの条件式の充足を不要としたことに注意しよう）。われわれは，以下，（3－4）～（3－6）の問題で得られる均衡解をセカンド・ベスト解（以下 SBS と略称する）と呼ぶ。

そこで，SBS の導出過程を詳論しよう。（3－4），（3－5）および（3－7）の定式に対するラグランジュ関数$L$は次のように定義される。

$$L=\int\{G(x-r(x))+\lambda U(r(x))\}f(x|a)dx$$
$$+\mu\int U(r(x))f_a(x|a)dx-\lambda(V(a)+\overline{U})-\mu V'(a) \qquad (5-1)$$

ここで，$\mu$は制約式（3－7）に対応するラグランジュ定数である。上式の被積分関数を $x$ の各点に対応する $r(x)$ に関してポイントワイズに偏微分して最適性の必要条件を適用すると，最適報酬関数 $r^*(x)$ は，すべての $x$ に対して，次式を満足するものとして導かれる。

$$G'(x-r^*(x))/U'(r^*(x))=\lambda+\mu\frac{f_a(x|a)}{f(x|a)} \qquad (5-2)$$

上式は，FBS における（4－3）に対応している。一方，所与の $r(x)$ のもとで（5－1）を $a$ に関して偏微分して，最適性条件を適用すると，最適努力水準 $a^*$ は次式を満足するものとして導かれる。

$$\partial L/\partial a=\int G(x-r(x))f_a(x|a)dx+\lambda\left\{\int U(r(x))f_a(x|a)dx-V'(a)\right\}+\mu\left\{\int U(r(x))f_{aa}(x|a)\,dx-V''(a)\right\}=0 \qquad (5-3)$$

上式の第2項は，（3－7）より，消去される。したがって，$\mu$ に関して次式を得る。

$$\mu=\frac{\int G(x-r(x))f_a(x|a)dx}{-\left\{\int U(r(x))f_{aa}(x|a)dx-V''(a)\right\}} \qquad (5-4)$$

上式右辺分母のカッコ内の定式は（3－5）の $a$ に関する2階偏微分を表わしているから，これは $a^*$ の最適性の十分条件を表わしていると解される。$a^*$ が（3－5）の左辺を最大化すると仮定すれば，そのときにかぎり，これは負の値をとるはずである[3]。したがって，上式の分子が正であるとき，$\mu$ はつねに正の値をとることになる[4]。ここで，分子が正の値になるという命題は，管理者が行使する努力が増加するにつれ，経営者の期待効用が増加する，つまり，経営者が管理者の努力を歓迎することを意味する。われわれの $G$ と $f_a(x|a)$ に関する仮定はこの含意を満足させる。

SBS は，（3－5），（5－2）および（5－3）を同時に満足する解として導かれる。第1表の数値例にこれを適用しよう。われわれの仮定では，経営者はリスク中立，管理者は報酬に対して $2\sqrt{r(x)}$ の効用関数をもち，$f_a(x|a)=kd\sigma^{-2}a^{d-1}(x-\theta-ka^d)f(x|a)$ であったから，（5－2）は，

$$r(x)=\{\lambda+\mu kd\sigma^{-2}a^{d-1}(x-\theta-ka^d)\}^2 \qquad (5-5)$$

を意味する。これを（3－7）に代入すると，$V'(a)=2a$ であったから，

$$\mu=\sigma^2(kd)^{-2}a^{3-2d}$$

を得る。これを（5－5）に代入すると，

$$r(x)=\{\lambda+(kd)^{-1}a^{2-d}(x-\theta-ka^d)\}^2 \qquad (5-6)$$

となる。さらにこれを（5－3）に代入すると，

$$\lambda=0.5kda^{d-2}-(\sigma/kd)^2(2-d)a^{2-2d} \qquad (5-7)$$

を得る。（5－7）を（5－6）に代入すれば，$r(x)$ は $a$ のみを未知数とする関数となるから，その結果を（3－5）に代入して，等式を成立させる $a$ の値を探せば，それが最適値 $a^*$ となる。

以上の結果が第3表に要約されている[5)]。ここで，$\bar{r}^*$ は報酬 $r^*(x)$ の期待値，$\sigma(r^*(x))$ はその標準偏差を示す[6)]。

**第3表　SBS（不完全情報の場合）**

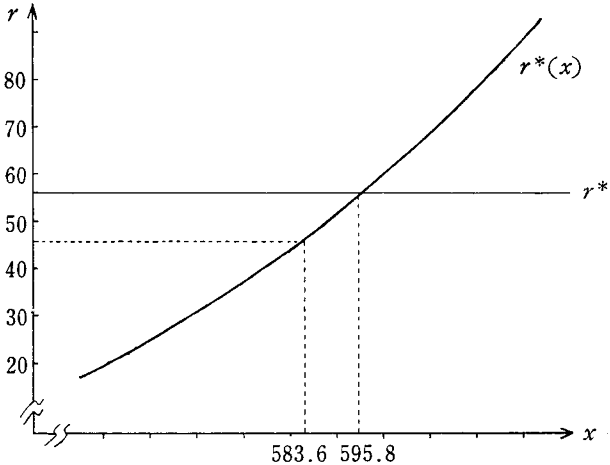
| |
|---|
| $a^*=1.90356$ |
| $r^*(x)=[(kd)^{-1}a^{*2-d}(x-\bar{x}^*)+\lambda^*]^2$ |
| $\quad=(0.054128(x-\bar{x}^*)+6.81176)^2$ |
| $\bar{x}^*=\theta+ka^{*d}=583.6803$ |
| $\lambda^*=0.5kda^{*d-2}-(\sigma/kd)^2(2-d)a^{*2-2d}$ |
| $\quad=6.81176$ |
| $\mu^*=(\sigma/kd)^2a^{*3-2d}=3.84781$ |
| $\bar{r}^*=\int r^*(x)f(x\mid a^*)dx$ |
| $\quad=53.72459$ |
| $\sigma(r^*(x))=\sqrt{2}\,\sigma(kd)^{-1}a^{2-d}(2\lambda^2+(\sigma a^{2-d}/kd)^2)^{\frac{1}{2}}$ |
| $\quad=38.29795$ |
| $O^*=\bar{x}^*-\bar{r}^*=529.9557$ |
| $W^*=O^*+\bar{U}=539.9557$ |

SBS と前節の FBS を比較しながら，この結果のもつ意味を検討しよう。

(a)　SBS の目的関数値 $O^*$ は，その名称が示すように，FBS のそれより

も低い。その直接的原因は，努力 $a^*$ が低下したことに求められる。ただし，FBS の $a^*$ は，それが行使されないときはペナルティが課せられるという強制的条件のもとで維持されたのに対し，ここでの努力水準は管理者自身の動機的構造から自発的に喚起されているという相違がある。

(b) 最適報酬関数 $r^*(x)$ は実績 $x$ を独立変数とする増加関数である。FBS の $r^*$ との比較が第3図に示されている。$r^*$ が固定的であったのに対し，$r^*(x)$ は実績の良し悪しに応じて変動する体系になっている[7]。




**第3図　$r^*$ と $r^*(x)$ の比較**

管理者がリスクを嫌悪する以上，報酬は固定的であるのが理想的であるが，このように変動的な報酬スケジュールが導かれたのは，moral hazard 現象を回避するために他ならない。換言すれば，優れた業績に対しては高い報酬を予定し，悪い業績には低い報酬を適用するというリスクを敢えて課さなければ所定の努力を喚起できないのである。管理者にとっても所定の努力を行使する意のあるところを相手に知らせ，納得させるには，実績に対する結果責任を引き受けなければならないのである。

FBS の報酬 $r^*$ は，管理者にとって管理不能な要因である確率現象を業

績評価の対象から除外している。その意味において，この業績評価ルールは，管理会計論が主張してきた管理可能性基準（controllability）に合致すると考えられる。それに対して，ここで導いた業績評価ルール $r^*(x)$ は，管理不能要因に対しても責任の一端を負わせるべきであると主張する。両者の対比は，管理可能性基準が必ずしも無条件に妥当する一般原則ではないことを示唆する。われわれは，不確実性下の動機づけというより一般的な情況のもとで，この原則が具体的にいかなる意味をもつべきかをあらためて検討しなければならないであろう。

ただし，報酬が変動するというリスクが課せられるために，これを嫌悪する管理者にとって報酬の期待効用はそれに応じて減少する。(a)で指摘したように，FBS に比べ努力が低下したのはそのためである。

(c) 第3表の $O^*$ ないし $W^*$ を前節で論じた無情報の場合のそれと対比すると，両者の差は，54.9557 となる。これは，実績情報を業績評価に活用することから得られる経済的効果，すなわち，実績情報のもつ情報価値を表わすものと理解される。

ここで，後述の論議に関係づけるために，このモデルにおいて実績情報が報酬の決定にどのような作用を与えるか，その背後にある論理を B. Holmstrom に従って検討しておこう[8)]。本例の場合，（5－2）は次のように展開される。

$$r(x)=\left(\lambda+\mu\frac{f_a(x|a)}{f(x|a)}\right)^2 \qquad (5-8)$$

（4－5）との対比において，上式右辺の第2項がなにを意味するかが明らかにされなければならない[9)]。ここで，視点を変えて，努力 $a$ は，これまで規定してきたように決定変数ではなく，実績 $x$ を通じてその真の値を推定しようとする未知のパラメータであるとみなすと，$x$ は，$a$ を推定するために $f(x|a)$ に従う母集団から抽出した無作為サンプルと考えるこ

とができる。サンプル数は1個しかないから，$a$ を未知数とする尤度関数 $l(a)$ は，次式のように，母集団分布 $f(x|a)$ に一致する。

$$l(a)=f(x|a)=(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}exp-(x-\theta-ka^{d})/2\sigma^{2}$$

ここで，$l(a)$ の自然対数

$$ln\ l(a)=-1/2\ ln(2\pi\sigma^{2})-(x-\theta-ka^{d})^{2}/2\sigma^{2}$$

をとり，これを $a$ で偏微分して最尤推定の必要条件を求めると次式を得る。

$$\partial ln\ l(a)/\partial a=kd\sigma^{-2}a^{d-1}(x-\theta-ka^{d})=0 \qquad (5-9)$$

上式の $kd\sigma^{-2}a^{d-1}(x-\theta-ka^{d})$ は，（5—8）の $f_{a}(x|a)/f(x|a)$ に一致する。$a$ の最尤推定値は（5—9）より，

$$a=((x-\theta)/k)^{1/d} \qquad (5-10)$$

となる。つまり，経営者は，$x$ の実現値に応じて（5—10）で求められる水準の努力 $a$ が行使されたものと推定して，業績を評価すると解しうるのである[10)]。たとえば，実績 $x$ が $\theta+ka^{*d}$ に一致したときに，推定値は $a^{*}$ に合致し，（5—9）が成立して $f_{a}(x|a)/f(x|a)$ が零になる結果，報酬 $r^{*}(x)$ は $\lambda^{2}$ になる。そのとき $\overline{U}$ の効用が実現する。実績 $x$ が $\theta+ka^{*d}$ を上回る（下回る）ときには，$a$ の推定値は $a^{*}$ を上回り（下回り），$\overline{U}$ を超える（下回る）効用が実現する。

(d)　報酬のもつリスクの大きさが努力水準に重要な影響を与える事実については既に述べた。その大きさは標準偏差 $\sigma(r^{*}(x))$ で表わされる。第3表のその定式をみると，それが実績情報のもつリスク $\sigma$ の増加関数であることがわかる。したがって，$\sigma$ の減少（増加）は，動機づけ能力の増加（低下）を通じて，期待利益の増加（減少）をもたらす。このように不確実性と動機づけとの間には負の相関が見い出される。かりに，$\sigma=0$，すなわち確実性を仮定する場合には，たとえ物理的には努力は観察不能であって

も，実績情報から確実に管理者行動を推定できるであろう。したがって，この場合には，無条件に FBS が実現可能となり，動機づけの問題を論じる余地はなくなる。逆に言えば，不確実性が存在するために動機づけが必要となるのであり，動機づけ能力を高めるためには不確実性を減少しなければならないという関係が浮び上る。不確実性を緩らげるべく追加情報を求める意義はここにある。この点については後で詳細に検討する。

（注）

1） エイジェンシー・モデルによる不完全情報の分析については次の研究がある。Harris, M. and A. Raviv, "Optimal Incentive Contracts with Imperfect Information," *Journal of Economic Theory* (vol. 20, 1979), pp. 33-64. Shavell, S., "Risk-Sharing and Incentives in the Principal-Agent Relationship," *Bell Journal of Economics* (Spring 1979), pp. 55-73.

2） 固定給 $r^*$ が補償される場合の管理者の期待効用は，$U(r^*)\int f(x|a)dx-V(a)$ となる。これを $a$ で偏微分し，最適性条件を適用すると，$\int f_a(x|a)dx=0$ であるから，最適努力水準は，$V'(a)=0$ より，$a=0$ となる。この結果，管理者は，$2r^{*\frac{1}{2}}=15.0822$ という $\overline{U}$ を上まわる効用を得ることになる。しかし，このとき経営者に結果する期待利益は，$a=0$ であるため，$\theta-r^*$，すなわち，443.132 となり，なりゆき管理の期待利益 475 をも下回る。

3） J. Butterworth 教授は，筆者が参加した彼のセミナーにおいて，この点に関して次のようなコメントをしている。$U(\cdot)$ は凹関数であるから，$a$ に関する（3－5）の2階偏微分が負になる可能性は十分予想できるが，その凹性を打ち消すほどに，独立変数である関数 $r(\cdot)$ が凸性をもつ場合には，この予想は楽観にすぎなくなる。したがって，そうした可能性が排除されないかぎり，パラメータの与え方によっては，（3－7）を満足する $a^*$ が，意図に反し，効用最小解となる場合が起りうる。

4） cf. Holmstrom, B., *op. cit.*, 1979, p. 90.

5） この最適解に対して（3－5）の2階偏微分を求めると，$-2a^{*d-1}(1-d)-2$ となる。$d<1$ であるから，これは負の値になる。したがって，$a^*$ は最適性の必要十分条件を満足する。

6） $r^*(x)=\{A(x-\bar{x}^*)+\lambda\}^2$，ただし，$A=(kd)^{-1}a^{*2-d}$ であり，$f(x|a^*)$ は期待値 $\bar{x}^*$，標準偏差 $\sigma$ に従う正規密度関数であったから，$r^*(x)$ の期待値は，

$$\bar{r}^*=\int\{A(x-\bar{x}^*)+\lambda\}^2 f(x|a^*)dx=\lambda^2+A^2\sigma^2$$

となる。また，同様に，$r^*(x)$ の分散は，

$$\begin{aligned}\sigma^2(r^*(x)) &= \int(r^*(x)-\bar{r}^*)^2 f(x|a^*)dx \\ &= \int\{(A(x-\bar{x}^*)+\lambda)^2-(\lambda^2+A^2\sigma^2)\}^2 f(x|a^*)dx \\ &= 2A^2\sigma^2(A^2+2\lambda^2)\end{aligned}$$

となる。

7) $r^*(x)$ を $x$ で1階および2階微分すると，$x \geq 457.8$ であるかぎり，$r^*(x)$ は逓増的に増加することがわかる。第1表の効用関数の仮定よりすべての $x$ のもとで（5－2）は正値をとり，報酬が負の値になることが許されないから，ここでは，$x<457.8$ となる場合には，$r^*(x)$ はすべてその下限値 $\underline{r}(=0)$ をとるものと仮定される。ただし，本例の仮定のもとで，そのような状態が生じる確率，すなわち $F(x<457.8)$ は，わずか0.6%にすぎない。したがって，上記の解は，そのような $x$ が生じる可能性を無視して導出されている。

8) Holmstrom, B., *op, cit.*, p. 79.

9) （4－5）と（5－8）の $\lambda$ は，記号は同一であっても，その値は当然に異なることに注意されたい。

10) ただし，実際には，この解釈は正しくない。なぜならば，本来 $a$ は未知のパラメータではなく，ナッシュ制約式の充足によって，管理者が $a^*$ の努力を行使するであろうことを経営者は確信し，管理者自身も当該行動を選択するからである。

## VI　予算・実績に基く業績評価

周知のように，予算管理制度は，達成すべき業績目標を予算に数値化し，管理者にその達成責任を課し，実績との対比に基く業績評価を予定し，それらを通じて，望ましい管理者行動の実現を確保する制度である。一方，これまで述べてきたエイジェンシー・モデルが記述する決定過程も，経営者と管理者の利害を最適に調整する管理者行動と，これを動機づける業績評価ルールを決定するプロセスであった。このような理解が成りたつとするならば，（3－4)～(3－6）に示されたエイジェンシー・モデルは，具体的には，企業予算の決定過程を記述するものとみなせるので

はなかろうか。

しかし，すでに指摘したように，FBS の結論は，物量情報等を通じて行動それ自体を観察できる場合には，予算制度の如き間接的な管理手段は不要であることを明らかにした。それゆえに，予算制度がなんらかの関連をもつとするならば，管理者行動を観察できないために動機づけが必要となるセカンド・ベストの導出過程であろうと思われる。果たして，予算制度は SBS の実現にいかなるかかわりを有していると言いうるであろうか。

もう1度，第3表の最適業績評価ルール $r^*(x)$ に注目しよう。その第1項には $(x-\bar{x}^*)$ という項目がある。$\bar{x}^*=\theta+ka^{*d}$ はなにを意味するか。$\theta$ は努力が零のときの報酬支払前の期待利益，$ka^{*d}$ は努力 $a^*$ がもたらす期待利益の増加額であるから，$\bar{x}^*$ は，経営者が管理者に対して，所定の行動 $a^*$ を選択して達成することを要求する期待業績，すなわち予算を表わすと解しうるであろう。$x$ は実績であったから，結局，この報酬スケジュールは，予算と実績の差異に基いて業績評価がなされるべきことを要求しているのである。さらに，第3表の数値結果を分析すると，予算 $\bar{x}^*$ が丁度過不足なく達成されたときに管理者に $\overline{U}$ の効用が実現し，超過（不足）達成のときに，$\overline{U}$ を上回（下回）る効用が実現することが明らかになる。さらに，契約の締結時点において，業績評価ルール（報酬関数）$r^*(x)$ が経営者と管理者の間で合意をみる。このことは，予算 $\bar{x}^*$ の存在が事前に両者に確認されることを意味する。

予算と実績に基く業績評価が，以上の論述から明らかなように，効率解のセカンド・ベストをもたらすという意味において，われわれは予算制度が動機づけを必要とする組織条件に適合的な管理制度であると主張する論拠をみつけるのである。

さらに，$\bar{x}^*$ は正規分布の期待値であったから，実績が予算を上まわる確率は50%となる。つまり，最適努力水準 $a^*$ が行使されたときに予算が

達成される確率が丁度50%になる厳格度（tightness）が最適であるといいうるのである[1]。ただし，この結論は，努力がもたらす便益とプライベート・コスト（努力の負効用を償うための報酬費用）の間の最適トレード・オフから導かれたものであるから，この厳格度は，必ずしも，所与の条件下で管理者に期待しうる最大の努力水準を引き出すものではないことを指摘しておかなければならない[2]。

以上の説明によって，予算管理制度が SBS の具体的な実現手段に他ならないことを明らかにした。そこでは，予算と実績の差異の量的大きさが業績評価の対象となった。しかし，このような連続変数ではなく，予算が達成されたかどうかという 0－1 変数 (zero-one variable) に基く業績評価方式[3]が，その簡潔性のゆえに，よく論議されるのは周知のところである。この業績評価方式が意義をもつのは，特定の目標値が達成できたか否かに固有の意味があり，それをどれほど上回ったか，下回ったかには関心がない場合である。この場合の報酬は，予算が達成されたか否かという二種類の業績測定情報に応じて，高低いずれかの二者択一となる。その動機づけ能力はさきの SBS に比べて，どのように異なるであろうか。また，この場合の予算の厳格度はどの水準に定めるのが適切であろうか。

この点を検討するために，決定問題をつぎのように定式化しよう。

目的関数：$$\max_{B,R,P,a}\int xf(x|a)dx-P\cdot F(x<B)-R\cdot F(x\geq B) \qquad (6-1)$$

制約条件：$$U(P)F(x<B)+U(R)F(x\geq B)-V(a)\geq\overline{U} \qquad (6-2)$$

$$U(P)F_a(x<B)+U(R)F_a(x\geq B)-V'(a)=0 \qquad (6-3)$$

〔記号と仮定の説明〕

$B$：予算水準，$B\varepsilon[\underline{B},\ \overline{B}]$

$R(P)$：予算達成（不達成）のときに支払われる報酬，$R\varepsilon[\underline{R},\ \overline{R}]$，

$P\varepsilon[\underline{P},\ \overline{P}]$

$$F(x<B)=\int_{\{x<B\}} f(x|a)dx,\ \ F(x\geq B)=\int_{\{x\geq B\}} f(x|a)dx$$

$$F_a(x<B)=\int_{\{x<B\}} f_a(x|a)dx,\ \ F_a(x\geq B)=\int_{\{x\geq B\}} f_a(x|a)dx$$

ここでも，経営者はリスク中立と仮定されている。目的関数は期待利益が最大になるように，$B$, $R$, $P$ および $a$ を決定すべきことを示す。管理者の期待効用に関する２つの制約式の意味するところは，それぞれ，（３－５）および（３－７）と同一である。

この決定問題も，努力は観察不能という前提条件のもとでのみ意味のある結論を導く。かりに，観察可能性を前提にすると，前述と同様に，（６－３）の動機づけ制約の充足は不要となるから，（６－１）と（６－２）のみから定義される問題を解くことになる。その場合には，

$$\lambda=1/U'(R)=1/U'(P)$$

となり，$R^*=P^*$, すなわち（４－５）と同一の結論となり，結局，FBS に一致する解が得られる（$r^*=R^*=P^*$)。

さて本論に戻って，上記の決定問題を解こう。あらためて，ラグランジュ関数を次のように定義しよう。

$$\begin{aligned}L=&\int xf(x|a)dx-P\cdot F(x<B)-R\cdot F(x\geq B)+\lambda\{U(P)F(x<B)\\&+U(R)F(x\geq B)-V(a)-\overline{U}\}+\mu\{U(P)F_a(x<B)\\&+U(R)F_a(x\geq B)-V'(a)\}\end{aligned}\qquad (6-4)$$

これを，それぞれ，$R$, $P$, $a$ および $B$ に関して偏微分して，最適性の必要条件を適用すると，次の関係が導かれる[4]。

$$1/U'(P)=\lambda+\mu\frac{F_a(x<B)}{F(x<B)}\qquad \forall x<B \quad (6-5)$$

$$1/U'(R)=\lambda+\mu\frac{F_a(x\geq B)}{F(x\geq B)}\qquad \forall x\geq B \quad (6-6)$$

$$\partial L/\partial a=\int xf_a(x|a)dx-P\cdot F_a(x<B)-R\cdot F_a(x\geq B)$$
$$+\mu[U(P)F_{aa}(x<B)+U(R)F_{aa}(x\geq B)-V''(a)]$$
$$=0 \qquad (6-7)$$

$$\partial L/\partial B=\{R-P+\lambda(U(P)-U(R))\}f(B|a)$$
$$+\mu(U(P)-U(R))f_a(B|a)$$
$$=0 \qquad (6-8)$$

ここで，$F_{aa}(x<B)=\int_{\{x<B\}}f_{aa}(x|a)dx$，$F_{aa}(x\geq B)=\int_{\{x\geq B\}}f_{aa}(x|a)dx$ である。

第1表の数値例に以上の結果を適用しよう。まず最初に，（6－8）の予算水準の最適性条件を求める。本例の効用関数を（6－5）と（6－6）に適用し，それらの右辺第2項を展開すると，次式を得る[5)]。

$$P=(\lambda-\mu h(s)/F(s))^2,\ U(P)=2(\lambda-\mu h(s)/F(s))$$
$$R=(\lambda+\mu h(s)/(1-F(s)))^2,\ U(R)=2(\lambda+\mu h(s)/(1-F(s))) \qquad (6-9)$$

ここで，各記号は次のように定義される。

$$s=(B-\bar{x})/\sigma,\ \bar{x}=\theta+ka^d,\ F(s)=\int_{-\infty}^{s}N(z)dz,\ z=(x-\bar{x})/\sigma,$$

$$N(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp-(z^2/2),\ h(s)=\frac{kd}{\sigma\sqrt{2\pi}}a^{d-1}exp-(s^2/2)$$

（6－9）を（6－8）に代入して整理すると次式を得る。

$$\partial L/\partial B=A\left(\frac{F(s)-0.5}{F(s)(1-F(s))}exp-(s^2/2)-s\sqrt{2\pi}\right)=0 \qquad (6-10)$$

ただし，

$$A=2\mu^2kda^{d-1}h(s)f(B|a)/\sigma\sqrt{2\pi}F(s)(1-F(s))$$

$\mu>0$，および他の記号も零の値をとらないから，$A\neq0$ となる。したがっ

て，（６—10）を成立させるには，$s^*=0$，すなわち $F(s^*)=0.5$ という最適性条件を得る[6)]。これより，最適予算水準 $B^*$ は，

$$B^*=\theta+ka^{*d} \tag{6—11}$$

となる。つまり，ここでも，所定の努力を行使すれば，達成確率が丁度50%になる水準に予算を設定するのが最適であるという結論が得られる。

$\mu$ と $\lambda$ についても，前節で述べたのと全く同一の解法手順に従って，次の定式が導かれる[7)]。

$$\mu=2\pi\sigma^2(kd)^{-2}a^{3-2d}F(s)(1-F(s))\ exp\ s^2$$

$$\lambda=0.5kda^{d-2}+\sigma\sqrt{2\pi}(kd)^{-1}a^{2-d}(0.5-F(s))\ exp\ s^2/2$$
$$+(kds-(2-d)\sigma a^{-d})2\pi\sigma(kd)^{-2}a^{2-d}F(s)(1-F(s))\ exp\ s^2$$

上式に，さきに得た $s^*=0$ を適用すれば，その最終結果が得られる。$P$ と $R$ は，（６—９）にこの $\lambda$ と $\mu$ を代入すれば，$a$ のみを未知数とする定式となる。その結果を（６—２）に代入し，等式を成立させる $a$ の値を求めれば，最適値 $a^*$ が得られる。

**第４表　０—１変数に基く業績評価のパフォマンス**

| |
|---|
| $a^*=1.75031$ |
| $P^*=(\lambda-\sigma\sqrt{2\pi}\ a^{*2-d}/2kd)^2=12.0055$ |
| $R^*=(\lambda+\sigma\sqrt{2\pi}\ a^{*2-d}/2kd)^2=92.1373$ |
| $B^*=(\theta+ka^{*d})=578.246$ |
| $\bar{x}^*=B^*$ |
| $\lambda^*=0.5kda^{d-2}-0.25(\sigma\sqrt{2\pi}/kd)^2(2-d)a^{2-2d}$ |
| $=6.53186$ |
| $\mu^*=0.25(\sigma\sqrt{2\pi}/kd)^2\ a^{3-2d}$ |
| $=5.37404$ |
| $\bar{r}=0.5(P^*+R^*)=52.0714$ |
| $\sigma(P,\ R)=40.06588$ |
| $O^*=526.1746$ |
| $W^*=536.1746$ |

以上の結果が第4表に要約されている[8]。ここで，$\bar{r}$ は報酬の期待値，$\sigma(P, R)$ はその標準偏差を示す。

第4表の結果を，第3表の SBS と比較しながら，検討しよう。

(a) 目的関数値（期待利益）は，僅かながら，SBS のそれよりも減少した。その直接的原因は努力の減少に求められるが，その背後には，次のような理由が存在する。すなわち，2つの報酬スケジュールのリスクを比較すると，$\sigma(r^*(x)) < \sigma(P, R)$ という関係にある。つまり，連続的報酬体系よりも二者択一的報酬体系の方がリスクが高いために，報酬の期待効用が低下し，努力が減少したのである。

(b) 2つの報酬スケジュールのリスクにこのような差が生じたのは，業績測定情報が，$x$ と1対1に対応する連続変数から，0－1変数というより粗なる分割（partition）に aggregate されたからである。それによる情報ロスは目的関数値の減少額で測定されるであろう。

(c) 前節で検討したように，実績情報のリスク $\sigma$ は動機づけ能力に重要な影響を与える。$\sigma$ の減少は，より大なる努力水準をもたらすが，それを可能にするには，報酬 $P$ の引き上げが必要となる。しかし，そこに1つの問題が生じる。$P$ の内点解が，本例の場合，$25(=(\overline{U}/2)^2)$ を超えると，もちろん，$R>P$ であるから，最適努力水準 $a^*$ を行使するときには，$\overline{U}$ の効用しか得られないのに対し，$a=0$ とすれば，$\overline{U}$ を超える効用が獲得できることになる。かくして，再び moral hazard を引き起す余地が生まれる。したがって，その場合には，予算水準の最適化を断念するか，それとも，$P=\overline{P}=25$ の上限値を設けることが必要となる[9]。

(d) 本例において，予算の厳格度は50%の達成確率に定めるのが最適であることが示された。かりに，$s \neq 0$ の値を適用すると解はどのように変化するであろうか。第5表は $s$ を0.2と $-0.2$ としたときの結果を示している。ケース1は厳格度を高くした場合の結果である。予算目標が厳しくな

るにつれて，努力は増加するが，より大なる報酬支払が必要となるために，期待利益が最適解のそれよりも減少している。逆に，ケース２では，予算が緩い目標値になって，報酬支払は減少するが，それに応じて誘因提供が小さくなる結果，努力が低下し，期待利益が減少している。

**第５表　予算厳格度とパフォマンス**

| ケース１ | ケース２ |
|---|---|
| $s=0.2$ | $s=-0.2$ |
| $1-F(s)=0.4207$ | $1-F(s)=0.5793$ |
| $a^*=1.77499$ | $a^*=1.71636$ |
| $P^*=15.19473$ | $P^*=8.59647$ |
| $R^*=105.30671$ | $R^*=81.7969$ |
| $B^*=589.1274$ | $B^*=567.0294$ |
| $\bar{x}^*=579.1274$ | $\bar{x}^*=577.0294$ |
| $\bar{r}^*=53.1048$ | $\bar{r}^*=51.0015$ |
| $O^*=526.0225$ | $O^*=526.0279$ |
| $W^*=536.0225$ | $W^*=536.0279$ |

$1-F(s)$ は，予算の達成確率を示す。

かくして，予算をどの水準に設定するかという厳格度の相違が動機づけに有意な影響をもたらすことが確認された。そして，本例においては，50％水準が最適であるとする結論が得られた。たしかに，予算がこの水準に設定せられるかぎり，予算と実績の差異の事前の期待値は零となる。計画・調整といった動機づけ以外の役割期待から判断しても，予算にかかる特性を与える50％基準は説得力のある決定ルールであるといいうるであろう。

しかし，この結論は予算責任者がリスク回避的であるとするわれわれの仮定から導かれていることに注意しなければならない。かりにリスク中立の仮定にあらためると，この結論はどのように変化するであろうか。その例証のために，最初に次の報酬体系を考えよう[10]。

$$r(x)=\begin{cases} rx & x\geq B \text{ のとき} \\ rx-K & x<B \text{ のとき} \end{cases} \quad (6-12)$$

ここで，$r$ と$K$は，いずれも正の値の定数である。つまり，予算$B$が達成されたときには線型利益配分（linear profit sharing）を予定し，不達成のときには，それに加え$K$というペナルティが課される。

この報酬体系のもとでの管理者の期待効用 $EU$ は，リスク中立であるから，

$$EU=\int rxf(x|a)dx-K\int_{-\infty}^{B}f(x|a)dx-V(a) \quad (6-13)$$

と表わされる。したがって，動機づけ制約に従って，管理者にとっての最適努力水準 $a^*$ は次式を満足する値となる[11]。

$$\begin{aligned}\partial EU/\partial a&=r\int xf_a(x|a^*)\,dx-K\int_{-\infty}^{B}f_a(x|a^*)dx-V'(a)\\&=kda^{*d-1}\left(r+\frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,exp-(s^2/2)\right)-2a^*\\&=0\end{aligned} \quad (6-14)$$

ところで，努力が観察可能であり，双方がともにリスク中立と仮定した第Ⅳ節〔ケースⅡ〕で論じたように，その場合の最適努力水準は，次式，すなわち，努力の期待限界生産力とその限界負効用が等しくなる水準に定められた。

$$\int xf_a(x|a^*)dx=V'(a^*) \quad (6-15)$$

（6－15）から導かれる $a^*$ は FBS であったことに注意しよう。それゆえに，これと（6－14）を比較すると，

$$r+\frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,exp-(s^2/2)=1 \quad (6-16)$$

という関係が維持されれば，（6－14）を満足する $a^*$ が FBS のそれに一致することがわかる。ここで，（6－16）には，$r$, $K$, $s$ という3つの未

知数が含まれているから，一意解を導くには，条件式がもう1つ必要となる。管理者には $\overline{U}$ の効用を補償しなければならなかったから，（6—13）より，次式が得られる。

$$r\bar{x}^* - KF(s) - a^{*2} = \overline{U} \qquad (6-17)$$

かくして，予算の達成確率（$1-F(s)$）を指定してやれば，（6—16）と（6—17）を同時に満足する $r^*$ と $K^*$ の一意的な値が求まる。その結果は目的関数である次式の期待利益に反映される。

$$O^* = \int (x - r^*) f(x|a^*) dx + K^* F(s) \qquad (6-18)$$

ここで，第2項は予算不達成のときに管理者から徴収されるペナルティの期待値を示す。

第6表は，以上の解析に従って予算の厳格度がいかなる影響を与えるかを分析した結果を要約している。これをみると，いずれの厳格度であっても，管理者に $\overline{U}$ の効用を補償しながら，FBS に一致する期待利益が実現することがわかる[12)]。要するに，リスク回避を前提とした第5表の結果とは異なり，この場合には，予算厳格度は期待利益に対しニュートラルな影

**第6表　予算厳格度とパフォマンス（リスク中立の場合）**

——ペナルティを含む報酬体系の場合——

| | ケース1 | ケース2 | ケース3 | ケース4 | ケース5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | −1 | −0.5 | 0 | 0.5 | 1 |
| $F(s)$ | 0.1587 | 0.3085 | 0.5 | 0.6915 | 0.8413 |
| $B$ | 768.4 | 818.4 | 868.4 | 918.4 | 968.4 |
| $r^*$ | 0.21099 | 0.22054 | 0.23632 | 0.26439 | 0.31778 |
| $K^*$ | 163.04 | 110.70 | 95.71 | 104.47 | 140.97 |
| $\bar{r}(x)$ | 157.36 | 157.36 | 157.36 | 157.36 | 157.36 |
| $\bar{x}^*$ | 868.40 | 868.40 | 868.40 | 868.40 | 868.40 |
| $O^*$ | 711.04 | 711.04 | 711.04 | 711.04 | 711.04 |

$\bar{r}(x)$ は，報酬 $r(x)$ の期待値を表わす。

響しか与えないのである。予算水準の相違は $r^*$ と $K^*$ の相殺的変動に吸収されるからである[13)]。

（6—12）の報酬体系は，（6—14）のナッシュ均衡条件を満足するから，努力が観察できない条件下に適用可能であり，しかも FBS をもたらす。しかしながら，その実施可能性という点になると重大な弱点のあることが指摘されなければならない。なぜならば，この報酬体系は，ペナルティを支払う財源（endowment）を管理者が有していることを前提としているからである。現実的には，多くの場合そのような金銭的支出を期待するのは不可能であろう。たしかに，$s$ の値を限りなく小さくしていけば，ペナルティの期待値 $K^*F(s)$ を trivial な水準にまで引き下げることはできる。しかし，そうすればするほど，$K^*$ の絶対額が増加する結果，支払能力の制約が重大化するのである。

そこで，別の方法を考えることにする。経営者側にはそうした支払能力上の制約がないと仮定すれば，予算不達成に対してペナルティの徴収を予定する（6—12）の方式にかえ，予算達成に対してボーナスを支払う次の報酬体系を考えることができる。

$$r=\begin{cases} R & x \geq B \text{ のとき} \\ P & x < B \text{ のとき} \end{cases} \qquad (6\text{—}19)$$

この報酬スケジュールについては，リスク回避の仮定のもとで，すでに（6—1）～（6—3）のモデルで詳細な検討を加えた。ここでは，これをリスク中立の仮定のもとで分析するわけである。その場合，予算$B$はいかなる影響要因として働くであろうか。

その場合の管理者の期待効用は次式に表わされる。

$$EU=P\int^{B} f(x|a)dx+R\int_{B} f(x|a)\,dx-V(a) \qquad (6\text{—}20)$$

したがって，最適努力水準 $a^*$ は，われわれの例においては，

$$\partial EU/\partial a = P\int^{B} f_a(x|a^*)\,dx + R\int_{B} f_a(x|a^*)\,dx - V'(a^*)$$
$$= \frac{kd}{\sigma\sqrt{2\pi}} a^{*d-1} exp - (s^2/2)(R-P) - 2a^*$$
$$= 0 \qquad (6-21)$$

を満足する値となる。さらに，（6－17）と同様に，$R$と$P$は次式を満足しなければならない。

$$PF(s) + R(1-F(s)) - a^{*2} = \overline{U} \qquad (6-22)$$

また，この場合の目的関数は（6－1）に表示される。

第7表は，この報酬体系の分析結果を示している。この体系によってもFBS が導かれており，また，予算厳格度は，$R$と$P$の動きに吸収されて，中立的な影響しか与えないことがわかる。

**第7表　予算厳格度とパフォマンス（リスク中立の場合）**

——ボーナスを含む報酬体系の場合——

| | ケース1 | ケース2 | ケース3 | ケース4 | ケース5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | −0.2 | 0 | 0.2 | 0.5 | 1 |
| $1-F(s)$ | 0.5793 | 0.5 | 0.4793 | 0.3085 | 0.1587 |
| $B$ | 858.4 | 868.4 | 878.4 | 918.4 | 968.4 |
| $R^*$ | 211.15 | 220.03 | 223.94 | 255.57 | 331.20 |
| $P^*$ | 83.29 | 94.69 | 96.08 | 113.55 | 124.57 |
| $\bar{r}$ | 157.36 | 157.36 | 157.36 | 157.36 | 157.36 |
| $\bar{x}^*$ | 868.40 | 868.40 | 868.40 | 868.40 | 868.40 |
| $O^*$ | 711.04 | 711.04 | 711.04 | 711.04 | 711.04 |

以上の検討から，われわれは次の結論を引き出すであろう。予算管理者がリスク中立的であり，予算が報酬制度ないし業績評価制度と連動して設定されるかぎり，厳格度それ自体は動機づけに固有の役割を演じない。努力水準は，予算とはかかわりなく，努力の限界生産力とその限界負効用が一致する水準に定められる[14)]。したがって，この場合には，予算からの介

入はむしろ排除されるべきであるという結論になる。かくして予算が動機づけに有意な影響力をもつのは，予算責任者がリスク回避的である場合に限定されるといいうるのである。ただし，以上の結論は，努力を除く他のすべての事項に関して，経営者と管理者の間に情報ギャップが存在していないことを前提とする[15]。

## 〔付録〕 ガンマ関数と不完全ガンマ関数

ガンマ関数 $\Gamma(r)$ は次のように定義される。

$$\Gamma(r)=\int_0^{\infty} t^{r-1}e^{-t}dt \qquad (\text{A}-1)$$

ただし，$r>0$ である。ここで，$u=t^{\frac{1}{2}}$，したがって，$2\mu du=dt$ とおいて変数変換すると，次式になる。

$$\Gamma(r)=\int_0^{\infty} t^{r-1}e^{-t}dt=2\int_0^{\infty} u^{2r-1}e^{-u^2}du$$

上式を，再度，$z=\sqrt{2}\,u$ とおいて変数変換すると，次式が得られる。

$$\Gamma(r)=2^{1-r}\int_0^{\infty} z^{2r-1}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

したがって，次の関係が導かれる。

$$\int_0^{\infty} z^{2r-1}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2^{r-1}\Gamma(r) \qquad (\text{A}-2)$$

ところで，基準正規分布に従う確率変数を $z$，その密度関数を $N(z)$ とすると，

$$N(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

であるから，（A－2）より，

$$\int_0^{\infty} N(z)\,dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(0.5)$$

となる。ここでは証明は省略するが，$\Gamma(0.5)=\sqrt{\pi}$ となるから[16]，上式は，周知のように，1/2 になる。

さらに，（A－2）を用いると，たとえば，次のような重要な展開が得られる。

$$\int_0^\infty zN(z)dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(1)=1/\sqrt{2\pi} \tag{A－3}$$

$$\int_0^\infty z^2N(z)dz=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(1.5)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(0.5)=1/2 \tag{A－4}$$

$$\int_{-\infty}^0 zN(z)dz=-\int_0^\infty zN(z)\ dz=-1/\sqrt{2\pi} \tag{A－5}$$

$$\int_{-\infty}^0 z^2N(z)dz=\int_0^\infty z^2N(z)dz=1/2 \tag{A－6}$$

以上より，$z$ の期待値と標準偏差が，それぞれ，0 と 1 になることが確認される。なお，上式の導出過程において，

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^\infty=1$$

$$\begin{aligned}\Gamma(r)&=\int_0^\infty t^{r-1}e^{-t}dt=-e^{-t}t^{r-1}\Big|_0^\infty+(r-1)\int_0^\infty t^{r-2}e^{-t}dt\\&=(r-1)\Gamma(r-1)\qquad\qquad for\ r\geq 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(1+r)&=\int_0^\infty t^re^{-t}dt=-e^{-t}t^r\Big|_0^\infty+r\int_0^\infty t^{r-1}e^{-t}dt\\&=r\Gamma(r)\qquad\qquad for\ 0<r<1\end{aligned}$$

が用いられている。なお，L'Hospitall のルールによって，$r\geq 1$ であれば，$\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^{r-1}=\lim_{t\to 0} e^{-t}t^{r-1}=0$，$0<r<1$ であれば，$\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^r=\lim_{t\to 0} e^{-t}t^r=0$ となる[17]。

つぎに，不完全ガンマ関数 (incomplete gamma function) $\Gamma(r,\ \hat{z})$ を次のように定義しよう。

$$\Gamma(r,\ \hat{z})=\int_0^{\hat{z}} t^{r-1}e^{-t}dt \tag{A－7}$$

ただし，$r>0$, $\hat{z}>0$ である。$r\geq 1$ であれば，次のように展開される。

$$\begin{aligned}\Gamma(r,\ \hat{z})&=\int_0^{\hat{z}} t^{r-1}e^{-t}dt=-e^{-t}t^{r-1}\Big|_0^{\hat{z}}+(r-1)\int_0^{\hat{z}} t^{r-2}e^{-t}dt\\&=-e^{-\hat{z}}\hat{z}^{r-1}+(r-1)\ \Gamma(r-1,\ \hat{z})\end{aligned} \tag{A－8}$$

また，$0<r<1$ であれば，

$$\begin{aligned}\Gamma(1+r,\ \hat{z})&=\int_0^{\hat{z}} t^{r} e^{-t}dt=-e^{-t}t^{r}\Big|_0^{\hat{z}}+r\int_0^{\hat{z}} t^{r-1}e^{-t}dt\\&=-e^{-\hat{z}}\hat{z}^{r}+r\Gamma(r,\ \hat{z})\end{aligned} \tag{A－9}$$

と展開される。したがって，たとえば，

$$\Gamma(1,\ \hat{z})=\int_0^{\hat{z}} e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{\hat{z}}=1-e^{-\hat{z}} \tag{A－10}$$

$$\Gamma(2,\ \hat{z})=-e^{-\hat{z}}\hat{z}+\Gamma(1,\hat{z})=1-e^{-\hat{z}}-e^{-\hat{z}}\hat{z} \tag{A－11}$$

となる。

つぎの不完全ガンマ関数を考えよう。

$$\Gamma(r,\ \hat{z}^2/2)=\int_0^{\hat{z}^2/2} t^{r-1}e^{-t}dt$$

これを，$\mu=t^{\frac{1}{2}}$ とおいて変数変換すると，

$$\Gamma(r,\ \hat{z}^2/2)=2\int_0^{\hat{z}/\sqrt{2}} u^{2r-1}\, e^{-u^2}du$$

となる。これを，さらに，$z=\sqrt{2}u$ とおいて変数変換すると，

$$\Gamma(r,\ \hat{z}^2/2)=2^{1-r}\int_0^{\hat{z}} z^{2r-1}\, e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

となるから，次式が導かれる。

$$\int_0^{\hat{z}} z^{2r-1}\, e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2^{r-1}\Gamma(r,\ \hat{z}^2/2) \tag{A－12}$$

これより，次の展開が得られる。

$$F(\hat{z})=\int_{-\infty}^{\hat{z}}N(z)\,dz=\int_{-\infty}^{0}N(z)dz+\int_{0}^{\hat{z}}N(z)dz$$
$$=0.5+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\hat{z}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0.5+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(0.5,\ \hat{z}^2/2)$$

したがって，次式が得られる。

$$\Gamma(0.5,\ \hat{z}^2/2)=2\sqrt{\pi}(F(\hat{z})-0.5) \qquad \text{(A—13)}$$

また，(A—12) および (A—10) より，

$$\int_{0}^{\hat{z}}zN(z)\,dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(1,\ \hat{z}^2/2)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-e^{-\frac{\hat{z}^2}{2}}) \qquad \text{(A—14)}$$

を得る。したがって，

$$\int_{\hat{z}}^{\infty}zN(z)\,dz=\int_{0}^{\infty}zN(z)\,dz-\int_{0}^{\hat{z}}zN(z)\,dz$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\hat{z}^2}{2}} \qquad \text{(A—15)}$$

$$\int_{-\hat{z}}^{0}zN(z)\,dz=-\int_{0}^{\hat{z}}zN(z)\,dz=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-e^{-\frac{\hat{z}^2}{2}}) \qquad \text{(A—16)}$$

$$\int_{-\infty}^{-\hat{z}}zN(z)\,dz=\int_{-\infty}^{0}zN(z)\,dz-\int_{-\hat{z}}^{0}zN(z)\,dz$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\hat{z}^2}{2}} \qquad \text{(A—17)}$$

という展開を得る。

また，(A—9) より次式が得られる。

$$\Gamma(1.5,\ \hat{z}^2/2)=-e^{-\hat{z}^2/2}\left(\frac{\hat{z}^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{\pi}(F(\hat{z})-0.5) \qquad \text{(A—18)}$$

さらには，（A—11)～(A—14）を用いて，

$$\int_0^{\hat{z}} z^2N(z)dz=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(1.5,\ \hat{z}^2/2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}\,(F(\hat{z})-0.5)-e^{-\frac{\hat{z}^2}{2}}\left(\frac{\hat{z}^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=F(\hat{z})-0.5-\frac{\hat{z}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\hat{z}^2}{2}} \qquad \text{(A—19)}$$

$$\int_{\hat{z}}^{\infty} z^2N(z)\,dz=\int_0^{\infty} z^2N(z)\,dz-\int_0^{\hat{z}} z^2N(z)dz$$

$$=1-F(\hat{z})+\frac{\hat{z}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\hat{z}^2}{2}} \qquad \text{(A—20)}$$

$$\int_{-\hat{z}}^{0} z^2N(z)dz=-F(\hat{z})+0.5+\frac{\hat{z}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\hat{z}^2}{2}} \qquad \text{(A—21)}$$

$$\int_{-\infty}^{-\hat{z}} z^2N(z)\,dz=F(\hat{z})-\frac{\hat{z}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\hat{z}^2}{2}} \qquad \text{(A—22)}$$

という展開が得られる。

（注）

1）cf. Ijiri, Y, Kinard, J. C. and F. B. Futney, "An Integrated Evaluation System for Budget Forecasting and Operating Performance with a Classifiied Budgeting Bibliography," *Journal of Accounting Research* (Spring 1968), pp. 1-11. Itami, H., *op, cit.*, p. 83.

2）行動科学的側面からのこれまでの予算研究では，いかなる予算水準が最大可能な努力を引き出すかが論議の対象になったように思われる。

3）この予算契約は bang-bang contract とも呼ばれる。cf. Demski, J. S. and G. A. Feltham, *op. cit.*, 1978, p. 348.

4）$P$ と $R$ は，それぞれ，$[\underline{P},\ \overline{P}]$ および $[\underline{R},\ \overline{R}]$ の内点にあると仮定する。（6—5）と（6—6）の左辺が右辺より大きい場合は，それぞれ，$P=\underline{P}$, $R=\underline{R}$ となり，逆の場合は，$P=\overline{P}$, $R=\overline{R}$ となる。

5）$f(x|a)$ は正規分布する密度関数であるから，

$$\int_{-\infty}^{B} xf(x|a)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{B} x\ exp-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2dx$$

$$=\bar{x}\int_{-\infty}^{S} N(z)\,dz+\sigma\int_{-\infty}^{S} zN(z)dz$$

となる。第1項は明らかに $\bar{x}F(s)$ に等しい。

ところで，不完全ガンマ関数を分析すると，

$$\int_{-\infty}^{S} zN(z)dz=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}exp-(s^2/2) \qquad (6—A)$$

$$\int_{S}^{\infty} zN(z)dz=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}exp-(s^2/2) \qquad (6—B)$$

を得る（付録を参照のこと)。したがって，(6—A) より

$$\int_{-\infty}^{B} xf(x|a)dx=\bar{x}F(s)-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}exp-(s^2/2)$$

また，同様に，

$$\int_{B}^{\infty} xf(x|a)\,dx=\bar{x}(1-F(s))+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}exp-(s^2/2)$$

となる。かくして

$$\int_{-\infty}^{B} f_a(x|a)dx=kd\sigma^{-2}a^{d-1}\left(\int_{-\infty}^{B} xf(x|a)dx-\bar{x}\int_{-\infty}^{B} f(x|a)dx\right)$$

$$=-\frac{kd}{\sigma\sqrt{2\pi}}a^{d-1}exp-(s^2/2)$$

となる。また同様に，

$$\int_{B}^{\infty} f_a(x|a)dx=\frac{kd}{\sigma\sqrt{2\pi}}a^{d-1}exp-(s^2/2)$$

を得る。

6) 最適性の十分条件を求めると，

$$\partial L^2/\partial^2 B=-2\mu^2\frac{kda^{d-1}h(s)}{\sigma^2F(s)(1-F(s))}\leq 0$$

となるから，$s^*=0$ は最適性の必要十分条件を満足する。

7) $\lambda$ の導出にあたっては，$F_{aa}(x<B)$ と $F_{aa}(x\geq B)$ の展開が必要となる。ここで，

$$f_{aa}(x|a)=kd\sigma^{-2}a^{d-1}(kd\sigma^{-2}a^{d-1}(x-\bar{x})^2-(1-d)a^{-1}(x-\bar{x})-kda^{d-1})f(x|a)$$

である。一方，不完全ガンマ関数の分析から，

$$\int_{-\infty}^{S} z^2N(z)dz=F(s)-\frac{s}{\sqrt{2\pi}}exp-(s^2/2) \tag{6—C}$$

$$\int_{S}^{\infty} z^2N(z)dz=(1-F(s))+\frac{s}{\sqrt{2\pi}}exp-(s^2/2) \tag{6—D}$$

が導かれる（付録，（A—20）（A—22）を参照)。したがって，

$$\int_{-\infty}^{B} f_{aa}(x|a)dx=\frac{kda^{d-1}}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}exp(-s^2/2)[\sigma a^{-1}(1-d)-kda^{d-1}s]$$

$$\int_{B}^{\infty} f_{aa}(x|a)dx=\frac{kda^{d-1}}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}exp(-s^2/2)[\sigma a^{-1}(d-1)+kda^{d-1}s]$$

を得る。

8）この最適解のもとで（6－2）の $a$ に関する2階偏微分を求めると，その値は $2(d-2)$ となる。$d<1$ であるから，明らかに，これは負の値になる。したがって，この $a^*$ は最適性の必要十分条件を満足する。

9）本例においては，$\sigma\leq28.43$ になると，$P$ の内点解が25を超える結果，このような問題が生じる。

10）この報酬体系については，Holmstrom, B., "Moral hazard in teams," *Bell Journal of Economics* (Autumn 1982), p. 329 に従った。

11）（6—14）の導出には（6—B）が用いられる。

12）この場合の FBS は，リスク中立を仮定しているから，第2表ではなく，第Ⅳ節の〔ケースⅡ〕の解をさす。

13）（6—16）は予算の厳格度 $s$ が $r^*$ と $K^*$ の変動に吸収されることを示す。

14）本例では，$a^*=(0.5kd)^{1/(2-d)}$ に定められる。（6—16）を満足する（6—14)，および（6—21）を満足する（6－1）の $a$ に関する最適性の必要条件は，すべてこれを満足する。

15）情報ギャップがある場合については，拙稿「情報非対称下の予算参加の有用性」『会計』1983年8月号，9月号を参照されたい。

16）たとえば，Olkin, I, Gleser, L. J. and C. Derman, *Probability Models and Applications*, Macmillan Publishing Co., Ins., 1980. p. 522 を参照されたい。

17）*Ibid.*, pp. 519～521.

## Ⅶ 実績情報の分解

これまでの分析から，実績情報は，効率解のセカンド・ベストを導くと

いう意味において，有意な情報価値をもつことを明らかにした。この情報が，不完全ではあるが，管理者行動に関するなんらかの推定を可能にするからである。だとすれば，実績データを細分化すれば，推定の精度が高められ，報酬のリスクの引き下げを通じて，動機づけ能力を向上できるのではないかという推論がなりたつ。管理会計が業績評価のために展開してきた様々の計算手法は，いずれも実績データの細分化，精緻化をめざすものであったと解しうる。損益計算ルールにもとづく収益と費用への利益の分解，管理可能性基準にもとづくセグメント別分解や差異分解などがそれである。このような管理会計情報は果たして，そこで意図されたような情報価値を有するであろうか。本節では，この点を，管理者行動の推定能力という観点から分析する。

分析事例として，ここでは，実績 $x$ を収益 $x_1$ と費用 $x_2$ ——すなわち $x=x_1-x_2$—— に分解する意義を問うことにする[1]。第1表の数値例との比較可能性を保つために，$x_1$ と $x_2$ は次の2変量正規分布に従う確率変数と仮定する[2]。

$$f(x_1,x_2|a)=(2\pi\sigma_1\sigma_2)^{-1}exp-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1-\bar{x}_1)^2}{{\sigma_1}^2}+\frac{(x_2-\bar{x}_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right] \quad (7-1)$$

ただし，

$\bar{x}_1=\theta_1+\alpha ka^d$

$\bar{x}_2=\theta_2-(1-\alpha)ka^d$

$\sigma_i$：$x_i$ の標準偏差（$i=1,\ 2$）

$\theta_i$：$a=0$ のときの $x_i$ の期待値

$\alpha$：努力がもたらす効果の配分係数

$\bar{x}_i$ の定義が示すように，努力の増加は $\bar{x}_1$ の増加と $\bar{x}_2$ の削減をもたらす。そのような $a$ の効果は，$\alpha$ と $1-\alpha$ の比率に応じて配分される。つまり，努力それ自体が $\alpha^{1/d}$ と $(1-\alpha)^{1/d}$ の比率に従って，2つの実績の

改善に配分されることを意味する[3)]。以上の仮定によって，報酬支払前の利益 $x$ は，期待値 $(\theta_1-\theta_2+ka^d)$，分散 $(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ の正規分布 $\Phi(x|a)$,

$$\Phi(x|a)=\iint_{\{x=x_1-x_2\}} f(x_1,\ x_2|a)dx_1dx_2 \qquad (7-2)$$

に従う[4)]。

かくして，管理者には2種類の業績尺度が用意される。したがって，業績評価にあたっても，単一変数 $x$ ではなく，$x_1$ と $x_2$ の2つの尺度を評価対象に組み入れることができるから，報酬スケジュールは，$r(x_1,\ x_2)$ という2変量関数として定義可能となる。

この条件のもとでの決定問題は次のように定式化される。

$$\text{目的関数：} \max_{r(\cdot,\cdot),\,a} \iint G(x_1-x_2-r(x_1,\ x_2))f(x_1,\ x_2|a)dx_1dx_2 \qquad (7-3)$$

$$\text{制約条件：} \iint U(r(x_1,\ x_2))f(x_1,\ x_2|a)dx_1dx_2-V(a)\geq\overline{U} \qquad (7-4)$$

$$\iint U(r(x_1,\ x_2))f_a(x_1,\ x_2|a)dx_1dx_2-V'(a)=0 \qquad (7-5)$$

これに対する $r(x_1,\ x_2)$ の最適性条件を求めると，（5－2）に対応する関係式は次式になる。

$$G'(x-r^*(x_1,\ x_2))/U'(r^*(x_1,\ x_2))=\lambda+\mu\frac{f_a(x_1,\ x_2|a)}{f(x_1,\ x_2|a)} \qquad (7-6)$$

第1表の数値例にこれを適用し，前述と同様の解法を用いると，次の結果を得る。

$$\mu=D(kd)^{-2}a^{3-2d}$$

$$\lambda=0.5kda^{d-2}-D(kd)^{-1}(2-d)a^{2-2d}$$

$$r^*(x_1,\ x_2)=\left[\lambda+(kd)^{-1}Da^{2-d}\left\{\frac{\alpha}{\sigma_1^2}(x_1-\bar{x}_1^*)-\frac{1-\alpha}{\sigma_2^2}(x_2-\bar{x}_2^*)\right\}\right]^2$$

$$(7-7)$$

ただし，

$$D=(\sigma_1\sigma_2)^2/(\alpha^2\sigma_2^2+(1-\alpha)^2\sigma_1^2) \qquad (7-8)$$

である。最適努力水準 $a^*$ は，上式の $r^*(x_1, x_2)$ を（7－4）に代入し，等式を満足する値として求められる。

さて，（7－7）の報酬関数の $\bar{x}_1{}^*$ と $\bar{x}_2{}^*$ は，$a^*$ の努力が行使されるときの $x_1$ と $x_2$ の期待値を示すから，それぞれ，収益予算，費用予算を表わすものと解しうる。つまり，この報酬スケジュールは，各予算項目ごとに予算と実績を比較し，その差異に応じて業績評価がなされるべきことを要求するのである。

さて，実績情報の分解にもとづくこの報酬体系はいかなるパフォマンスをもたらすであろうか。さきの SBS と比較しよう。ただし，比較可能性を維持するには，$\Phi(x|a)$ をつねに $f(x|a)$ に一致させなければならない。以下に述べる各ケースはいずれもこの条件を満足する。

〔ケースⅠ〕　$\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2=1,250$, $\theta_1=900$, $\theta_2=400$, $\alpha=0.5$（ゆえに，$\sigma=50$, $\theta=500$）

この数値を上記の定式に適用して最適解を求めると，次の結果を得る。

$a^*=1.90356$, $\bar{x}_1{}^*=941.8401$, $\bar{x}_2{}^*=358.1598$

$\bar{x}^*=583.6803$, $D=2,500$

$r^*(x_1, x_2)=(0.054128(x_1-x_2-\bar{x}_1{}^*+\bar{x}_2{}^*)+6.81176)^2$

$\bar{r}^*(x_1, x_2)=53.72459$

$O^*=\bar{x}^*-\bar{r}^*(x_1, x_2)=529.9557$

以上の結果は完全に第3表の SBS の結果に一致する。つまり，このケースでは，$x$ を $x_1$ と $x_2$ に分解して業績測定を行う意義がないことが知られるのである。

2つの結果はなぜ一致したのであろうか。（5－8）の報酬関数のなか

の $f_a(x|a)/f(x|a)$ に対応する（7—6）の $f_a(x_1, x_2|a)/f(x_1, x_2|a)$ を求めてみよう。

$$f_a(x_1, x_2|a)/f(x_1, x_2|a)=kda^{d-1}\left(\frac{\alpha}{\sigma_1^2}(x_1-\bar{x}_1^*)-\frac{1-\alpha}{\sigma_2^2}(x_2-\bar{x}_2^*)\right) \tag{7—9}$$

を得る。本ケースの数値をこれにあてはめると，（7—9）は $kd\sigma^{-2}a^{d-1}(x-\bar{x}^*)$ となり，$f_a(x|a)/f(x|a)$ に一致する[5)]。つまり，$a$ の値を推定するうえで，$x$ の測定から得られる確からしさと，これを $x_1$ と $x_2$ に分解して測定することから得られる確からしさとの間になんら差異がないのである。つまり，この場合には，$a$ の推定に関して，$x$ が $x_1$ と $x_2$ の十分統計量となっているのである。逆に言えば，次の関係，

$$f_a(x|a)/f(x|a)\neq f_a(x_1, x_2|a)/f(x_1, x_2|a) \tag{7—10}$$

が成立するときに，$x$ を分解する意義が生じるのである[6)]。

〔ケースⅡ〕　$\sigma_1^2=2,000$，$\sigma_2^2=500$，$\theta_1=900$，$\theta_2=400$，$\alpha=0.5$（ゆえに，$\sigma=50$，$\theta=500$）

この場合の最適解は次のようになる。

$a^*=2.01628$，$\bar{x}_1^*=943.8108$，$\bar{x}_2^*=356.1893$

$\bar{x}^*=587.6215$，$D=1,600$

$r^*(x_1, x_2)=[\beta_1(x_1-\bar{x}_1^*)+\beta_2(x_2-\bar{x}_2^*)+7.03267]^2$

$\beta_1=0.0231986$，$\beta_2=0.0927942$

$\bar{r}^*(x_1, x_2)=54.84022$

$O^*=\bar{x}^*-\bar{r}^*(x_1, x_2)=532.7813$

この結果は，実績情報の分解が，単一情報を前提とする SBS に対しパレート優位なパフォマンスをもたらしうるという事実を明示する。つまり，実績情報 $x$ をその構成要素に分解して測定することに意義が認められるの

である[7]。この結論のもつ意味をいくつかの観点から検討しよう。

実績 $x$ のリスクそれ自体は，$\Phi(x|a)=f(x|a)$ であるから，同一である。しかし，本例では，その構成要素である $x_1$ と $x_2$ のそれぞれのリスクが異なるので，（7—10）の関係が成立する。つまり，分解情報が努力に関してより確かな推定をもたらすのである。

$x_1$ と $x_2$ の2変量に基く $a$ の最尤推定値は，（7—9）より，次のように求まる。

$$a=[(\alpha\sigma_2^2(x_1-\theta_1)+(1-\alpha)\sigma_1^2(\theta_2-x_2))/k(\alpha^2\sigma_2^2+(1-\alpha)^2\sigma_1^2)]^{1/d}$$

これと，（5—10）の $x$ のみに基く推定とを比較してみよう。第8表は $x$ が 第3表のSBS の期待値（$\bar{x}^*=583.6803$）に等しいと仮定した場合の結果を示している。

**第8表　$a$ の推定および報酬 $r$ の比較**

（$x=583.6803$ の場合）

(1)　単一情報のとき；

$a=1.90356$　　　$r=46.4$

(2)　$x_1=950$（有利差異 6.1892），　$x_2=366.3197$（不利差異 10.1304）のとき；

$a=1.62933$　　　$r=38.8903$

(3)　$x_1=930$（不利差異 13.8108），$x_2=346.3197$（有利差異 9.8696）のとき；

$a=2.31581$　　　$r=58.1882$

(4)　$x_1=941.8402$（不利差異 1.9706），$x_2=358.1599$（不利差異 1.9706）のとき；

$a=1.90356$　　　$r=46.2957$

ここで，単一情報および本節ケースⅠのもとでは，(2)～(4)のすべての場合に $a$ は(1)と同一水準に推定され，一律に $r=46.4$ の報酬が適用される。それに対し，本ケースのもとでは，たとえ利益数値 $x$ は同一であっても，2つの業績測定値の組合わせに応じて，推定値は変化し，異なる報酬が適

用される。ところで，予算差異1単位当りに対する業績評価のウエイト比は，（7－7）から明らかなように，$\alpha=0.5$ と仮定すれば，各業績尺度のもつリスク $\sigma_i^2$ に反比例する。したがって，第8表の(2)と(3)を比較すると，リスクが低い業績尺度，換言すれば信頼性の高い業績尺度――本例の場合 $x_2$――が有利差異を示すときに，努力の推定値が高まり，より大なる報酬支払がなされることがわかる。これは，有意性検定の理論からみても，納得のいく結論と言えるであろう。

第8表の(4)は，$a$ が(1)と同一推定値となる $x_1$ と $x_2$ の組合わせを示している。ともに同一額の不利差異が発生しており，また，報酬が(1)よりも減少している。この事実は，2変量業績評価によって，報酬1単位あたりの動機づけ能力が増加することを意味する。

努力が増加した原因は，2つの業績尺度の総体としてのリスクを表わす $D$ を比較すれば明白になる。$\lambda$ の定式から明らかなように，$D$ の減少は努力の増加をもたらす。ケースⅠにおいては，それは $\sigma^2$ に等しかったが，ケースⅡではそれよりも減少した。$D$ の減少は報酬 $r^*(x_1,\ x_2)$ のもつリスクを引き下げるものと思われる。その論証のために，$r^*(x_1,\ x_2)$ の標準偏差 $\sigma(r^*(x_1,\ x_2))$ を求めると，

$$\sigma(r^*(x_1,\ x_2))=[2(\beta_1^2\sigma_1^2+\beta_2^2\sigma_2^2)^2+4\lambda^2(\beta_1^2\sigma_1^2+\beta_2^2\sigma_2^2)]^{\frac{1}{2}}$$
$$=33.50545$$

となる。これは明らかに第3表の $\sigma(r^*(x))$ よりも小さい。

いま述べたように，$D$の減少がパフォマンスの改善をもたらしたのであるが，だとすれば，努力の配分比が変更可能であれば，（7－7）は，リスクが低い業績尺度に対して努力の配分を高めれば，さらにパフォマンスを改善できることを示す。したがって，本ケースにおいては，費用の削減にすべての努力を集中するのがベストとなる。

〔ケースⅢ〕　$\sigma_1^2=\sigma_2^2=1,250$，$\theta_1=900$，$\theta_2=400$，$\alpha=1$（ゆえに，$\sigma=$

50, $\theta=500$)

この場合の最適解は次のようになる。

$a^*=2.06398$, $\bar{x}_1{}^*=989.2759$, $\bar{x}_2{}^*=400$

$\bar{x}^*=589.2759$, $D=1,250$

$r^*(x_1, x_2)=[0.0596467(x_1-\bar{x}_1{}^*)+7.12997]^2$

$\bar{r}^*(x_1)=55.28366$, $\sigma(r^*(x_1))=30.72224$

$O^*=\bar{x}^*-\bar{r}^*(x_1)=533.9923$

本例では，$\alpha=1$ と仮定されるために，すべての努力が $x_1$ の改善に傾注され，$x_2$ は努力対象からはずされる。したがって，$x_2$ は業績評価の対象からも除外されている。ケースⅠよりもパフォマンスが改善されたのは，業績評価尺度のリスク $D$ が $\sigma$ から $\sigma_1$ に低下したからである。

ところで，$x_2$ が努力対象から除外されたということは，その発生が管理者にとって管理不能であるからに他ならない。本ケースで例証されたように，実績数値を管理可能性の有無に従って分解し，努力を集中すべき業績尺度を識別して，当該業績に対してだけ管理責任を負わせるという考え方が，実績情報のみによる業績評価に対してパレート優位の結果を導くことが明らかになった。この事実は責任会計の考え方を正当化する1つの論拠を与えると判断されよう。

（注）

1) セグメント別の分解，すなわち $x=\sum_{i=1}^{n} x_i$ に対しても以下と全く同様の分析が可能である（ここで，$x_i$ は第 $i$ セグメントの実績を表わす)。

2) ここでは，$x_1$ と $x_2$ は相関がないと仮定しているが，より現実的には，非零の相関があると考えるべきであろう。ただし，そのこと自体はここでの研究目的にとっては重要ではない。

3) 2つの業績項目の改善には，本来，異質の努力が要求され，したがって，それぞれの限界生産力と限界負効用は相互に異なると考えるのが妥当であろう。ただし，その場合には，多次元の努力空間を定義しなければならず，解法が一

気に複雑化する。そのために，ここでは，このような簡便法を用いた。

4)　もちろん，（7－1）（7－2）の確率関数については，経営者と管理者の間に合意が成立していると仮定する。

5)　（5－9）を参照のこと。

6)　cf. Holmstrom, B., *op. cit.*, 1979, p. 83-84.

7)　もちろん，その改善効果は，実績を2つの業績項目に分割して測定するのに要する情報コストを上まわらなければならない。情報の入手コストは当面の議論においてこれを無視する。情報コストは第Ⅸ節以降で考慮する。

## Ⅷ　会計的予算実績差異分析

前節では，利益数値をその構成要素に分解する意義，換言すれば，利益の予算実績差異を複数の差異尺度に分解する意義を検討した。そこでは，損益計算ルールに基く差異分解がなされたのであるが，この他に，管理可能性基準に基く差異分解，すなわち，通常，差異分析 (variance analysis) と呼ばれている手法がある。もっとも，差異分析自体は，業績評価と同時に，差異の発生原因を調査すべきか否かを判断させる会計的シグナルを提供することも意図する。したがって，差異分析の有用性は，差異分解という会計手法それ自体の意義，換言すれば，会計的差異分析の意義と，原因分析から得られる情報のもつ意義という2つの側面から検討する必要があろうと思われる。そこで，本節では前者の意義を検討し，後者については次節で論じることにする。その論議のために，代表例として，ここでは，予算差異を価格差異と数量差異に分解する事例をとりあげよう。

収益（売上）を製品1単位当りの市場価格 $p$ と販売数量 $q$ との積で定義すると，報酬支払い前の利益 $x$ は次式で表わされる。

$$x=(p-v)q-F \qquad (8-1)$$

ここで，$v$ は製品1単位当りの変動費，$F$ は固定費を表わす。単純化のために，$v$ と $F$ は確定値として扱い，$p$ と $q$ のみを確率変数とみなし，そ

の結合分布を $f(p,\ q|a)$ で表わそう。そうすると，$x$ の確率密度関数は,

$$\Phi(x|a)=\iint_{\{p,\ q|x=(p-v)q-F\}}f(p,\ q|a)dpdq \qquad (8-2)$$

と表わされる。ここで $f(p,\ q|a)$ は $a$ に依存して定義されているから，$p$ ないし $q$ の発生態様が，管理者の行使する努力水準 $a$ によって影響を受けると仮定されている。その具体的な関数型については後で述べる。

さて，管理会計の情報システムを通じて，$x$ だけでなく，$p$ と $q$ の実現値が知られるとしよう。経営者と管理者の双方が当該情報を知りうると仮定すれば，報酬関数は，$r(x)$ ではなく，$p$ と $q$ の2変量からなる関数 $r(p,\ q)$ として定義することが可能となる。差異分解が業績評価に利用されるという意味はこの関数型のなかに見い出されるであろう。その場合の決定問題は次のように定式化される。

目的関数：$\displaystyle \max_{r(p,q),\,a}\iint G((p-v)q-F-r(p,\ q))\,f(p,\ q|a)dpdq$

制約条件：$\displaystyle \iint U(r(p,\ q))\,f(p,\ q|a)dpdq-V(a)\geq\overline{U} \qquad (8-3)$

$$\iint U(r(p,\ q))\,f_a(p,\ q|a)dpdq-V'(a)=0$$

ここでも，経営者はリスク中立，管理者は報酬に対して $2\sqrt{r(\cdot)}$ の効用関数をもつと仮定しよう。そうすると最適報酬関数 $r^*(p,\ q)$ はすべての $p$ と $q$ に対して次式となる。

$$r^*(p,\ q)=\left\{\lambda+\mu\frac{f_a(p,\ q|a)}{f(p,\ q|a)}\right\}^2 \qquad (8-4)$$

これに対し，（8－3）の $r(p,q)$ と $f(p,q|a)$ を，それぞれ，$r(x)$ と $\Phi(x|a)$ におきかえた場合には，そのときの報酬関数は,

$$r^*(x)=\left\{\lambda+\mu\frac{\Phi_a(x|a)}{\Phi(x|a)}\right\}^2 \qquad (8-5)$$

となる。（8－4）と（8－5）が相違するかぎりは，前節の（7－10）でみたように $r^*(x)$ を用いるよりも $r^*(p, q)$ を用いる方が良い結果が生じる。すなわち，$r^*(p, q)$ が $r^*(x)$ に対してパレート優位なパフォマンスをもたらす必要十分条件はほとんどすべての $p$ と $q$ に対して次の等式が成立しないことに求められる[1]。

$$f_a(p, q|a)/f(p, q|a)=\Phi_a(x|a)/\Phi(x|a) \qquad (8-6)$$

要するに（8－6）は，$a$ を推定するのに $x$ が $p$ と $q$ の十分統計量になること，すなわち，$p$ と $q$ の2つの情報から $a$ に関して知りうるすべての知識が $x$ だけの単一情報から知りうることを示す。したがって，$x$ をあえて $p$ と $q$ に分解する意義のないことが知られるであろう。逆に，（8－6）が成立しないということは，$p$ と $q$ への分解が，$x$ のみから知りうる以上の情報をもたらすことを含意する。

（8－5）の $r^*(x)$ には，おそらく予算・実績の差異すなわち $(x-\bar{x})$ が含まれるであろう[2]。ここで $\bar{x}$ は $x$ の期待値（$=(\bar{p}-v)\bar{q}-F$）を表わす（$\bar{p}$ と $\bar{q}$ はそれぞれ $p$ と $q$ の期待値を表わす)。一方，この予算実績差異は，会計的に次の等式に従って，価格差異と数量差異に分解されるのが通例である。

$$(x-\bar{x})=(p-\bar{p})q+(q-\bar{q})(\bar{p}-v) \qquad (8-7)$$
$$=\text{価格差異}+\text{数量差異}$$

さて，$r^*(p, q)$ の構成要素のなかに，上式右辺の項目がどのような形で入ってくるかが興味深い検討課題となる。そこで，$f(p, q|a)$ の具体的な関数型をできるだけ現実性のある前提のもとで特定しよう。販売数量 $q$ は，たとえば次式のように，管理者が行使する努力 $a$ と環境要因 $\varepsilon$ の実現値に応じて決定されると仮定するのが合理的であろう。

$$q=ka^d+\varepsilon \qquad (8-8)$$

ここで，$k$ と $d$ はいずれも正の係数である[3]。$\varepsilon$ は期待値 $\theta_g$，標準偏差 $\sigma_g$ の正規分布に従う確率変数と仮定すると，$q$ は期待値 $\bar{q}(=ka^d+\theta_g)$，標準偏差 $\sigma_g$ の正規分布に従うことになる。

$p$ についてはどうであろうか。競争的な市場条件を考慮に入れると，価格 $p$ は $a$ から独立していると考えるのが妥当であろう。そこでこれを期待値 $\bar{p}$，標準偏差 $\sigma_p$ の正規分布に従う確率変数と仮定する。これより，$p$ と $q$ は次の２変量正規分布に従う。

$$f(p,\ q|a)=\frac{1}{2\pi\sigma_p\sigma_q\sqrt{1-\rho^2}}exp-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(p-\bar{p})^2}{{\sigma_p}^2}-\frac{2\rho(p-\bar{p})(q-\bar{q})}{\sigma_p\sigma_q}+\frac{(q-\bar{q})^2}{{\sigma_q}^2}\right] \qquad (8-9)$$

ここで，$\rho$ は $p$ と $q$ の間の相関係数を示す。

したがって，

$$f_a(p,\ q|a)=\frac{kda^{d-1}}{\sigma_q(1-\rho^2)}\left[\frac{(q-\bar{q})}{\sigma_q}-\frac{\rho(p-\bar{p})}{\sigma_p}\right]f(p,\ q|a) \qquad (8-10)$$

となる。（８―９）と（８―10）を（８―４）に代入すると次式が導かれる。

$$r^*(p,\ q)=\left\{\lambda+\mu\frac{kda^{d-1}}{\sigma_q(1-\rho^2)}\left[\frac{(q-\bar{q})}{\sigma_q}-\frac{\rho(p-\bar{p})}{\sigma_p}\right]\right\}^2 \qquad (8-11)$$

これをみると，上式のなかに $\rho$ が含まれている。したがって，報酬スケジュールの内容は $\rho$ の値に応じて著しく変化することがわかる。次の２つのケースに分けて考察しよう。

〔ケース１〕　$\rho=0$

最初に，価格 $p$ と販売量 $q$ が相互に独立である場合を検討しよう。つまり，製品が不確実な完全競争市場で販売される場合である。（８―11）に $\rho=0$ を代入すると，報酬は次のように $q$ のみに依存する関数となる。

$$r^*(q)=\left\{\lambda+\mu\frac{kda^{d-1}}{\sigma_q{}^2}(q-\bar{q})\right\}^2 \qquad (8-12)$$

上式は，数量差異（$q-\bar{q}$）だけに基いて業績評価がなされるべきことを示す。価格差異が業績評価の対象から除外されたのは，その発生が本来確率的現象であって，管理不能な要因とみなされたからに他ならない。この意味において，（8—12）の報酬スケジュールは管理可能性基準に合致すると言いうる。ただし，次の点には留意しておかなければならない。業績評価対象は，管理可能要因（$q-\bar{q}$）に限定されたわけであるが，$q$ それ自体が，（8—8）に示したように，本来の管理可能要因 $a$ に加え，管理不能要因 $\varepsilon$ を含んでいるという事実である。後者を含むのは動機づけのためであるという点については前述したとおりである。

〔ケース2〕　$\rho \fallingdotseq 0$

価格 $p$ と販売量 $q$ の間になんらかの相関があるとすると最適報酬関数 $r^*(p, q)$ は（8—11）となる。この場合には，S. Baiman and J. S. Demski が指摘しているように，価格がたとえ管理不能な要因であっても，価格差異が業績評価の対象に含められるべきであるという結論となる[4]。表見的には，この結論は，管理不能要因に対しても管理責任を問うべきことを要求する印象を与える。しかし，この結論をそのように管理可能性基準に対する否定論としてのみ解するのは適切さを欠くであろう。それでは，なにゆえに管理不能要因（$p-\bar{p}$）が業績評価のなかに入ってきたのであろうか。その理由は $\rho \fallingdotseq 0$ という事実に関連する。すなわち，$\rho \fallingdotseq 0$ であるかぎり，$q$ の情報だけで努力を推定するよりも，それに加え，価格情報を知り得れば，推定の精度が高まるからである。つまり，管理可能性の有無ではなく推定精度の改善という観点からこの要因がつけ加えられると解しうるのである。次のような事例を考えよう。

たとえば，市場が売り手優位であるときは，価格の上昇と製品需要の増

加が同時的に起り，逆に，買い手優位に陥ったときには，値崩れと需要の減退が同時に起ると仮定しよう。その場合には，明らかに相関係数 $\rho$ は正の値になる。もう一度（8－11）に戻ろう。価格差異の項がマイナスになっていることに注意しよう。ここで，販売量が予定を上回った場合，すなわち，$q \geq \bar{q}$ のケースを考えよう。このとき価格の実現値に応じて，(イ) $p \geq \bar{p}$，(ロ) $p < \bar{p}$ の2つの場合が生じうる。(イ)の情報が入手されたとすると，売り手市場であったと判断されるであろう。だとすると，販売実績が予定を上回ったからといって，とくに大きな努力が払われたと判断するには至らない。市場が好況であったと解する余地が残っているからである。これに対して，(ロ)の情報が得られるときにはどうなるであろうか。この場合には，買い手市場であったと推定され，そうした逆境にあって，なおかつ $q \geq \bar{q}$ の実績が生じたということは，余程顕著な努力が払われたからであろうと推定される。したがって，(イ)よりは(ロ)の場合に報酬は大きくなる。また，$q < \bar{q}$ のときにも，(イ)よりは(ロ)の場合の方が報酬が大きくなる。このように，$p$ の入手に意義が認められるのは，その実現値に応じて努力の推定が変化するからである。

それでは，数量差異だけを業績評価に組み入れる報酬スケジュール――これを $r^*(q)$ と表わそう――は，$r^*(p, q)$ と比べて，組織の効率性に関して，どのように劣る (Pareto inferior) のであろうか。この点を具体例で検討しよう。

まず最初に，$r^*(p, q)$ がもたらすパフォマンスを明らかにしよう。（8－8）（8－9）および第9表の数値例のもとで，（8－3）を解くと，

$$\mu = \sigma_q^2(1-\rho^2)(kd)^{-2}a^{3-2d} \tag{8-13}$$

$$\lambda = 0.5\bar{p}kda^{d-2} - \sigma_q^2(1-\rho^2)(kd)^{-2}(2-d)a^{2-2d} \tag{8-14}$$

となる。第9表のパラメータ値を用いると，$r^*(p, q)$ がもたらすパフォ

**第９表　数値例**

| |
|---|
| $\bar{p}=10$，$\sigma_p=1$，$\theta_q=50$，$\sigma_q=10$，$\rho=0.5$，$k=5$， |
| $d=0.8$，$U(r(\cdot))=2\sqrt{r(\cdot)}$，$V(a)=a^2$，$\overline{U}=10$， |
| $F=v=0$ |
| 経営者はリスク中立 |

**第10表　$r^*(p, q)$ のパフォマンス**

$$a^*=1.90356$$

$$r^*(p, q)=\left[\lambda+\frac{a^{*2-d}}{kd}\left((q-\bar{q}^*)-\frac{\rho\sigma_q}{\sigma_p}(p-\bar{p})\right)\right]^2$$
$$=[6.81177+0.541277((q-\bar{q}^*)-5(p-\bar{p}))]^2$$

$$\bar{q}^*=\theta_q+ka^{*d}=58.36803$$

$$\bar{r}^*(p, q)=\iint r^*(p, q)f(p, q|a^*)dpdq$$
$$=68.37380$$

$$E(pq)=\iint pqf(p, q|a^*)dpdq=\bar{p}\bar{q}^*+\rho\sigma_p\sigma_q$$
$$=588.680305$$

$$O^*=E(pq)-\bar{r}^*(p, q)=520.30650$$

マンスは第10表の結果となる。ここで，報酬 $r^*(p, q)$ の期待値は，

$$\bar{r}^*(p, q)=\iint r^*(p, q)f(p, q|a^*)dpdq$$
$$=\iint\left\{\lambda+\frac{a^{*2-d}}{kd}\left((q-\bar{q}^*)-\frac{\rho\sigma_q}{\sigma_p}(p-\bar{p})\right)\right\}^2 f(p, q|a^*)dpdq$$
$$=\lambda^2+\left(\frac{a^{*2-d}}{kd}\right)^2\sigma_q{}^2(1-\rho^2) \qquad (8-15)$$

となる。

他方，$r(q)$ に関する最適解を求めると，

$$r^*(q)=\left\{\lambda+\mu\frac{\int f_a(p, q)dp}{\int f(p, q)dp}\right\}^2 \qquad \forall q$$

となる。したがって，次式を得る。

第11表　$r^*(q)$ のパフォマンス

| |
|---|
| $a^*=1.90356$ |
| $r^*(q)=\left[\lambda+\dfrac{a^{*2-d}}{kd}(q-\bar{q}^*)\right]^2$ |
| $\quad=[6.81177+0.541277(q-\bar{q}^*)]^2$ |
| $\bar{q}^*=\theta_q+ka^{*d}=58.36803$ |
| $\bar{r}^*(q)=\iint r^*(q)f(p,\ q\mid a^*)dpdq$ |
| $\quad=75.698332$ |
| $E(pq)=\iint pqf(p,\ q\mid a^*)dpdq$ |
| $\quad=588.630305$ |
| $O^*=E(pq)-\bar{r}^*(q)=512.93197$ |

$$r^*(q)=\left\{\lambda+\mu\frac{kda^{d-1}}{\sigma_q{}^2(1-\rho^2)}(q-\bar{q})\right\}^2 \qquad \forall q$$

$\mu$ と $\lambda$ を求めると，はからずも，（8—13）および（8—14）と同一式が導かれる。ということは，$r^*(q)$ によっても，$r^*(p, q)$ の場合と同一の努力水準が喚起せられることを意味する。その結果が第11表に要約されている。ここで，報酬 $r^*(q)$ の期待値は，

$$\bar{r}^*(q)=\iint r^*(q)f(p,\ q\mid a^*)dpdq$$
$$=\iint\left\{\lambda+\frac{a^{*2-d}}{kd}(q-\bar{q}^*)\right\}^2 f(p,\ q\mid a^*)dpdq$$
$$=\lambda^2+\left(\frac{a^{*2-d}}{kd}\right)^2\sigma_q{}^2 \qquad (8—16)$$

となる。これを（8—15）と比較すれば，$\lambda$ はどちらも同一値であり，$|\rho|<1$ であるから，明らかに，$\bar{r}^*(p,\ q)<\bar{r}^*(q)$ となる。したがって，両者間のパフォマンスの違いは報酬の期待値の差から生じていることがわかる。

以上を，われわれは次のように要約できるであろう。価格と販売数量との間に相関がある場合には，管理可能性がない場合であっても，価格差異

を業績評価の対象に含めた方がパレート優位な解をもたらす。もっとも，動機づけ能力という点では $r^*(p, q)$ と $r^*(q)$ の間に差はなく，$r^*(p, q)$ の方がより少い報酬によって同一水準の努力を喚起することができる。価格情報の入手がこれを可能にするのである。

以上によって，差異分析が一定の情報価値をもつことを明らかにした。ただし，この情報効果は，$x$ を構成する部分要素である $p$ と $q$ の実現値を知りうるという事実によってもたらされたものである。したがって，差異分析が有効であるとはいっても，決して，会計数値としての差異金額それ自体が情報価値をもつというわけではない。たとえば，会計数値としての差異金額は（8－7）等の算式に従って求められるが，そのように加工された数値には本来意味がないのであって，まして，差異数値の計算方法の変更によってなんらかの追加的新情報が生産されると考えるのは幻想にすぎない。収集されるべき原始データが変化しないとするならば，会計的差異分解の計算手続をいかに複雑化しようが，そのこと自体は情報の生産活動とはなんの関係もないことが留意されなければならない[5]。

（注）

1）cf. Baiman, S. and J. S. Demski, "Variance Analysis Procedures as Motivational Devices," *Management Science* (August 1980), pp. 843-844.

2）ただし，$x$ は $p$ と $q$ の２つの確率変数の積を含んでいるから，$f(p, q|a)$ から（8－2）の $\Phi(x|a)$ を解析可能な形で導くのは困難である。cf. Hilliard, J. E. and R. A. Leitch, "Cost-Volume-Profit Analysis Under Uncertainty: A Log Normal Approach," *The Accounting Review* (January 1975), pp. 69-80.

3）ここでも，$f(q|a)$ は $a$ に関して一次の確率優位が成立する。

4）Baiman, S. and J. S. Demski, *op. cit.*, pp. 844-845.

5）cf. Baiman, S. and J. S. Demski, "Economically Optimal Performance Evaluation and Control Systems," *Journal of Accounting Research* (supplement 1980), p. 188. proposition 1. 1.

（未完）